Theodosius' Sphaerica*:* *A Second Arabic Translation*

PAUL KUNITZSCH
Davidstrasse 17
81927 Muenchen, Germany

RICHARD LORCH
10 Nightingale Court, Leam Terrace
Leamington Spa, CV31 1DQ, Great Britain
(richardlorch@btinternet.com)

ABSTRACT: An Arabic translation of the *Sphaerica* of Theodosius of Bithynia (around 100 B.C.) accompanied by its Latin translation by Gerard of Cremona had been edited by P. Kunitzsch and R. Lorch in 2010. Apart from that, there exists a second Arabic translation of this text in two manuscripts in Hebrew cursive script. For readers interested in the matter, we here edit the text of Book I of the work in this second version and discuss some differences here from the version edited in 2010.

KEYWORDS: Theodosius of Bithynia, his work *Sphaerica*, anonymous Arabic translation (edited 2010), Qusṭā ibn Lūqā – second Arabic translation, partly edited and discussed here for comparison.

In 2010, we have edited an Arabic translation of Theodosius' *Sphaerica* together with its Latin translation by Gerard of Cremona (Toledo, 12th century AD).[1] The Arabic version of 2010 has been edited from three manuscripts; it remained anonymous, the translator(s) were not mentioned in the

1. *Theodosius*, Sphaerica, *Arabic and Medieval Latin Translations*, Edited by Paul KUNITZSCH and Richard LORCH, Stuttgart: Franz Steiner Verlag, 2010 (Series *Boethius*, Vol.62), 431 pp. In the present article, this will shortly be quoted as: 2010:x (= page number), y (= line number). Literature quoted there (cf. Bibliography pp. 429-431) will here be quoted in the abbreviated form used there. Literature published after 2010 will of course be quoted here with full title etc.

Kunitzsch, Paul; Lorch, Richard (2018-2019). «Theodosius' *Sphaerica*: A Second Arabic Translation». *Suhayl* 16-17, pp. 121-148. ISSN: 1576-9372. DOI: 10.1344/SUHAYL2019.16-17.4.

sources (cf. 2010:2f.). In addition, R. Lorch found two manuscripts (in Hebrew cursive script) containing another Arabic version of the *Sphaerica*[2] of which we here edit the text of Book 1, transformed into Arabic script, in order to give interested readers an idea of the form and content of this second version of the text.

This second Arabic translation of the *Sphaerica* has been found in two manuscripts in cursive Hebrew script. In both manuscripts the translation is ascribed to Qusṭā ibn Lūqā (d. ca. 300 H/912-13 AD). The two manuscripts are:

F = Florence, Biblioteca Medicea Laurenziana, Orientali 124, 76ff.; and
C = Cambridge, University Library, Add. 1220, ff. 1r-50r.

The script, a cursive form of Hebrew, in **F** is rather clearly readable, whereas in **C** the script often appears quite hastily and carelessly made, also it seems that the pens and/or the hands of writers had several times changed. The language is Arabic, but in a very colloquial form (judeo-Arabic?); for our present rendering we transformed it into normal written Arabic (with the deviant colloquial Hebrew variants only shown in the apparatus of Propos. 1, in order to save the space for the rest of the text). So, as it seems, this text was produced around 900AD in Baghdad, then somehow reached al-Andalus, i.e the Arabic-dominated zones of Spain, where in the late period it came into the hands of Jewish inhabitants of the area who then transformed it somehow, perhaps from an Arabic manuscript in the Andalusian-Maghrebi ductus of the Arabic script and with the spoken help of some Arabs (in the colloquial dialect), into their contemporary judeo-Arabic language and writing.

2. Cf. Lorch [1996], p. 164f.; *idem*, The "Second" Arabic translation of Theodosius' *Sphaerica*, in: *From Alexandria, Through Baghdad. Surveys and Studies... in Honor of J.L. Berggren*, ed. N. Sidoli – G. Van Brummelen, Berlin – Heidelberg: Springer Verlag, 2014, pp. 255-258.

Some Comments

Generally the mathematical contents and proceedings in the second translation are the same as in 2010, apart from the fact that here often other vocabulary and another style of expression is used. As for the diagrams of the propositions, in our photocopies of **F** and **C** they were mostly not clearly visible, but we received coloured scans of **C** in which the diagrams were well visible.[3] The letters in the diagrams here (in Book I) reach from *A* to *N* (following the Greek alphabet, and in Arabic the *abjad* series, omitting *U* and *I*).[4] In the following some differences in **FC** from 2010 will shortly be mentioned. But not all such differences must be due to the translation or transmission of the second Arabic version, it could well be that its translator Qusṭā ibn Lūqā used a Greek source that itself offered readings etc. different from those in the source of the translation of 2010.

Propos. I, 4: In 2010: 23-27 both in the diagram and in the corresponding mathematical text 9 diagram letters are used, *A – L*, with the omission of *H*. The same is the case in the second translation, but here one more letter is omitted: *T*, also both in the diagram and in the text, i.e. altogether only 8 and not 9 letters.

Propos. I, 6, lines 35-36: The sentence between the pointed brackets (*wa-khaṭṭ KN… ilā muḥīṭihā*) is omitted in **FC**; it has been added from 2010: 34,45-46 (= Latin p. 35, 58-59), because there and in the Greek text it continues and completes the preceding sentence about line *TL*.

Propos. I,7: The order of the six letters, *A – Z*, and accordingly the mathematical discussion in 2010 and in the second translation are somewhat different, but the mathematical results of the two are equal.

Propos. I, 13, lines 7 and 9: The diagram and the text of this proposition contain 9 diagram letters, *A – K* in the normal alphabetical order (so in the Greek text and in 2010, line 8: *khaṭṭ HK,* and lines 11 and 12, i.e. twice, the same); here the second translation has in all places instead of *K* the letter *L* (lines 7 and 9 —here twice).

3. We use this moment to express our graditude to Prof. M. Folkerts (Munich), Prof. Dj. Paunić (Novi Sad), Dr. B. van Dalen (Munich) and Dr. Sonja Brentjes (Berlin), who helped us to obtain the scans of manuscript C from Cambridge and to transform the edition into the *Suhayl* format.

4. Cf. the table in 2010: 8.

Propos. 1, 14, line 10: ʿ*amūd HT*, here the Greek text and 2010: 56,10 have the letters *TA*. From line 11 on the two versions, 2010 and the second translation, show several differences in the text, but use the same letters in the argumentation and at the end arrive at the same result. The arrangement of the diagrams and their letters in the two versions is also slightly different, but indicates the same mathematical effect.

Propositions 1, 15 and 16: The diagrams of these two propositions are identical with the diagram of Propos. 14, both in 2010 and in the second translation.

Propos. 1, 17: The diagram of this proposition has the same form in both versions. But of the six letters in that diagram the positions of two letters were exchanged: the place of *A* in 2010 is taken by *B* in the second translation, and the place of *B* in 2010 by *A* in the second translation. The text of the proof is nearly identical in the two versions and arrives at the same result.

Propos. 1, 18: In this proposition, the difference of both diagram and text in the two versions is remarkably greater. The diagram (and the text) in 2010 have only 5 letters, *A* – *E*, whereas the second translation has in both instances 6 letters, *A* – *Z* (there is no *Z* in 2010). The way of the proof is similar in the two versions until line 8 (second translation)/ 2010: 68,9; hereafter they differ in general and in details, the second translation then introducing the additional letter *Z*. At the end, the final conclusion sounds almost identical in both versions.

Propos. 1, 20: This proposition contains the diagram in two parts: the larger part shows two circles, marked with 5 letters, *A*, *B*, *G*, *D*, *K*, and separately a smaller detail of that diagram, with 4 letters, *E*, *Z*, *H*, *T* (so in the Greek text and in 2010: 72-76). The second translation has mainly the same forms of the diagrams and the same mathematical descriptions with one exception: both at the lower end of the diameter of circle *ABD* in the bigger diagram and in the pertaining text (in lines 9, 10, 11, 14 and 20) instead of the letter *K* in 2010 etc. it has *T*, a second time beside its proper place in the smaller diagram, there together with *E*, *Z* and *H*. So the second translation uses *T* also in the bigger diagram, in combination with its letters *A*, *B*, *G* and *D*. Nevertheless, the proof of the second translation comes to the same result as 2010: 20-21, that line *AK* (*AT*) is equal to line *ET*, and line *AK* (*AT*) is the diameter of the sphere, and therefore line *ET* is equal to the diameter of the known sphere. The reason for using *T* a second time (instead of *K*) in the two manuscripts of the second translation could be a simple misunderstanding of an Arabic source manuscript in the Andalusian-Maghrebi ductus: in that style of writing these two letters can look quite similar, and when written a bit carelessly and then read and reproduced also somewhat carelessly and without precise knowledge of the matter and the background, such a confusion between *T* and *K* might easily happen.

