

UNA INTRODUCCIÓ A LA PROPORCIONALITAT EN FORMA DE TALLER

Un dels aspectes més problemàtics de l'ensenyament de les Matemàtiques és el de la introducció del concepte de la proporcionalitat. Diem problemàtic, ja que comporta un canvi en l'estructura mental dels nostres alumnes. Fins a l'estudi d'aquest concepte els alumnes han treballat dins del marc d'una estructura additiva, si exceptuem evidentment l'estudi de la multiplicació/divisió i les fraccions (Vergnaud, 1983), i és precisament en aquest moment quan han de fer el canvi cap a la consolidació de l'estructura multiplicativa. Una estructura en la qual hauran de desenvolupar el seu pensament a partir d'aquest moment; això obliga a una introducció clara i entenedora del raonament proporcional.

Durant molts anys, i encara ara hi ha qui ho fa, s'ha treballat la proporcionalitat d'una manera mecànica i rutinària. S'han tractat els nois i noies com màquines programables incapaces de raonar, és a dir, sense tenir en compte si entenien o no el que feien i per a què ho feien. Solament interessava que resolguessin els molts problemes plantejats a classe. Amb l'ensenyament de la tristament famosa regla de tres tot s'arreglava. Si alguna vegada es preguntava als nens per què ho feien d'aquella manera, la resposta sempre era la mateixa: «Perquè m'ho han ensenyat així; perquè algú m'ho ha dit». Mai no sabien el que realment feien. D'aquesta manera el raonament proporcional no s'adquiria, únicament adquirien la mecànica de resoldre els exercicis.

A partir d'aquests arguments vam veure la necessitat de desenvolupar un procés que fes entenedor aquest concepte. Entenedor des del primer moment de la seva presentació i durant tot el període d'aprenentatge, remarcant sempre l'estructura multiplicativa del raonament proporcional. Costa, ja ho hem dit, desterrar el concepte additiu, cosa que si no es fa des del primer moment, després serà força difícil d'aconseguir, amb el perill d'arrossegat per sempre aquesta concepció errònia. Així, per exemple, davant de la pregunta «És proporcional l'edat d'una persona amb la seva alçada?», el fet que algunes persones responguin: «Durant una primera etapa de la vida del nen sí que ho és, i a partir de certa edat això ja no passa», fa palès la no adquisició de l'estructura multiplicativa per part d'aquestes persones i per tant, la no adquisició del raonament proporcional. Però hem de tenir present que aquestes mateixes persones poden ser capaces de resoldre molts dels problemes de regla de tres.

Després d'un període de temps ocupats en reflexions i discussions teòriques sobre l'adquisició, aprenentatge i desenvolupament del pensament proporcional en els nois i noies, vam decidir elaborar un procés metodològic per tal d'introduir a les nostres aules la proporcionalitat. Donat que els llibres de text més corrents en el nostre àmbit de treball presentaven un desenvolupament curricular que no s'adeia amb les nostres reflexions, vam haver de cercar i trobar un plantejament que ens convencés i que s'emmarqués dintre del marc conceptual que descriu la teoria cognitiva (Karplus et al., 1983; Kücherman, 1989)

Vam decidir que la manera més adient d'introduir la proporcionalitat seria en forma de taller, tot rebutjant els mètodes tradicionals de guix i pissarra. L'adquisició d'un concepte matemàtic de la complexitat del que estem tractant, vam creure que havia de passar per una primera etapa completament experimental, que permetés al nen un inici d'interiorització del concepte a partir de la seva pròpia experiència manipulativa (Wollman et al., 1978; Harrison et al., 1989). Els llibres de text, tot i contenir unes bones recopilacions d'exercicis i problemes, no compleixen la premissa de la qual partíem, ja que no poden suplir la necessitat de passar per aquest procés manipulatiu.

