SEMISISTEMAS DINAMICOS DISCRETOS SOBRE UN ESPACIO DE HILBERT

E.LLorens

Publicado en *"Anales de la Sección de Ciencias del Colegio Universitario de Gerona"*, año II, número 2.Gerona.Marzo 1977.

SEMISISTEMAS DINAMICOS DISCRETOS SOBRE UN ESPACIO DE HILBERT

E.LLorens Fuster
Departamento de Matemáticas

INTRODUCCION

En el estudio de la convergencia de algunos algoritmos de minimización de funcionales sobre un espacio de Hilbert (Cfr. (4)), se han usado, preferentemente en el caso de R^n, determinados tipos de semisistemas dinámicos discretos, como puede verse en (8) y (7).

En (3) se definen semisistemas adecuados para estudiar la convergencia en norma de las sucesiones suministradas por ciertos algoritmos del tipo del gradiente para funcionales definidos en un espacio de Hilbert no necesariamente finito dimensional.

Sin embargo, en este último caso, y en muchos problemas prácticos, bajo condiciones menos restrictivas para los funcionales, ocurre que la mayoría de los algoritmos de minimización dan lugar a sucesiones *débilmente* convergentes al punto crítico.

Se plantea pues la posibilidad de estudiar dichos algoritmos mediante semisistemas dinámicos discretos adecuados que de algún modo extiendan los resultados obtenidos en R^n a la topología débil del espacio considerado.

La principal dificultad que se presenta es la reformulación adecuada del llamado axioma de continuidad, que necesariamente debe expresarse referido a esta última topología, asi como también el dotar de una convergencia al conjunto de las partes no vacías débilmente compactas del espacio de Hilbert de partida.

Todas las propiedades de la topología débil de las que se ha hecho uso, se encuentran en (5).

1.: EL ESPACIO CON LIMITE $(F(H),\tilde{\sigma})$

1.1.: NOTACIONES

Se supondrá dado en lo que sigue un espacio real de Hilbert H, separable, en el que se considerarán las topologías débil y de la norma. Si $\{x_n\}$ es una sucesión en H se emplearán los símbolos $x_n \rightharpoonup x$ y $x_n \to x$ para indicar que converge a $x \varepsilon H$ respectivamente en cada una de ellas.

Denotaremos con $F(H)$ el espacio de las partes no vacías débilmente compactas, de H.

1.2.: DEFINICION

Dados $A,B \varepsilon F(H)$ se llama semidesviación de A respecto de B al número real $\beta(A,B) = \sup_{x\ A}\{d(x,B)\}$.

1.3.: TEOREMA

Para cualesquiera $A,B,C \varepsilon F(H)$ se cumple:

1\. 3.1. $\beta(A,B) = 0 \quad A \quad B$

1\. 3.2. $\beta(A,B) < \varepsilon \quad A \quad S(B,\varepsilon) = \{x \varepsilon H : d(x,B) < \varepsilon\}$

1\. 3.3.: En general, $\beta(A,B) \neq \beta(B,A)$.

1\. 3.4.: $\beta(A,B) \leq \beta(A,C) + \beta(C,B)$.

La prueba se omite, por ser simple consecuencia de la definición.

1.4 : TEOREMA

Sean $A \varepsilon F(H)$ y $S_\beta(A,r) = \{B \varepsilon F(H) : \beta(B,A) < r\}$.

Si se define $\Sigma = \{S_\beta(A,r) : A \varepsilon F(H),\ r > 0\}$ se obtiene una base de una topología sobre F(H), que satisface el primer axioma de numerabilidad, y que es no T_1.

La comprobación es inmediata.

$A_n \xrightarrow{\beta} A$ indicará en adelante que la sucesión $\{A_n\} \subset F(H)$ converge en esta topología al conjunto $A \varepsilon F(H)$.

1.5. : DEFINICION

Sea $\{A_n\}$ una sucesión en F(H), y sea $A \varepsilon F(H)$. Se dice que $\{A_n\}$ σ-converge a A, ($A_n \xrightarrow{\sigma} A$), si para toda sucesión $\{x_n\}$ con $x_n \varepsilon A_n$ $(n=1,\ldots)$ puede obtenerse una subsucesión x_{n_p} con $x_{n_p} \rightharpoonup x \varepsilon A$.

Con esta convergencia, es fácil ver que F(H) no es un espacio con límite en el sentido de (6).20.I.

1.6. : DEFINICION

Sea $\{A_n\}$ una sucesión en $F(H)$, y sea $A \in F(H)$. Se dice que $\{A_n\}$ $\tilde{\sigma}$-converge a A, ($A_n \xrightarrow{\tilde{\sigma}} A$), si para cualquier subsucesión $\{A_{n_k}\}$ de $\{A_n\}$ se tiene que $A_{n_k} \xrightarrow{\sigma} A$.