Propos. I, 21: The figure of the diagram in this proposition is differently formed in the Greek text, in 2010 and here in the second translation. In the Greek text and in 2010 it has 8 letters, *A* – *T*; in the second translation it has only 6 letters, *A*, *B*, *G*, *D*, *E* and *T*; *Z* and *H* are here missing, both in the diagram and in the mathematical text. Therefore the mathematical description in the two versions is only partially identical: from 2010: 78,8 = second translation line 6 on it has a different argumentation using the different letters.

So far our comments on the differences in Theodosius' *Sphaerica* between the edition of 2010 and the second Arabic translation. As already said, we have transformed the colloquial judeo-Arabic dialect into standard written Arabic form (citing the colloquial variants in the apparatus only in Propos. I). Further, in the course of the text, we have only quoted variants from the manuscripts when they might influence the technical meaning of a sentence. In any way, of historical importance was "2010", the (first) Arabic version circulating and being widely cited in the Orient, and in the same also in the Latin West through Gerard of Cremona's Latin translation of the 12th century. This present edition is only meant to give interested readers an idea of what there was further produced, in addition to the well-known "standard version" edited in 2010.

كتاب ثاوذوسيوس فى الكرة ترجمة قسطا بن لوقا

المقالة الأولى

الكرة هى شكل مجسم يحيط به سطح واحد فقط فى وسطه نقطة جميع الخطوط الخارجة منها إلى سطحه متساوية ، وتلك النقطة هى مركز الكرة ،

قطر الكرة هو خط مستقيم يمر على المركز وينتهى إلى جهتى الكرة عند سطحها والكرة تتحرك عليه وهو ثابت ، قطبا الكرة هما نهايتا القطر ،

وقطب الدائرة على الكرة هى نقطة على سطح الكرة جميع الخطوط الخارجة منها إلى تلك الدائرة متساوية ،

الدوائر التى تخط على الكرة يقال بعدها من المركز سواء إذا كانت الأعمدة الخارجة من المركز إلى سطحها متساوية والأبعد من المركز هو الذى العمود الخارج من المركز إلى سطحها أطول ،

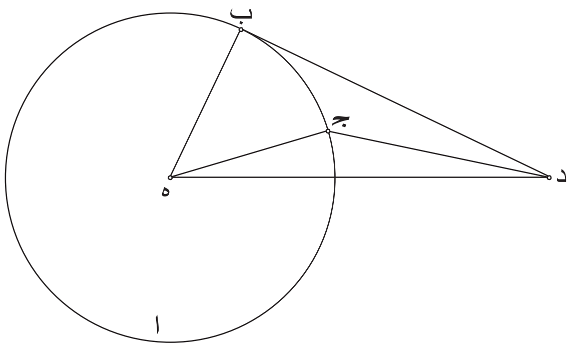
والسطح يقال إنه منحرف على السطح إذا كانت الخطوط الخارجة فى السطحين جميعاً من نقطة واحدة فى فصلهما المشترك لهما قائمة ليس تحيط بزاوية قائمة ،

السطح المنحرف على سطح يقال إنه منحرف على السطح انحرافًا مشابهًا لانحراف سطح ما على سطح آخر إذا كانت الخطوط الخارجة فى كل السطوح من نقطتين من فصلهما قائمة عليها بزاوية متساوية والسطحان اللذان زواياهما غير متساوية انحراف أحدهما على الآخر أعظم .

[١] إذا كان يفصل سطح ما بسيط كرة فإن فصله الذى يكون فى بسيط الكرة هو يحيط بدائرة .

---

1 ثاوذوسيوس] **תאודוסיוס F, תאודסיוס C**   *1* بن] **אבן MSS**   *2* الأولى] **אלאולא F**   *3* هى] **הוא F, הו C**   *4* متساوية] **מסתויה MSS**   *5* يمر] **ימור MSS**   *5* المركز] **מרכז C**   *6* قطبا] **קטבי MSS**   *6* هما] **היא MSS**   *6* نهايتا] **נהאיאתי MSS**   *7* هى] **היא MSS**   *7* الخارجة] **אלכארגין MSS**   *8* متساوية] **מסתויה** (*in corr.*) **F**   *9* التى] **אלדי MSS**   *9* المركز] **מרכז C**   *9* إذا] **אדי C**   *9* الأعمدة] **אלעאמדה MSS**   *10* متساوية] **מסתויה MSS**   *12* السطح] **סטח MSS**, *supra* **אל F**   *13* واحدة] **וחדה MSS**, *supra* **א F**   *14* انحرافًا مشابهًا] **אנחראף מתשאבה MSS**   *16* والسطحان اللذان] **ואלסטחין אלדי MSS**   *16* متساوية[2]] **מסתויה MSS**



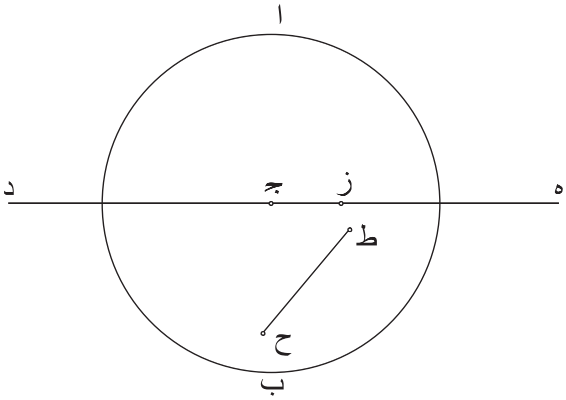
فليكن يفصل بسيط كرة سطح ما ويكون فصلها فى بسيطها ا ب ج ، فأقول إن ا ب ج يحيط بدائرة ، برهانه فإن كان السطح الفاصل بسيط الكرة قد جاز على المركز فمن البين أن ا ب ج يحيط بدائرة من قبل أن كل واحد من الخطوط الخارجة منها إليه أعنى من مركز الكرة إلى الفصل متساوية وأن مركز الكرة أيضاً هو مركز الدائرة وأيضاً يجعل السطح الذى يقطع الكرة ليس يمر على المركز وتتوهم مركز الكرة نقطة د ونخرج من نقطة د إلى سطح ا ب ج عموداً ويكون د ه ويكون يلاقى السطح على نقطة ه ونخرج خطى ه ب ه ج كيف ما اتفق ونصل د ب د ج فمن قبل أن نقطة د فرضت مركز الكرة فمربع خط د ب مساوٍ لمربع خط د ج ومربع خط د ب مساوٍ لمربعى د ه ه ب لأن زاوية د ه ب قائمة ومربع خط د ج مساوٍ لمربعى خطى د ه ه ج لأن زاوية د ه ج قائمة فإذاً مربعا خطى د ه ه ج مساويان لمربعى خطى د ه ه ب وإذا أسقطنا مربع د ه المشترك يبقى مربع خط ه ب مساوياً لمربع خط ه ج فإذاً خط ج ه مساوٍ لخط ه ب وبمثل ذلك يتبين أن جميع الخطوط الخارجة من نقطة ه إلى ا ب ج مساوية لخط ب ه فإذاً ا ب ج يحيط بدائرة مركزها نقطة ه .

وهنالك استبان أن إذا أخرج من مركز الكرة إلى سطح الدائرة من الدوائر التى عليها خط مستقيم عمود عليها فإنه يقع على مركز تلك الدائرة .

---

3 فليكن] פליכון **MSS** *6* متساوية] מסתויה **MSS** *7* ونتوهم] ונתואהם **MSS** *8* نقطة [2]] נקדה **C**
8 عموداً] עמוד **MSS** *12* مربعا] מרבעי **MSS** *13* مساويان] מסאויה **MSS** *13* يبقى] יבקא **MSS**
14 مساوياً] מסאו **MSS** *14* يتبين] יתביין **F** *16* ه] אל ה **MSS** *17* التى] אלדי **MSS**

[٢] نريد أن نجد مركز كرة مفروضة .

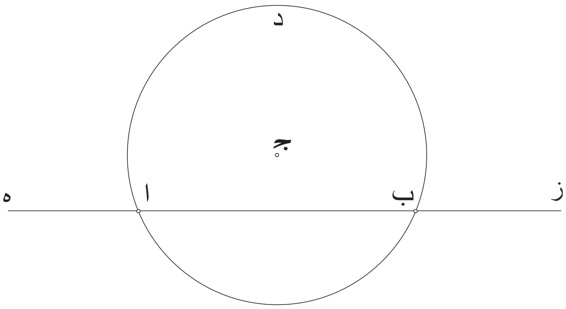


فلنتوهم الكرة المفروضة التى نريد أن نجد مركزها يفصلها سطح ما ففصله يكون دائرة ونفرض دائرة اب فإن كان السطح الفاصل قد جاز على مركز الكرة فمن بين أن مركز الدائرة هو مركز الكرة وقد علمنا كيف نجد مركز الدائرة وأيضاً فإنا نفرض أن السطح الفاصل ليس يجوز على مركز الكرة ونخرج مركز دائرة اب ويكون نقطة الـ جـ ونخرج من نقطة الـ جـ خطاً مستقيماً عموداً على سطح دائرة اب ونجوزه على بسيط الكرة فى الجنبين جميعاً ونعلم عند ما يلتقى بسيط الكرة علامتى د ه ونقسم خط ده بنصفين على نقطة الـ ز ، فأقول إن نقطة الـ ز هى مركز الكرة ، برهانه أنه لا يمكن غيره فإن أمكن فليكن مركز الكرة نقطة ح ونخرج من نقطة ح خطاً يكون عموداً على دائرة اب ونعلم موضع التقائه سطح اب نقطة الـ ط فإذاً نقطة الـ ط مركز دائرة اب وقد كان أيضاً علامة الـ جـ فرضت مركزها فإذاً ليست علامة الـ ح مركز الكرة وبمثل ذلك يتبين أن ليس يمكن أن يكون مركز الكرة نقطة أخرى غير نقطة الـ ز فإذاً نقطة الـ ز مركز الكرة ، وذلك ما أردنا أن نبين .