Vam plantejar el taller basant-nos en una estructura de tres fases. Una primera fase en què a partir de la manipulació d'objectes es pretenia que l'alumne realitzés un treball de raonament aritmètic-proporcional. En la segona fase es pretenia que els alumnes descobrissin la proporcionalitat en un context d'elements geomètrics. En la tercera fase es treballava en contextos reals en què els alumnes havien d'aplicar el raonament proporcional. D'aquesta manera vam intentar que, des del mateix moment de la seva introducció, l'alumne tingués una visió àmplia, i no restringida a un sol context, del concepte de la proporcionalitat.

En la primera sessió del taller es van organitzar grups reduïts d'alumnes. Se'ls va repartir material consistent en dues classes de petits objectes diferents que es podien distingir per la seva forma o mida o color. Es van donar un conjunt d'instruccions concises i seqüenciades per tal que agrupessin el material segons una relació numèrica donada. Amb els resultats experimentals obtinguts van haver d'omplir una taula que posava de manifest la relació numèrica estudiada.

Experiències didàctiques

Per exemple, partint de la relació 1 a 3, es demanava als alumnes: «Si per una peça vermella n'hi ha 3 de blanques, i ara en posem tres de vermelles, quantes peces blanques hi ha d'haver?». Aquesta mateixa qüestió es plantejava amb diferents números de peces. Tal com anaven contestant les preguntes, anaven omplint una taula com la que segueix a continuació:

vermell	1	2	3		8
blanc	3			12	

Durant l'experiència es plantejaven les preguntes tant respecte a les peces vermelles com a les peces blanques. Aquesta mateixa experiència es va repetir utilitzant la mateixa tècnica amb altres relacions numèriques com 2 és a 3, 5 és a 2..., procurant sempre utilitzar relacions senzilles.

Per completar l'experiència es va plantejar l'exercici invers: donada una taula en la qual no figurava explícitament la relació treballada, es demanava als alumnes que la descobrissin en la seva forma més senzilla, per tal de completar la taula. Com a exemple posem una taula indicativa:

vermell		6	15	18	
blanc			20	24	40

A continuació es va fer una posada en comú amb tot el grup classe per tal d'analitzar les taules numèriques que prèviament havien construït. La primera constatació que van fer els alumnes fou la de definir una sèrie numèrica en cada una de les files de les taules (3, 6, 9, 12...). Aquesta seriació era explicada per un grup d'alumnes com a resultat d'una relació additiva, mentre que per d'altres era el resultat de multiplicar el primer component de la taula per altres números naturals. En aquest segon cas, els alumnes també constataren que els dos números d'una mateixa columna s'obtenien multiplicant pel mateix número. La majoria dels nostres alumnes van identificar els termes de la taula com un conjunt de fraccions equivalents.

A partir dels números que sortien a la taula es va demanar als alumnes com van fer per obtenir-los. A continuació es va preguntar quantes peces blanques es necessitaven si es posava el doble o triple d'una quantitat determinada de peces vermelles. Es pretenia que si el

doble era, per exemple, 24 peces, el número de peces blanques que es necessitaven no era afegir-ne també 12, sinó que era afegir també el doble del nombre de peces blanques que ja hi havia, és a dir, 16 en el nostre exemple.

Amb la finalitat d'introduir la notació tradicional de les proporcions, així com per facilitar el descobriment de les seves propietats, es van extreure de les taules parells de números i es van disposar en la forma habitual de fracció:

$$\frac{2}{6} = \frac{3}{9}$$

A partir d'aquesta forma d'expressió es va preguntar si entre aquestes dues fraccions es podia posar el signe igual. Després de la resposta afirmativa dels alumnes que havien treballat amb anterioritat el concepte de fracció equivalent, cosa que els va facilitar la tasca, i ja escrites les proporcions amb la forma habitual, es va preguntar als alumnes si aquestes quantitats mantenien alguna altra relació. Així van descobrir la regla que el producte del termes mitjans era igual al producte dels termes extrems (multiplicar en creu, en paraules dels alumnes).