1.7 .: TEOREMA

F(H) con la convergencia $\tilde{\sigma}$, es un espacio con límite.

Prueba:

Sea $\{A_n\}$ una sucesión en $F(H)$, y sea $A \in F(H)$.

Es sabido que F(H) es un espacio con límite para la convergencia $\tilde{\sigma}$, si verifica:

1) Si $\tilde{\sigma}\text{-}\lim_{n\to\infty} A_n = A$ y $k_1 < k_2 \ldots$ entonces $\tilde{\sigma}\text{-}\lim_{n\to\infty} A_{k_n} = A$.

2) Si para cada n, $A_n = A$, entonces $\tilde{\sigma}\text{-}\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

3) Si $\{A_n\}$ no $\tilde{\sigma}$-converge a A, contiene una subsucesión tal que ninguna de sus subsucesiones $\tilde{\sigma}$-converge a A.

Para ver (1) supongamos que $A_n \xrightarrow{\tilde{\sigma}} A$ mietras que para alguna subsucesión $\{A_{n_p}\}$ de $\{A_n\}$ se tiene que $A_{n_p} \overset{\tilde{\sigma}}{\not\longrightarrow} A$.

En tal caso, al menos una subsucesión $\{A_{n_{p_j}}\}$de $\{A_{n_p}\}$ verifica que

$$A_{n_{p_j}} \overset{\sigma}{\not\longrightarrow} A.$$

Pero como $\{A_{n_{p_j}}\}$ es subsucesión de $\{A_n\}$ se obtiene que

$$A_n \overset{\tilde{\sigma}}{\not\longrightarrow} A$$

en contra de lo supuesto.

Si, para cada n, $A_n = A$, y $\{A_{n_p}\}$ es una subsucesión arbitraria de $\{A_n\}$ entonces tomando $\{x_p\} \subset H$ con $x_p \in A_{n_p}$ $(p=1,\ldots)$, por ser A débilmente compacto, puede suponerse que $x_p \longrightarrow x \in A$. Luego $A_{n_p} \xrightarrow{\sigma} A$, y al ser arbitraria la subsucesión $\{A_{n_p}\}$, se tiene que $A_n \xrightarrow{\tilde{\sigma}} A$, estableciéndose de este modo (2).

Si la sucesión $\{A_n\}$ no $\tilde{\sigma}$-converge hacia A, alguna subsucesión suya verifica que $A_{n_p} \xrightarrow{\sigma} \!\!\!\!\!\!/\ \ A$. Probaremos que ninguna subsucesión de $\{A_{n_p}\}$ $\tilde{\sigma}$converge al compacto A.

En efecto: Caso contrario, si la sucesión $\{A_{n_{p_j}}\}$ extraida de A_{n_p} verificase que $A_{n_{p_j}} \xrightarrow{\tilde{\sigma}} A$, en particular también se tendría que

$$A_{n_{p_j}} \xrightarrow{\sigma} A$$

y si tomamos cualquier sucesión $\{x_{n_p}\} \subset H$, con $x_{n_p} \in A_{n_p}$ $(p=1,\ldots)$, una subsucesión de

$$\{x_{n_{p_j}}\}$$

converge débilmente a un punto de A.

Pero, al ser esa misma, subsucesión de $\{x_{n_p}\}$ se obtiene, en definitiva que

$$A_{n_p} \xrightarrow{\sigma} A$$

una contradicción.

Se ha demostrado pues (3) y con ello el teorema. ■

Nótese que la convergencia σ verifica en F(H) los axiomas (2) y (3), mas no el (1). No obstante:

1.8. : TEOREMA

Sean $\{A_n\} \subset F(H)$, $A \in F(H)$. $A_n \xrightarrow{\sigma} A$ si y sólo si, para alguna subsucesión $A_{n_p} \xrightarrow{\sigma} A$.

Prueba:

Si para alguna subsucesión $\{A_{n_p}\}$ de $\{A_n\}$ se tiene que $A_{n_p} \xrightarrow{\sigma} A$, entonces dada cualquier sucesión $\{x_n\} \subset H$, con $x_n \in A_n$ $(n=1,2,\ldots)$, $\{x_{n_p}\}$ admite una subsucesión débilmente convergente a un punto de A. Luego también $\{x_n\}$ admite una subsucesión débilmente convergente a un punto de A, y, en consecuencia, $A_n \xrightarrow{\sigma} A$. ■

1.9 .: TEOREMA

Sea $\{A_n\}$ una sucesión en $F(H)$.
Si $A_n \xrightarrow{\beta} A$, entonces $A_n \xrightarrow{g} A$.