---

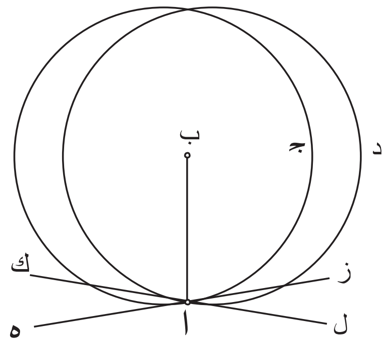
3 اب] אבג C

[٣] إذا ماست كرة سطحاً ما وليس يفصلها فإنها لا تماسه إلا على نقطة واحدة .



فإن أمكن أقول إنها تماس سطحاً على نقطتى ا ب ونخرج على نقطتى ا ب سطحاً يفصل الكرة ففصلها يكون إما فى بسيط الكرة فإنه يحيط بدائرة وإما فى السطح أعنى الفصل الذى يحدث فى السطح المماس فإنه خط مستقيم وتكون الدائرة التى فى بسيط الكرة دائرة ا د ب والخط الذى فى السطح هو خط ه ا ب ز فمن قبل أن السطح ليس يفصل الكرة لخط ه ا ب ز ليس يفصل دائرة ا د ب ومن قبل أنه قد فرض على محيط دائرة ا د ب نقطتان وهما نقطتا ا ب لخط ا ب يفصل الدائرة وقد بان أن ليس يفصلها فإذاً خط ه ا ب ز يفصل الدائرة ولا يفصلها فهذا خلف فإذاً الكرة ليس تماس لسطح أكثر من نقطة واحدة ، وذلك ما أردنا .

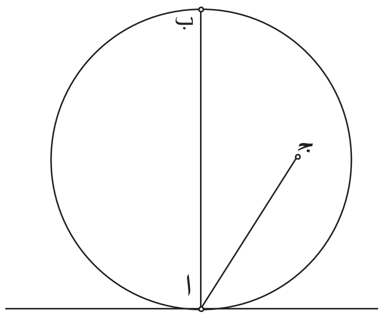
[٤] إذا ماست كرة سطحاً ما وليس يفصلها فإن الخط الخارج من مركز الكرة إلى نقطة المماسة يكون عموداً على السطح المماس .



6 لخط] כט פי C   *8* فإذاً] כאן *add.* C

مثال ذلك نتوهم كرة تماس سطحاً ما وليس يفصلها والماسة على نقطة آ ومركز الكرة نقطة ب ونصل نقطتى آ ب ، فأقول إن خط ب ا عمود على السطح المماس ، برهانه أنا نخرج على خط ا ب سطحاً واحداً يفصل الكرة وفصله إما فى بسيط الكرة فإنه يحيط بدائرة وإما فى السطح فإنه خط مستقيم ونفرض الدائرة دائرة ا جـ والخط المستقيم خط ه ا ز وأيضاً نخرج على خط ا ب سطحاً آخر يقطع الكرة وفصله أما فى بسيط الكرة فإنه يحيط بدائرة وأما فى السطح فإنه خط مستقيم ونفرض الدائرة دائرة ا د والخط المستقيم خط كا ل فمن قبل أن السطح يماس الكرة فخط ه ا ز يماس دائرة ا جـ ومن قبل أن خط ه ز يماس دائرة ا جـ على نقطة الـ آ وقد خرج من نقطة الـ آ إلى مركزها خط مستقيم وهو خط ا ب فخط ا ب عمود على خط ه ز وكذلك يتبين أن خط ا ب عمود على خط كا ل ومن قبل أن خط ا ب عمود على خطى ه ز كـ ل فإنه عمود على السطح الذى هما فيه والسطح الذى فيه خطا ه ز كـ ل هو السطح المماس للكرة فإذاً خط ا ب هو عمود على السطح المماس للكرة ، وذلك ما أردنا أن نبين .

[٥] إذا ماست كرة سطحاً وليس يفصلها وخرج من نقطة المماسة خط مستقيم عمود على السطح فإن مركز الكرة على ذلك الخط الخارج .

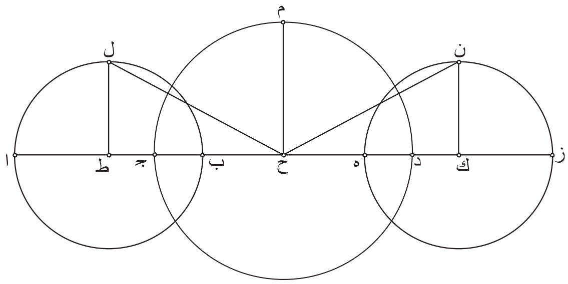


مثال ذلك نتوهم ‹أن› ماست كرة سطحاً ما وليس يفصلها وتكون نقطة المماسة على نقطة الـ آ ونخرج من نقطة الـ آ خطاً يكون عموداً على السطح المماس وهو خط

7–9 وأيضاً ... خط كال] *repet.* **F**   *10* ومن قبل ... دائرة اجـ] *repet. et del.* **F**   *12* خطى] כט **MSS**

اب ، فأقول إن مركز الكرة على خط اب ، برهانه أن ليس يمكن غيره فإن أمكن فليكن مركز الكرة نقطة ج ونصل خط جا فمن قبل أن الكرة قد ماست السطح وليس يفصلها على نقطة الـ ا وقد خرج من مركز الكرة إلى نقطة المماسة خط جا فخط جا عمود على السطح المماس فإذا قد خرج من نقطة واحدة وهى نقطة الـ ا خطان فى جهة واحدة هما عمودان على سطح واحد وهما خطا اب اج وذلك غير ممكن ، وذلك ما أردنا أن نبين .

[٦] الدوائر التى على الكرة ما كان منها على مركز الكرة هى دوائر عظام وما كان منها على غير مركز الكرة فما كان بعدها من المركز بعداً واحداً متساوياً فإنها متساوية وما كان منها أكثر بعداً من المركز فإنها أصغر .



مثاله أنا نفرض دوائر اب جد هز ولتكن دائرة جد جائزة على مركز الكرة ودائرتا اب هز غير جائزتين عليه وليكن بعدهما من المركز سواء ، فأقول إن دائرة جد عظيمة ، برهانه أنا نفرض مركز الكرة نقطة ح فإذاً نقطة ح مركز دائرة جد أيضاً ونخرج من نقطة الـ ح إلى سطح دائرتى اب هز خطين يكونان عمودين على اثنيهما وهما حط حك ونقطة ط فى سطح دائرة اب ونقطة ك فى سطح دائرة هز وتكون نقطتا ط ك مركزى دائرتى اب هز ونخرج من نقط ط ح ك إلى محيط دوائر اب جد هز خطوط طل حم كن ونصل حل حن فمن قبل أن حط عمود على سطح دائرة اب فإنه عمود على جميع الخطوط التى تماسه فى ذلك السطح وتحيط معه بزاوية قائمة والخط الذى يماسه فى هذا السطح هو خط طل فإذاً زاوية لطح قائمة وبمثل ذلك يتبين أن زاوية حكن قائمة وأيضاً من قبل أن زاوية لطح

قائمة فإنها أعظم من زاوية لحط فإذاً خط لح أعظم من خط لط لكن خط لح مساوٍ لخط حم من قبل أن نقطة ح مركز الكرة وقد خرج منها إلى بسيط الكرة خطا حل حم فإذاً خط حم أعظم من خط لط وخط حم قد خرج من مركز دائرة جد إلى محيطها و طل خرج من مركز دائرة اب إلى محيطها فإذاً دائرة جد أعظم من دائرة الب وبمثل ذلك يتبين أن دائرة دج أعظم من دائرة هز ومن كل دائرة تخط على الكرة ،

وأيضاً نفرض أن دائرتى اب هز بعدهما من مركز الكرة بعد واحد أعنى أن خط حط مساوٍ لخط حك ، فأقول إن الدائرتين متساويتان ، برهانه فمن قبل أن نقطة ح مركز الكرة يكون خط حل مساوٍ لخط حن فإذاً مربع حل مساوٍ لمربع حن لكن مربع حل مساوٍ لمربعى حط طل ومربع حن مساوٍ لمربعى نك كح وقد كان تبين أن مربع حط مساوٍ لمربع كح فمربع طل الباقى مساوٍ لمربع كن الباقى فخط طل مساوٍ لخط كن وخط طل أخرج من مركز دائرة اب إلى محيطها وخط كن أخرج من مركز دائرة هز إلى محيطها فإذاً الخط الخارج من مركز دائرة اب إلى محيطها مساوٍ للخط الخارج من مركز دائرة هز إلى محيطها فإذاً دائرة اب مساوية لدائرة هز .