Pensem que és important de cara a la introducció intuïtiva del concepte de raó, que els alumnes descobreixin el patró que hi ha entre els dos números d'una mateixa proporció, és a dir, que s'adonin, en el nostre exemple, que la relació entre els dos números és de 3, segons com hagin dividit, i que aquest patró és el mateix en tots els parells verticals de la taula que s'analitza.

Com a exercici final de la sessió es proposava als alumnes que trobessin la resolució de l'exercici habitual de buscar un dels termes desconeguts d'un parell de relacions proporcionals:

$$\frac{2}{6} = \frac{9}{x}$$

Aquest tipus d'exercici s'ha de començar amb números que facilitin el càlcul i també amb raons simples com les usades en la construcció de les taules, per seguir amb números que requereixin una major complexitat de càlcul.

Durant tota aquesta sessió de treball amb els alumnes no es va utilitzar en cap moment el vocabulari específic dels elements que intervenen en les relacions de proporcionalitat; tan sols va sortir la paraula proporció quan se'ls va presentar la forma habitual d'escriure-les.

En la segona sessió es va donar a cada grup 10 rectangles de diferents colors i mides. Es van construir de manera que hi hagués dos grups de tres rectangles amb costats proporcionals entre ells amb raons 2:1 i 4:1

Experiències didàctiques

respectivament, un grup de dos rectangles amb raó 5:1 i dos rectangles de costats 28 i 4, i 21 i 7 cm respectivament, que no guardaven cap tipus de relació proporcional ni entre ells ni amb els altres. Es va demanar als alumnes que els classifiquessin posant junts els que creguessin que eren semblants entre ells. Els van agrupar per similituds seguint diversos criteris de classificació com el de separar els que tenien un costat molt llarg i l'altre petit, o bé segons si tenien algun costat igual... Cap grup no va mesurar les dimensions dels costats dels rectangles per fer la classificació.

Després de l'evidència de la ineficàcia dels diferents sistemes de classificació emprats i de la insatisfacció produïda en els propis alumnes, es va proposar que prenguessin les mides dels costats i assagessin un nou criteri de classificació comparant les mides i omplint la taula

color	llargada	amplada	costat llarg = <input type="checkbox"/> x costat curt

Es va fer omplir per cada rectangle la següent expressió:

Rectangle de color _____: $\frac{\text{llargada}}{\text{amplada}} = \text{$

i a continuació van agrupar-los segons la mateixa relació entre els costats. Després es va veure, fent-los posar un dintre de l'altre, que els rectangles amb la mateixa raó eren el mateix rectangle ampliat o reduït. En aquest moment s'introdueix el terme de raó de proporcionalitat en la seva forma de fracció.

Es va fer que els alumnes vegessin que entre les mesures dels costats de dos rectangles amb la mateixa raó es podien escriure proporcions entre els seus costats tal com les havien escrit a l'activitat anterior. S'ha d'insistir que si la raó s'ha escrit com llargada/amplada s'ha de mantenir durant tot l'exercici i que no es pot escriure al revés.

Els alumnes han d'observar que si els costats dels rectangles no estan amb la mateixa raó, aquests rectangles no són proporcionals. Amb aquesta finalitat es va proposar als alumnes de triar rectangles proporcionals entre ells i rectangles no proporcionals entre ells i que justifiquessin les seves tries.

Aquesta sessió es va acabar proposant als alumnes problemes consistents a calcular una dimensió d'un rectangle donada l'altra i sabent que els seus costats havien de ser proporcionals a un dels rectangles retallats amb què s'havia desenvolupat la sessió. Un problema



característic dels que es van proposar pot ser el següent: Vull construir un rectangle semblant al groc que faci 4 m. de llargada. Quina alçada haurà de tenir?