Prueba:

Si $A_n \xrightarrow{\beta} A$, dado $k>0$ se tiene que $\beta(A_n,A)<k$ salvo, quizás, para un número finito de subíndices. Puede suponerse, por tanto, que

$A_n \subset S[A,k]$ $n=1,2,\ldots$

Si $\{x_n\}$ es cualquier sucesión con $x_n \varepsilon A_n$ para $n=1,2,\ldots$ entonces $\{x_n\} \subset S[A,k]$ y como en $H, A\varepsilon F(H) \Rightarrow S[A,k] \varepsilon F(H)$, admite una subsucesión $\{x_{n_p}\}$ con $x_{n_p} \rightharpoonup x \varepsilon S[A,k]$.

Como $\beta(A_{n_p},A) \to 0$, también $\alpha_{n_p} = d(x_{n_p},A) \to 0$.

Pero $A\in F(H)$ y entonces es fácil ver que puede hallarse una sucesión $\{y_{n_p}\} \subset A$, tal que

$d(x_{n_p},y_{n_p}) = d(x_{n_p},A) = \alpha_p$.

Al ser A débilmente compacto, puede suponerse que $y_{n_p} \rightharpoonup y \varepsilon A$.

Dado $\varepsilon>0$, puede hallarse $p(\varepsilon)\varepsilon I^{+}$ tal que si $p \geq p(\varepsilon)$, $d(x_{n_p},y_{n_p}) = \alpha_{n_p} < \varepsilon$,

lo que implica que $d(x,y) \leq \varepsilon$.

Luego, necesariamente $d(x,y)=0$, es decir que $x\varepsilon A$, completándose de este modo la demostración.

■

1.10.: COROLARIO

Sea $\{A_n\}$ una sucesión en $F(H)$. Sea $A\varepsilon \underset{\sim}{F}(H)$.
Si $A_n \xrightarrow{\beta} A$, entonces $A_n \xrightarrow{\tilde{\sigma}} A$.

Prueba:

Si $A_n \xrightarrow{\beta} A$, para cualquier subsucesión $\{A_{n_p}\}$ de $\{A_n\}$ se tiene que $A_{n_p} \xrightarrow{\beta} A$, y en consecuencia, por el teorema anterior, $A_{n_p} \xrightarrow{\sigma} A$. Luego $A_n \xrightarrow{\tilde{\sigma}} A$.

■

1.11.: OBSERVACION

Si $\{e_i\}$ es una base ortonormal en H, entonces la sucesión $\{\{e_i\}\} \subset F(H)$ verifica que $\{e_i\} \xrightarrow{g} \{0\}$ Pero, para $i=1,\ldots$ $\beta(\{e_i\},\{0\}) = 1$, es decir $\{e_i\} \not\xrightarrow{\beta} \{0\}$.

1.12.: TEOREMA

Sea $\{A_n\}$ una sucesión en $F(H)$.

Si $A_n \xrightarrow{g} A$ puede encontrarse una subsucesión $\{A_{n_p}\}$ de $\{A_n\}$, tal que $A_{n_p} \subset S[A,k]$ $p=1,2,\ldots,p$ a algún $k>0$.

(O, en otros términos, $\{A_n\}$ está contenida frecuentemente $S[A,k]$ para algún $k>0$).

Prueba:

Caso contrario $\{A_n\}$ está últimamente no contenida en $S[A,k]$ para todo $k>0$.

Dado $k=2$ $\exists n_1$ / si $n \geq n_1$ $\beta(A_n,A) \geq 2$

Dado $k=2$ $\exists n_2>n_1$ / si $n \geq n_2$ $\beta(A_n,A) \geq 2^2$

...

Dado $k=2^p$ $\exists n_p>n_{p-1}$ / si $n \geq n_p$ $\beta(A_n,A) \geq 2^p$

...

Por tanto:

Dado $k=2$ $\exists n_1$ / si $n \geq n_1$ $\exists x_n^1 \varepsilon A_n$ $d(x_n^1,A) \geq 2$

Dado $k=2^2$ $\exists n_2>n_1$ / si $n \geq n_2$ $\exists x_n^2 \varepsilon A_n$ $d(x_n^2,A) \geq 2^2$

...

Dado $k=2^p$ $\exists n_p>n_{p-1}$ / si $n \geq n_p$ $\exists x_n^p \varepsilon A_n$ $d(x_n^p,A) \geq 2^p$

...