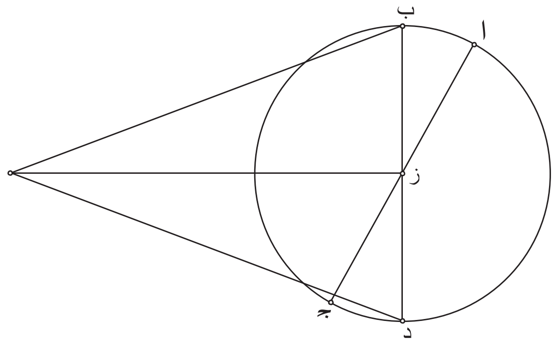
ونفرض أيضاً دائرة اب أبعد من مركز الكرة من دائرة هز ، فأقول إن دائرة اب أصغر من دائرة هز ، برهانه أن من قبل أن دائرة اب بعدها من مركز الكرة أكثر من دائرة هز فحط أعظم من حك وأيضاً من قبل أن خط حل مساوٍ لخط حن فمربع حل مساوٍ لمربع حن ومربع حن مساوٍ لمربعى نك كح ومربع حل مساوٍ لمربعى لط طح فمربعا نك كح مساويان لمربعى حط طل ومربع حط أعظم من مربع حك فمربع لط الباقى أصغر من مربع نك الباقى فخط لط أصغر من خط كن وخط طل قد خرج من مركز دائرة اب إلى محيطها <وخط كن قد خرج من مركز دائرة هز إلى محيطها> فإذاً دائرة اب أصغر من دائرة هز فإذاً الدوائر التى على الكرة ما كان منها على مركز الكرة فهى عظام وما ليست على مركز الكرة فما كان منها

---

14 فإنها ... لحط] *om.* **C**   *14* لحط] לטח **F**   *16* خطا] כט **MSS**   *25–26* وخط كن ... محيطها[1]] *om.* **F**   *28–29* فأقول ... دائرة هز] *om.* **F**

بعدها من المركز بعداً سواء فهى متساوية وما كان بعدها أكثر فهى أصغر ، وذلك ما أردنا أن نبين .

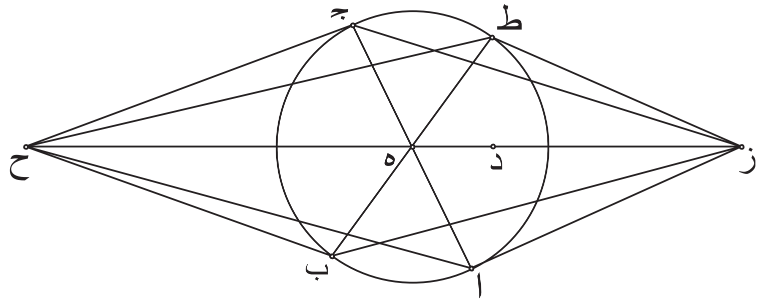
[v] إذا كانت دائرة على كرة وأخرج من مركز الكرة إلى مركز الدائرة خط مستقيم يصل فيما بينهما فذلك الخط عمود على سطح الدائرة .



مثال ذلك أن نفرض الدائرة على الكرة وهى دائرة ا ب ج د ومركز الكرة نقطة الـ ه ومركز الدائرة نقطة ز ونصل نقطتى ز ه ، فأقول إن خط ه ز عمود قائم على سطح دائرة ا ب ج د ، برهانه أنا نخرج خطين يمران على مركز الدائرة وهما خطا ا ز ج ب ز د ونصل ه ب ه د فمن قبل أن خط ز د مساوٍ لخط ز ب و ز ه مشترك يكون خطا ز ب ز ه مساويين لخطى د ز ز ه كل واحد لنظيره وقاعدة ه ب مساوية لقاعدة ه د فإذاً زاوية ب ز ه مساوية لزاوية د ز ه وإذا قام خط مستقيم على خط مستقيم وكانت الزاويتان اللتان عن جانبه متساويتين فكل واحدة منهما قائمة والخط القائم على الخط يسمى العمود على الخط الذى هو قائم عليه فخط ه ز عمود على خط ب د وبمثل ذلك يتبين أنه عمود على خط ا ج ومن قبل أن خط ه ز عمود على خطى ا ج ب د المتقاطعة وخروجه من نقطة تقاطعهما فخط ه ز عمود على السطح الذى فيه خطا ا ج ب د متقاطعان والسطح الذى فيه خطا ا ج ب د هى دائرة ا ب ج د فإذاً خط ه ز عمود على دائرة ا ب ج د ، وذلك ما أردنا أن نبين .

13–14 فإذاً ... ا ب ج د] *om.* **C**

[٨] إذا كانت دائرة على كرة وأخرج من مركز الكرة إلى سطح الدائرة عمود ومر فى الجنبين جميعاً إلى بسيط الكرة فإنه يقع على قطبى تلك الدائرة .



مثال ذلك أنا نفرض دائرة على كرة وهى دائرة ا ب ج ونفرض مركز الكرة على نقطة د ونخرج من نقطة د خطاً على سطح دائرة ا ب ج عموداً وهو خط د ه وتكون نقطة الـ ه مركز الدائرة ونخرج خط د ه فى الجهتين جميعاً ونعلم موضع التقائه بسيط الكرة نقطتى ز ح ، فأقول إن نقطتى ز ح هما قطبا دائرة ا ب ج ، برهانه أنا نخرج خطى ا ه ج ب ه ط ونصل ا ز ز ج ب ز ز ط ب ح ح ط ا ح ح ج فمن قبل أن خط ه ز قائم على سطح دائرة ا ب ج ويحيط مع جميع الخطوط التى فى سطحها بزاوية قائمة فإذاً كل واحدة من زوايا ز ه ا ز ه ج ز ه ب ز ه ط قائمة وأيضاً من قبل أن خط ا ه مساوٍ لخط ه ج وخط ه ز قائم عليهما على زاوية قائمة مشترك لهما فقاعدة ا ز مساوية لقاعدة ز ج وبمثل ذلك يتبين أن كل الخطوط الخارجة من نقطة ز إلى دائرة ا ب ج متساوية فإذاً نقطة ز قطب دائرة ا ب ج وبمثل ذلك نبين أن ح قطب دائرة ا ب ج ، وذلك ما أردنا أن نبين .

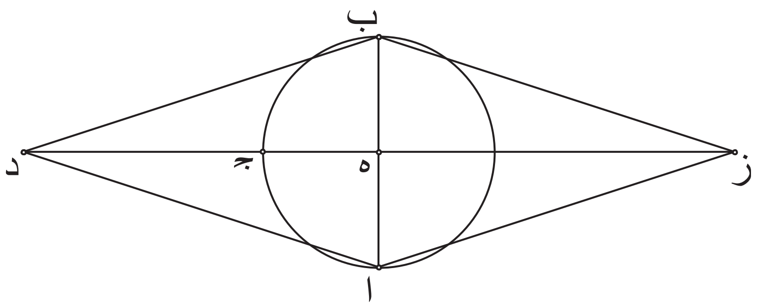
[٩] إذا كانت دائرة على كرة وأخرج من واحد قطبيها خط إلى مركز الدائرة كان ذلك الخط عموداً عليها .

والعمل فى بيان ذلك الشكل كالعمل فى بيان الشكل الذى قبل ذلك ، وذلك ما أردنا أن نبين .

---

9 ز ه ب] זאב C

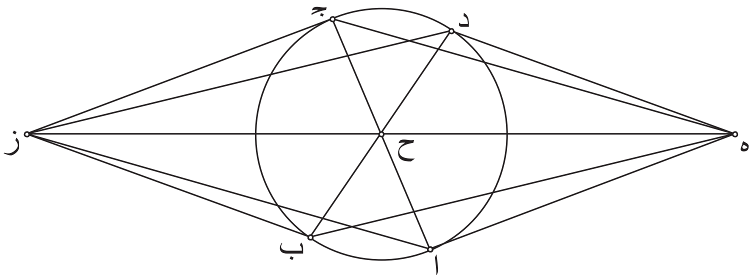
[١٠] إذا كانت دائرة على كرة وأخرج من أحد قطبيها خط مستقيم عمود عليها فإنه يقع على مركزها وإن أخرج الخط إلى جهته الأخرى فإنه يقع على قطبها الآخر .