A la tercera sessió vam fer comparar rectangles retallats que nosaltres vam proporcionar als alumnes amb elements rectangulars de l'aula. Naturalment, com a pas previ al treball amb l'alumne, vam haver de mesurar alguns dels elements rectangulars de l'aula (pissarra, pòsters, taules, portes, armaris, finestres, cartelleres...) per tal de construir rectangles proporcionals que després vam donar als alumnes. La veritat és que vam tenir dificultats per trobar-ne, ja que la relació entre els costats de les formes rectangulars del mobiliari de l'aula no guarden relacions senzilles com les que s'havien treballat fins aquell moment. En el treball introductor i a la proporcionalitat, l'alumne té dificultats per interpretar correctament les raons no simples. Com a últim recurs sempre es poden marcar les rajoles del terra de l'aula amb formes de rectangles que continguin les raons més simples treballades a classe.

Quan l'alumne està buscant dintre de l'aula elements rectangulars proporcionals al que se'ls donava de model, van haver de mesurar les dimensions dels rectangles; aquestes mesures les van prendre directament o bé indirectament i en ambdós casos a partir d'una primera estimació de les mesures a ull. Per tant, l'alumne, a més a més de treballar la proporcionalitat, està emprant procediments d'estimació i mesura.

Durant el treball dels alumnes, cal admetre qualsevol de les maneres que tinguin de resoldre aquesta situació; però quan es comentin i es corregeixin les solucions s'ha de tendir a escriure-les de manera unificada en la forma fraccionària habitual en què s'escriuen les proporcions. A l'hora de posar en comú les solucions s'ha de tenir en compte que les proporcions que hauran escrit els diversos grups de treball poden presentar formes diferents, com

$$\text{llargada}_a / \text{amplada}_a = \text{llargada}_b / \text{amplada}_b$$

o bé

$$\text{llargada}_a / \text{llargada}_b = \text{amplada}_a / \text{amplada}_b$$

S'ha de fer raonar als alumnes si les proporcions escrites d'una manera o d'una altra condueixen a obtenir els mateixos rectangles proporcionals. És útil de cara al treball posterior que l'alumne conegui totes les possibilitats d'escriure la proporció entre els 4 números que es necessiten per establir la igualtat de les raons entre les dimensions de dos rectangles semblants.

Després d'haver realitzat aquest treball, hem notat que la idea de proporcionalitat ha penetrat en el pensament

de l'alumne d'una manera planera i natural. Som conscients que algunes de les activitats descrites poden semblar molt senzilles, però és precisament aquesta facilitat la que va fer que les incorporéssim, ja que d'aquesta manera facilitàvem l'accés de la gran majoria d'alumnes a aquesta nova forma de raonament multiplicatiu.

El tema de la proporcionalitat no l'hem tractat en la seva totalitat en aquest treball. Només n'hem descrit una introducció que ha fet que el treball a classe hagi estat motivador per als mestres i per als alumnes. Aquestes activitats no han de ser preses com un fi, sinó que són el punt de partida bàsic per a continuar desenvolupant el raonament proporcional.

*Rosa M. Boqueras, Joan Ferran
Ma Dolors Gené, Robert M. Gilibert,
Francesc Mariné*

Bibliografia

Vergnaud, G. (1983); "Multiplicative structures". Dins de Lesh, R. and Landau, M. Eds., *Acquisition of mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press.

Harrison, B., Brindley, S., Bye, M.P. (1989); *Allowing for student cognitive levels in the teaching of fractions and ratios*, J. Research in Mathematics Education, 20 (3).

Karplus, R., Pulos, S., Stage, E.K. (1983); "Proportional reasoning of early adolescents". Dins de Lesh, R. and Landau, M. Eds., *Acquisition of mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press.

Kücherman, D. (1989); "Learning and teaching ratio: A look at some current textbooks". Dins de Ernest, P. Ed. *Mathematics Teaching. The State of the Art*. New York: Falmer Press.

Wollman, W. T., Lawson, A. E. (1978); *The influence of instruction on proportional reasoning in seventh graders*. J. Research in Science Teaching, 15 (3).