مثال ذلك أنا نفرض دائرة على كرة وهى دائرة ا ب ج ونخرج من أحد قطبيها وهو نقطة د إلى سطحها عموداً وهو خط د ه ونفرض التقاءه لسطح الدائرة على نقطة ه ونخرج خط د ه فى الجهة الأخرى إلى بسيط الكرة ويكون التقاؤه لبسيط الكرة على نقطة ز ، فأقول إن نقطة ه مركز دائرة ا ب ج و ز قطبها الآخر ، برهانه أنا نخرج من نقطة ه خطى ه ا ه ب ونصل ا د د ب ا ز ز ب فمن قبل أن خط د ه قائم على سطح دائرة ا ب ج ويتصل به خطا ا ه ه ب فإذاً مربعا ا ه ه د مساويان لمربعى د ه ه ب وإذا أسقطنا مربع د ه المشترك يبقى مربع ا ه مساوياً لمربع ه ب الباقى فخط ا ه مساوٍ لخط ه ب وبمثل ذلك يتبين أن الخطوط الخارجة من نقطة ه إلى محيط دائرة ا ب ج متساوية فنقطة ه مركز دائرة ا ب ج ،

وأقول إن نقطة ز قطب دائرة ا ب ج الآخر ، برهانه من قبل أن خط ا ه مساوٍ لخط ه ب وخط ه ز عمود قائم عليهما مشترك لهما فقاعدة ا ز مساوية لقاعدة ز ب وبمثل ذلك يتبين أن الخطوط الخارجة من نقطة ز إلى دائرة ا ب ج متساوية فنقطة ز هو قطب دائرة ا ب ج الآخر وقد تبين أن نقطة ه مركز دائرة ا ب ج فنقطة ه مركز الدائرة ونقطة ز قطبها الآخر ، وذلك ما أردنا أن نبين .

[١١] إذا كانت دائرة على كرة وأجيز على قطبيها خط مستقيم فإن ذلك الخط يكون عموداً عليها ويمر على مركزها ومركز الكرة .



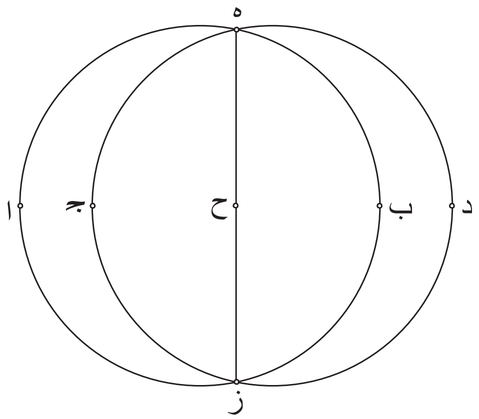
مثال ذلك نفرض دائرة على الكرة وهى دائرة ا ب جد وقطباها ه ز ونصل نقطتى ه ز ، فأقول إن خط ه ز عمود على سطح دائرة ا ب جد ويمر على مركزها ومركز الكرة ، برهانه أنا نفرض خط ه ز قد لاقى سطح دائرة ا ب جد على نقطة ح ونخرج خطى ا ح جـ ب ح د ونصل خطوط د ه د ز ب ز ب ه فمن قبل أن خط ب ه مساوٍ لخط ه د وخط ه ز مشترك فخطا ه ب ه ز مساويان لخطى ز ه ه د كل واحد لنظيره وقاعدة ب ز مساوية لقاعدة ز د فزاوية ب ه ز مساوية لزاوية د ه ز وأيضاً فمن قبل أن خط ب ه مساوٍ لخط ه د وخط ه ح مشترك فخطا ب ه ه ح مساويان لخطى د ه ه ح كل واحد لنظيره وزاوية ب ه ح مساوية لزاوية د ه ح فقاعدة ب ح مساوية لقاعدة د ح ومثلث ب ه ح مساوٍ لمثلث د ه ح وبقية الزوايا مساوية لبقية الزوايا التى توترها الأضلاع المتساوية فإذاً زاوية د ح ه مساوية لزاوية ب ح ه فـ ه ح عمود على ب د وبمثل ذلك يتبين أنه عمود على خط ا جـ فإذاً هو عمود على خطى د ب ا جـ وإذا كان خط عموداً على خطين فى سطح واحد فإنه عمود على ذلك السطح ،

وأقول إنه يمر على مركز دائرة ا ب جد وعلى مركز الكرة جميعاً ، برهانه فمن قبل أن على الكرة دائرة ا ب جد وقد خرج من نقطة ه الذى هو أحد قطبيها إليها عمود ه ح فإنه يجوز على مركز دائرة ا ب جد ، وأقول أيضاً إنه يجوز على مركز الكرة ، برهانه فمن قبل أن على الكرة دائرة ا ب جد وقد قام على سطحها من نقطة مركزها عمود ه ح فمركز الكرة على خط ه ح فخط ه ز يجوز على مركز الكرة فقد تبين أن خط ه ح ز قائم على دائرة ا ب جد ويجوز على مركزها ومركز الكرة ، وذلك ما أردنا أن نبين .

---

11 الزوايا] الزاوية **MSS**, *hic et saepius* *12* د ح ه] דהח **F** *13* خطى] טכ **C** *14* واحد] فإنه عمود على خطين فى سطح واحد *false add.* **F**

[١٢] إذا كانت على كرة دوائر عظام فإنها تنفصل بنصفين .

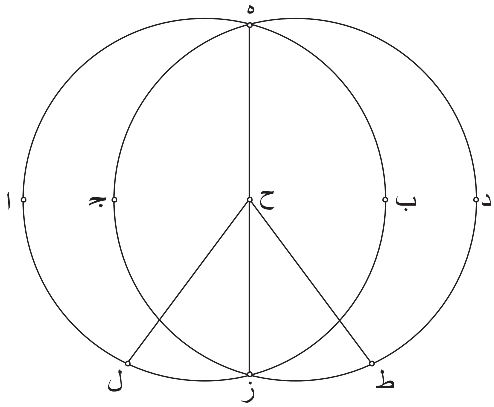


مثال ذلك أنا نفرض على الكرة دوائر عظاماً وهما دائرتا اب جد تنفصل على نقطتى ه ز ، فأقول إن دائرتى اب جد تنفصل بنصفين ، برهانه أنا نفرض مركزهما على نقطة ح فنقطة ح مركز الكرة ونصل خطى ه ح ح ز فمن قبل أن نقط ه ح ز فى سطحى دائرتى اب جد فنقط ه ح ز على الخط المشترك للسطحين الذى تتقاطع عليه والفصل المشترك للسطحين هو خط مستقيم فخط ه ز مستقيم ومن قبل أن نقطة ح هو مركز دائرة اب فخط ه ح ز قطرها فإذاً كل واحدة من قوسى ه ا ز ز ب ه نصف دائرة وكذلك من قبل أن نقطة ح هو مركز دائرة جد فخط ه ح ز قطرها وكل واحدة من قوسى ز جه ه د ز نصف دائرة فإذاً دائرتا اب جد تتقاطع بنصفين ، وذلك ما أردنا أن نبين .

[١٣] إذا كانت على كرة ما دوائر تنفصل بنصفين فإنها عظام .

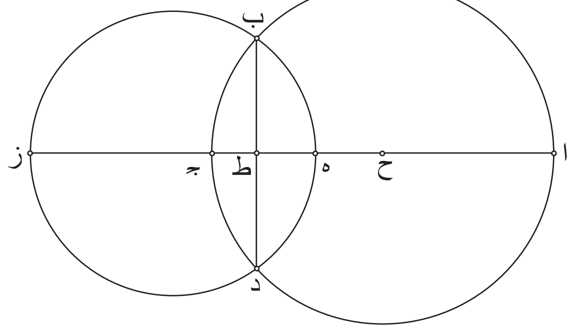
مثال ذلك أن نفرض دائرتى اب جد تنفصل على كرة بنصفين على نقطتى ه ز ، فأقول إن دائرتى اب جد عظام ، برهانه أنا نفرض فصلهما المشترك خط ه ز فخط ه ز هو قطر دائرتى اب جد ونقسم خط ه ز بنصفين على نقطة ح تكون نقطة ح مركز الدائرتين ، وأقول إن نقطة ح مركز الكرة ونخرج من نقطة الـ ح عموداً على

1 عظام (Prop. 13)] *marg.* **F**



سطح دائرة جد ونفرضه خط حط ونخرج من نقطة ح أيضاً عموداً على سطح دائرة اب ونفرضه خط حل فمن قبل أن على الكرة دائرة جد وقد خرج من مركزها عمود على سطحها وهو خط حط فمركز الكرة على خط حط وبمثل ذلك يتبين أن مركز الكرة على خط حل فنقطة تقاطع خطى حل حط هو مركز الكرة لكن تقاطعهما هو نقطة ح فنقطة ح هو مركز الكرة والدوائر التى فى الكرة ما كان منها على مركز الكرة هما عظام فدائرتا اب جد دوائر عظام ، وذلك ما أردنا أن نبين .

[١٤] إذا كانت على كرة دائرة عظيمة وفصلت دائرة أخرى على الكرة على زوايا قائمة فإنها تفصلها بنصفين وتجوز على قطبيها .

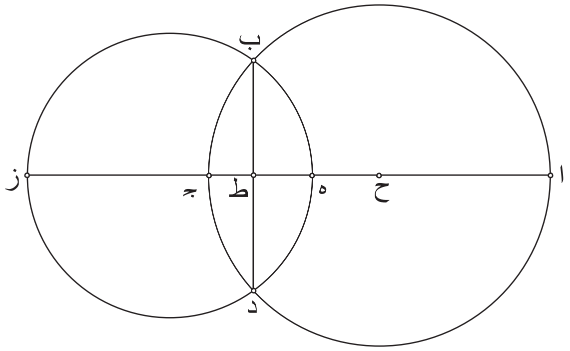


مثال ذلك أنا نفرض دائرة عظيمة على كرة وهى دائرة ابجد تفصل دائرة أخرى على الكرة على زوايا قائمة وهى دائرة بهدز ، فأقول إنها تفصلها بنصفين وتمر

1 أخرى] אלדי *add.* **MSS** *2* وتجوز] ותמר **C** *3* أخرى] אלדי *add.* **MSS**

على قطبيها ، برهانه أنا نصل فصلهما المشترك بخط ب د ونفرض مركز دائرة ا ب جـ د نقطة الـ ح فتكون نقطة الـ ح مركز الكرة ونخرج من نقطة الـ ح إلى خط ب د خطاً يكون عموداً على ب د ونفرضه خط ح ط ويجوزه فى الجهتين جميعاً ونعلم فى الموضع الذى يلاقى بسيط الكرة علامتى ا جـ ، فمن قبل أن سطح دائرتى ا ب جـ د ه ب ز د أحدهما قائم على الآخر وقد قام على فصلهما المشترك لهما الذى هو خط ب د عمود ح ط وهو فى سطح دائرة ا ب جـ د فخط ا جـ عمود على سطح دائرة ه ب ز د وقد أخرج من مركز الكرة إلى سطح الدائرة عمود ح ط ولاقى سطح دائرة ه ب ز د وهو على خط ب د فخط ب د قطرها فكل واحدة من قوسى ب ه د ب ز د نصف دائرة فدائرة ا ب جـ د تقطع دائرة ه ب ز د بنصفين ، وأقول إنها تجوز على قطبيها ، برهانه فمن قبل أن على الكرة دائرة ه ب ز د وقد أخرج من مركز الكرة إلى سطحها عمود ح ط وجاز فى الجهتين جميعاً فإنه يقع على قطبى الدائرة فنقطتا ا جـ هما قطبا دائرة ه ب ز د وقد كان تبين أنها قطعتها بنصفين فدائرة ا ب جـ د تقطع دائرة ه ب ز د بنصفين وتجوز على قطبيها ، وذلك ما أردنا أن نبين .

[١٥] إذا كانت على كرة دائرة عظيمة تقطع دائرة أخرى على الكرة غير عظيمة بنصفين فإنما تقطعها على زوايا قائمة وتجوز على قطبيها .



مثال ذلك أنا نفرض دائرة عظيمة على كرة وهى دائرة ا ب جـ د تقطع دائرة أخرى على الكرة غير عظيمة وهى دائرة ه ب ز د بنصفين ، فأقول إنها تقطعها على زوايا

7 خطاً] *om.* **C**   11 وقد أخرج ... دائرة ه ب ز د] *marg.* **C**; *in textu false habet:* وأيضاً فمن قبل أن على الكرة دائرة ه ب ز د **C**   *1* أخرى] אלדי *add.* **MSS**   *3* أخرى] אלדי *add.* **MSS**

قائمة وتجوز على قطبيها ، برهانه أنا نفرض فصلهما المشترك لهما خط ب د فمن قبل أن دائرة ا ب ج د تقطع دائرة ه ب ز د بنصفين فكل واحدة من قوسى ب ه د ب ز د نصف دائرة ب ز د ه ونقسم خط ب د بنصفين على نقطة ط فنقطة ط مركز دائرة ه ب ز د ومركز دائرة ا ب ج د نقطة ح فنقطة ح مركز الكرة ونصل نقطتى ح ط بخط ح ط ونخرجه فى الجهتين جميعاً ونعلم موضع التقائه بسيط الكرة نقطتى ا ج فمن قبل أن على الكرة دائرة ه ب ز د وقد أخرج من مركز الكرة إلى مركزها خط ح ط فخط ح ط عمود على سطح دائرة ه ب ز د فإذاً السطوح الخارجة على خط ح ط قائمة على دائرة ه ب ز د وسطح دائرة ا ب ج د هو أحد السطوح الخارجة على خط ح ط فدائرة ا ب ج د قائمة على دائرة ب ز د ه فدائرة ا ب ج د تقطع دائرة ه ب ز د على زوايا قائمة ،

وأقول إنها تجوز على قطبيها ، برهانه فمن قبل أن على الكرة دائرة ه ب ز د وقد أخرج من مركز الكرة إلى سطحها عمود ح ط وجاز فى الجهتين معاً إلى بسيط الكرة ولاقى بسيط الكرة على نقطتى ا ج فنقطتا ا ج هما قطبا دائرة ه ب ز د لكن نقطتى ا ج هما على محيط دائرة ا ب ج د فدائرة ا ب ج د تجوز على قطبى دائرة ه ب ز د وقد تبين أنها تقطعها على زوايا قائمة فدائرة ا ب ج د تقطع دائرة ه ب ز د على زوايا قائمة وتجوز على قطبيها ، وذلك ما أردنا أن نبين .

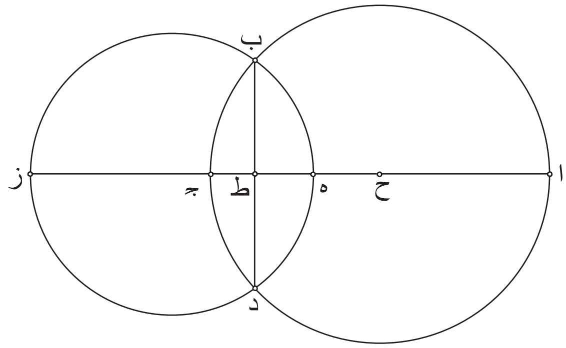
[١٦] إذا كانت على كرة دائرة عظيمة تفصل دائرة أخرى على الكرة وتمر على قطبيها فإنها تفصلها بنصفين وعلى زاوية قائمة .

مثال ذلك أنا نفرض دائرة عظيمة على كرة وهى دائرة ا ب ج د تقطع دائرة أخرى على الكرة غير عظيمة وهى دائرة ه ب ز د وتمر على قطبيها ، فأقول إنها تقطعها بنصفين وعلى زاوية قائمة ، برهانه أنا نفرض قطبى دائرة ه ب ز د نقطتى ا ج وهو ظاهر أن نقطتى ا ج على دائرة ا ب ج د من قبل أن دائرة ا ب ج د تقطع دائرة ه ب ز د وتجوز على قطبيها ونصل ا ج فمن قبل أن على الكرة دائرة ه ب ز د وقد

---

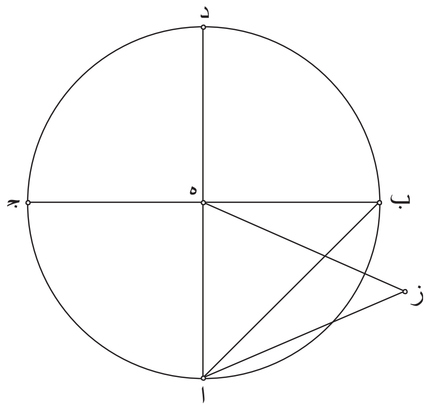
13 فدائرة ا ب ج د ... ب ز د ه] *om.* **C**   *1* أخرى] אלדי *add.* **MSS**   *3* أخرى] אלדי *add.* **MSS**

6 من قبل ... ا ب ج د] *marg.* **C**



وصل فيما بين قطبيها خط اج وإذا كانت دائرة على كرة فإن الخط الذى يصل بين قطبيها هو عمود عليها وهو يجوز على مركزها ومركز الكرة لخط اج هو على سطح دائرة ه ب ز د على زاوية قائمة وأحد السطوح المخرجة على خط اج هو سطح دائرة ا ب ج د فدائرة ا ب ج د قائمة على دائرة ب ز د ه وتقطعها بنصفين من قبل أنها تقطعها على زاوية قائمة فدائرة ه ب ز د تتقاطع بنصفين وقد تبين أنها تقطعها على زاوية قائمة ، وذلك ما أردنا أن نبين .

[١٧] إذا كانت دائرة عظيمة على كرة فالخط الخارج من قطبها إلى محيطها مساوٍ لضلع المربع المخطوط فيها .



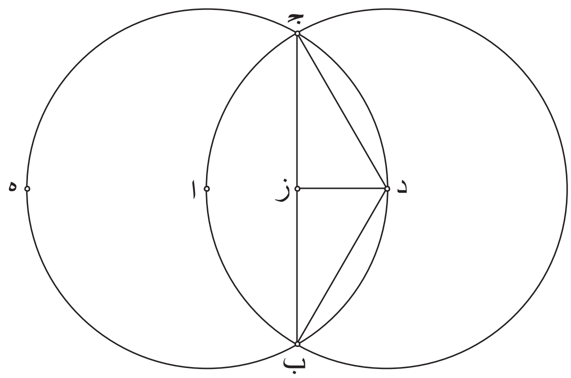
مثال ذلك أنا نفرض دائرة عظيمة على كرة وهى دائرة ا ب ج د ، فأقول إن الخط الخارج من قطبها إلى محيطها مساوٍ لضلع المربع المخطوط فيها ، فلنخرج لدائرة

3–4 مثال ذلك . . . فيها] *repet. et del.* **F**

ا ب جد قطرين يتقاطعان على زاوية قائمة وهما خطا اد جب فمن قبل أن دائرة ا ب جد عظيمة يكون مركزها مركز الكرة وأيضاً فإنا نصل فيما بين قطبها ومركزها خطاً يكون عموداً على سطح دائرة ا ب جد ونفرضه ه ز وتكون نقطة الـ ز على بسيط الكرة قطب دائرة ا ب جد ونصل ز ا ا ب ويكون خط ا ب ضلع المربع المرسوم فى دائرة ا ب جد و ز ا الخط الخارج من قطبها إلى محيطها ،

فأقول إن خط ز ا مساوٍ لخط ا ب ، برهانه أن خط ز ه عمود قائم على سطح دائرة ا ب جد على زاوية قائمة فإنه عمود على جميع الخطوط المخرجة منها فى السطح ويحيطان معها بزاوية قائمة فإذاً خط ه ز عمود على كل واحد من خطى ه ب ه ا ومن قبل أن نقطة ه مركز الكرة يكون خط ه ب مساوياً لخط ه ز وخط ه ا مشترك فخطا ه ا ه ب مساويان لخطى ه ا ه ز كل واحد لنظيره وزاوية ب ه ا قائمة ومساوية لزاوية ا ه ز القائمة فقاعدة ا ب مساوية لقاعدة ا ز لكن ا ز هو الخط الخارج من قطب دائرة ا ب جد إلى محيطها و ا ب ضلع المربع المخطوط فيها فإذاً الخط الخارج من قطب دائرة ا ب جد إلى محيطها مساوٍ لضلع المربع المخطوط فيها ، وذلك ما أردنا أن نبين .

[١٨] إذا كانت دائرة على كرة وكان الخط الخارج من قطبها إلى محيطها مساوياً لضلع المربع المخطوط فيها فتلك الدائرة هى عظيمة .



مثال ذلك أن نفرض دائرة ا ب جـ ويكون قطبها على نقطة د ويكون الخط الخارج من قطبها إلى محيطها خط د جـ ويكون خط د جـ مساوياً لضلع المربع المخطوط فيها،

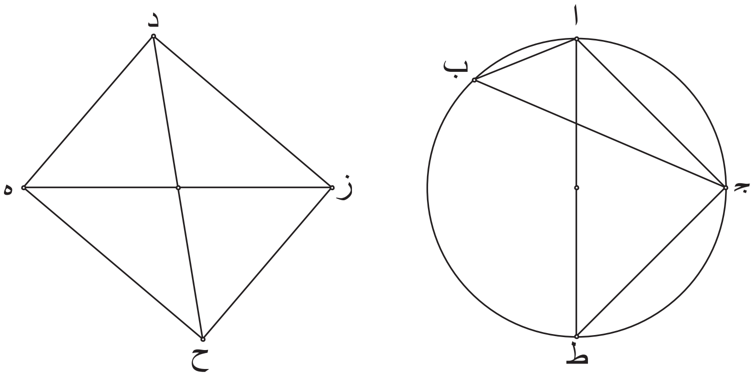
7 ه ز] *illeg.* **C**   8 ز ا] זוה **C**

فأقول إن دائرة ا ب ج عظيمة ، برهانه أنا نفرض على خط د ج وعلى مركز الكرة سطحاً يفصل الكرة وفصله يكون فى بسيط الكرة دائرة عظيمة ونفرض فصله دائرة ج د ب ه ويكون فصلهما المشترك على خط ج ب ونصل خط د ب ويكون خط د ب مساوياً لخط د ج فمن قبل أن خط د ب مساوٍ لخط د ج وخط د ج ضلع المربع فكل واحد من خطى د ب د ج ضلع مربع ونخرج من نقطة د خطاً يمر بمركز الكرة ويلتقى بخط ب ج على نقطة ز على زاويتين قائمتين وكل خط يمر بمركز الكرة وبقطبى الدائرة فإنه يكون عموداً على سطح الدائرة فخط ز ا عمود على سطح دائرة ا ب ج وخط ج ب* فى هذا السطح فخط ب ز+ د ز عمود على خط ج ب و ب د ضلع المربع يكون مربع ضعف مربع ب ز ومربعا ب ز ز د مساويان لمربع ب د فمربع ب ز مثل مربع ز د فخط ب ز إذاً مساوٍ لخط ز د فزاوية ب د ج قائمة فقوس ب د ج نصف دائرة وخط ب ج قطر دائرة ب ه ج د فإذاً دائرة ا ب ج تفصل دائرة ب ه ج د بنصفين ومن قبل أن على الكرة دائرة عظيمة وهى دائرة د ج ه ب تفصل دائرة أخرى على الكرة وهى دائرة ا ب ج وتمر على قطبيها فإنها تفصلها بنصفين والدوائر التى تفصل إحداهما الأخرى بنصفين فإنها كلها عظام ، وذلك ما أردنا أن نبين .

[١٩] نريد أن نجد قطر دائرة مفروضة على كرة .

فلتكن الدائرة المفروضة على كرة دائرة ا ب ج ونريد أن نجد قطرها فلنتعلم على محيط دائرة ا ب ج ثلاث نقط كيف ما اتفق وهى نقط ا ب ج ونعمل مثلث د ه ز من ثلاث خطوط خط د ه مساوٍ للخط الذى يصل بين نقطتى ا ب وخط د ز مساوٍ للخط الذى يصل بين نقطتى ا ج وخط ه ز مساوٍ للخط الذى يصل بين نقطتى ج ب ونتوهم نقط ا ج ب قد وصلت فيما بينها خطوط مستقيمة ونخرج من نقطتى ه ز على خطى د ز د ه عمودين يلتقيان على نقطة ح ، فأقول إن خط د ح مساوٍ

9 خطى] **כטוט** **MSS** *11–12* خط جب ... فخط زا] *om.* **F** *12* *] *verbum illeg.* *12* +] *verbum illeg.* *13* مربع [1]] **מרבעי F, מרבעה C** *13* ومربعا] **ומרבע MSS** *14* مساويان لمربع] **מסאויה למרבע F, למרבעי... C** *15–16* فإذاً ... بنصفين] *om.* **F**

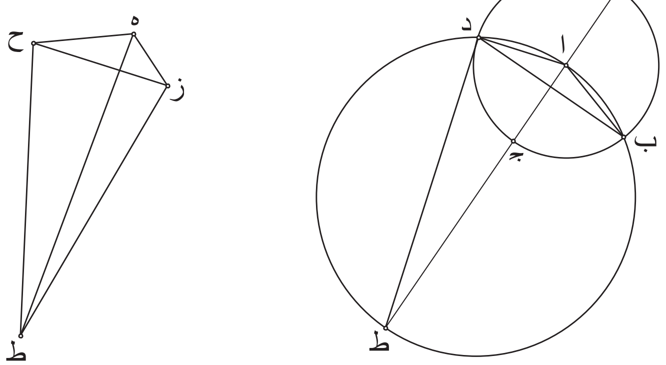


لقطر دائرة ا ب ج ، برهانه نتوهم قطر دائرة ا ب ج خط ا ط ونصل خطوط ا ب ب ج ا ج ج ط فمن قبل أن كل خطى ا ب ب ج مساوٍ لخطى د ه ه ز كل واحد منهما لنظيره وقاعدة ا ج مساوية لقاعدة د ز فزاوية ا ب ج مساوية لزاوية د ه ز وزاوية ا ب ج مساوية لزاوية ا ط ج من أجل أن الزاويتين على قطعة واحدة من الدائرة وهى قطعة ا ج فزاوية د ه ز مساوية لزاوية د ح ز من قبل أن زاويتى د ز ح د ه ح قائمتان فنقط د ه ز ح تجوز فيها دائرة فزاوية ا ط ج مساوية لزاوية د ح ز وزاوية د ز ح القائمة مساوية لزاوية ا ج ط القائمة فمثلثا ا ط ج د ح ز زاويتان من أحدهما وهما زاويتا ا ط ج ا ج ط مساويتان لزاويتين من الآخر وهما د ح ز ح ز د كل واحدة لنظيرها وضلع أحدهما وهو ا ج مساوٍ لضلع من الآخر وهو د ز وهما الضلعان الموتران لزاويتين متساويتين فالباقى من الأضلاع من الواحد من المثلثين مساوٍ للباقى من الأضلاع من المثلث الآخر فإذاً خط ا ط مساوٍ لخط د ح وخط ا ط هو قطر دائرة ا ب ج فخط د ح مساوٍ لقطر دائرة ا ب ج ، وذلك ما أردنا أن نبين .

[٢٠] نريد أن نجد قطر كرة مفروضة .

فلنتوهم الكرة التى نريد أن نجد قطرها كرة ا ب د وندير على مركز ا وببعد ا ب دائرة ب ج د ونصل خط ز ح مساوياً لقطر دائرة ب ج د ونعمل مثلثاً يكون ضلعان من أضلاعه مساويين للخطين اللذين يصلان فيما بين نقط ا ب ا د وهما الخطان

12 د ح ز] דהז F — 14 ا ج ط] אטג C — 17 الموتران] יתראן C, יוותראן? F
17 لزاويتين متساويتين] זאויתאן מסתויתאן MSS

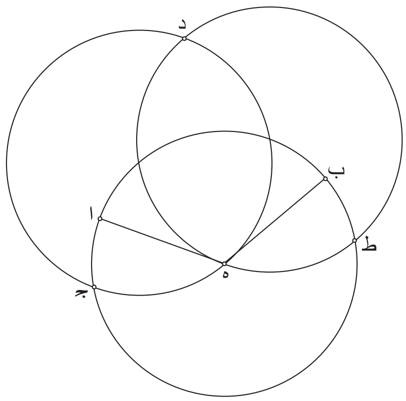


الخارجان من قطب دائرة بجد إلى محيطها والآخر مساوٍ لقطرها ونفرضه مثلث ه زح ونفرض الخطين اللذين كل واحد منهما مساوٍ للخط الذى من القطب إلى المحيط ضلعى ه ز ه ح فالخط إذاً المساوى للقطر هو خط زح ونخرج من نقطتى ز ح خطى زط حط عمودين على خطى ه ز ه ح ونصل خط ه ط ،

فأقول إن خط ه ط مساوٍ لقطر الكرة ، برهانه أن نتوهم قطر الكرة خط اط ونخرج على خط اط سطحاً يفصل الكرة ويكون فصله فى بسيط الكرة دائرة عظيمة ونفرضها دائرة ادطب ونصل بد دط و بد هو قطر دائرة ابجد المساوى لخط زح فمن قبل أن خطى اب بد مساويان لخطى ه ز زح كل واحد لنظيره وقاعدة اد مساوية لقاعدة ه ح فزاوية ابد مساوية لزاوية ه زح ولكن زاوية ابد مساوية لزاوية اطد فزاوية ه زح مساوية لزاوية ه طح وزاوية ادط القائمة مساوية لزاوية ه ح ط القائمة ويكوّن مثلثا اطد و ه طح زاويتين من أحدهما وهما زاويتا ادط دطا مساويتان لزاويتين من المثلث الآخر وهما زاويتا ه طح طح ه كل واحدة لنظيرها وضلع أحدهما وهو اد مساوٍ لضلع من الآخر وهو خط ه ح وهما الضلعان هما موتران زاويتين متساويتين فإذاً الباقى من الأضلاع من الواحد من المثلثين مساوٍ للباقى من الأضلاع من المثلث الآخر كل واحد لنظيره فخط اط مساوٍ لخط ه ط وخط اط فرض قطر الكرة فخط ه ط مساوٍ لقطر الكرة المفروضة ، وذلك ما أردنا أن نبين .

18–19 من الواحد ... الأضلاع] *om.* **C**

[٢١] نريد أن نخط دائرة عظيمة على نقطتين معلومتين على بسيط الكرة .

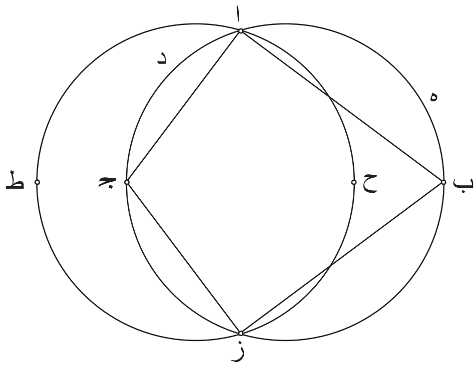


فلتكن النقطتان المعلومتان نقطتى ا ب ونريد <أن> نخط على نقطتى ا ب دائرة عظيمة ، فأقول إن كانت نقطتا ا ب واحدة منهما مقابلة للأخرى على قطبى الكرة فمن البين أن تجوز عليهما دوائر عظام بلا نهاية فى الكرة ونفرض نقطتى ا ب فى طرف الكرة ونخط على مركز ا وببعد ضلع المربع المخطوط فى دائرة عظيمة واقعة فى الكرة دائرة ه ج د فدائرة ه ج د عظيمة وأيضاً نخط على قطب ب وببعد ضلع المربع المخطوط فى دائرة عظيمة واقعة فى الكرة دائرة ه ط د فدائرة ه ط د أيضاً عظيمة من قبل أن الخط الخارج من قطبها إلى محيطها مساوٍ لضلع المربع المخطوط فى دائرة عظيمة واقعة فى الكرة ونخرج من نقطة ه إلى نقطتى ا ب خطى ه ا ه ب ويكون كل واحد من خطى ه ا ه ب مساوياً لضلع المربع الواقع فى دائرة عظيمة تقع فى الكرة فإذاً الدائرة المخطوطة على قطب ه وببعد ه ب تجوز على نقطتى ب ا ونخطها دائرة ا ب ط ج وهى عظيمة من قبل أن الخط الخارج من قطبها إلى محيطها مساوٍ لضلع المربع المخطوط فى دائرة عظيمة واقعة فى الكرة فقد خططنا على نقطتين معلومتين وهما نقطتا ا ب على بسيط الكرة دائرة عظيمة وهى دائرة ا ب ط ج ، وذلك ما أردنا .

---

4 أن] אלדי **MSS**   6 عظيمة] وكذلك تكون دائرة ط ه د دائرة عظيمة ويتقاطعن على نقطتى ه د *add. et del.* **F**, *et nota illeg. in marg.*   6–8 عظيمة … وأيضاً] *om.* **F**   9 الكرة] ويتقاطعان على نقطتى ه د *add.* **C**

[٢٢] نريد أن نجد قطب دائرة معلومة على الكرة .



فنفرض الدائرة المعلومة التى على الكرة دائرة ا ب جـ ونعلم على محيطها نقطة ا كيف ما اتفق ونفصل من المحيط قوسين متساويتين ونفرضهما قوسى ا د ا ه ونقسم قوس د ه الباقية بنصفين على نقطة ز فدائرة ا ب جـ إما أن تكون عظيمة أو غير عظيمة وتكون أولاً غير عظيمة ونخط أولاً على نقطتى ا ز المفروضتين دائرة عظيمة وهى دائرة ز ا ط فمن قبل أن قوس ا د مساوية لقوس ا ه وقوس د ز مساوية لقوس ه ز تكون جميع قوس ا د ز مساوية لقوس ا ه ز فإذا دائرة ا ز ط قد فصلت دائرة ا ب جـ بنصفين فإنها تفصلها على زاوية قائمة وتجوز على قطبيها وتقطع قوس ز ا بنصفين على نقطة ح فنقطة ح هو قطب دائرة ا ب جـ وأيضاً تكون دائرة ا ب جـ عظيمة فبمثل ما عملنا يتبين أن قوس ا د ز مساوية لقوس ا ه ز ونقسم قوس ا د ز بنصفين على نقطة جـ وقوس ا ه ز بنصفين على نقطة ب وتكون كل واحدة من قسى ا جـ ب ا جـ ز ز ب ربع دائرة والدائرة المخطوطة على نقطة جـ وببعد جـ ز تجوز على نقطة ا من قبل أن نقطة ا مقابلة لنقطة ز ونخطها وتكون دائرة ز ا ط فدائرة ز ا ط عظيمة من قبل أن الخط الخارج من قطبها إلى محيطها مساوٍ لضلع المربع المخطوط فى دائرة عظيمة ومن قبل أن نقطة جـ قطب دائرة ز ا ط فدائرة ا ب جـ تفصل دائرة ز ا ط وتجوز على قطبيها وإذا كانت دائرة عظيمة على كرة تفصل دائرة أخرى على الكرة وتجوز على قطبيها فإنها تفصلها بنصفين وعلى زاوية قائمة فدائرة ا ب جـ تفصل دائرة ز ا ط بنصفين ومن قبل أن على الكرة دائرة عظيمة وهى ز ا ط تفصل دائرة على

الكرة وهى دائرة ا ب ج على زاوية قائمة فإنها تفصلها بنصفين وتجوز على قطبيها فدائرة ا ط ز تفصل دائرة ا ب ج بنصفين وتجوز على قطبيها وتقطع قوس ز ا بنصفين على نقطة الـ ح فنقطة الـ ح قطب دائرة ا ب ج ، وذلك ما أردنا أن نبين .

21 نبين] كملت المقالة الأولى *add.* **C**