Se construye ahora la sucesión $\{y_i\}$ del siguiente modo:

$y_1 \varepsilon A$ arbitrario, ... $,y_{n\ -1} \varepsilon A_{n\ -1}$ arbitrario,

$y_{n_1}=x_{n_1} \varepsilon A_{n_1}$, ... , $y_{n_2-1}=x_{n_2-1} \varepsilon A_{n_2-1}$,

$y_{n_2}=x_{n_2} \varepsilon A_{n_2}$, ... , $y_{n_3-1}=x_{n_3-1} \varepsilon A_{n_3-1}$, ...

Obviamente:

$d(y_{n_1},A) \geq 2$, ... $,d(y_{n_2-1},A) \geq 2, d(y_{n_2},A) \geq 2^2,\ldots,$ $d(y_{n_3-1},A) \geq 2^2_,$ ....

Como $y_n \varepsilon A_n$ $n=1,\ldots,$ y $A_n \xrightarrow{g} A$ por hipótesis, puede obtenerse una subsucesión $\{y_{n_k}\}$ de $\{y_n\}$ tal que

$$y_{n_k} \longrightarrow y \varepsilon A$$

y además, para cada k, $d(y_{n_k},y) \geq d(y_{n_k},A)$.

Por lo tanto, $\{d(y_{n_k},y)\}$ está minorada por una sucesión numérica no acotada, lo cual es absurdo pues si $\{y_{n_k}\}$ es débilmente convergente al punto y, es sabido que existe una constante $M<+\infty$ tal que

$$\|y_{n_k} - y\| < M \quad (k=1,\ldots).$$

Al obtenerse una contradicción queda probado el teorema. ■

2.: SEMISISTEMAS DINAMICOS DISCRETOS DEBILES SOBRE H

2.1.: DEFINICION

Se denomina semisistema dinámico discreto débil sin unicidad sobre H a la terna (H,I^+,π), donde

$$\pi : H\times I^+ \longrightarrow F(H)$$

verifica:

2.1.1.: $\pi(x,0) = \{x\} \quad \forall x\in H$.

2.1.2.: Si $x_n \longrightarrow x$ en H, entonces, para cada entero no negativo k, $\pi(x_n,k) \xrightarrow{\sigma} \pi(x,k)$.

2.1.3.: $\pi(\pi(x,h),k) = \pi(x,h+k) \quad \forall x\in H,\ \forall\ h,k\in I^+$.

2.2.: OBSERVACIONES

2.2.1.:

En 2.1.3. se afirma implícitamente que es débilmente compacto el conjunto

$$\pi(\pi(x,h),k) = \bigcup_{y\in\pi(x,h)} \pi(y,k).$$

Ello es consecuencia de los axiomas anteriores, en el siguiente sentido:

Si $M\in F(H)$, y $\pi(.,k):H \longrightarrow F(H)$ verifica los axiomas 2.1.1. y 2.1.2., entonces el conjunto

$$\pi(M,k) = \bigcup_{y\in M} \pi(y,k)$$

es débilmente compacto.

En efecto:

Sea $\{x_n\}\subset\pi(M,k)$.Por definición puede obtenerse otra sucesión $\{y_n\} \subset M$, tal que $x_n\in\pi(y_n,k)$ $(n=1,2,\ldots)$.

Como M es débilmente compacto, $\{y_n\}$ admite una subsucesión $\{y_{n_p}\}$ tal que

$$y_{n_p} \longrightarrow y\in M,$$

lo que,en virtud de 2.1.2., implica que

$$\pi(y_{n_p},k) \xrightarrow{\sigma} \pi(y,k).$$

Como $x_{n_p}\in\pi(y_{n_p},k)$ $(p=1,2,\ldots)$, la sucesión $\{x_{n_p}\}$ ad mite una subsucesión $\{x_{n_{p*}}\}$ tal que

$$x_{n_{p*}} \longrightarrow x\in\pi(y,k) \subset\pi(M,k).$$

Se ha probado, pues, que $\pi(M,k)$ es débilmente secuencialmente compacto y, como consecuencia ((5).22.) es débilmente compacto.

2.2.2.:

La definición de semisistema dinámico discreto sin unicidad sobre un espacio métrico X, dada en (8) y recogida en (7), es como sigue:

(X,I^+,π) es un s.s.d.d. sobre X si

$\pi : X\times I^+ \longrightarrow F(X)$

verifica:

1) $\pi(x,0) = \{x\} \quad \forall x\in X.$

2) $\pi(\pi(x,k),h) = \pi(x,k+h) \quad \forall x\in X \quad \forall h,k\in I^+$

3) Para cada $k\in I^+$, $x_n \to x \Rightarrow \pi(x_n,k) \xrightarrow{\beta} \pi(x,k)$.

Como consecuencia de 1.10 , es claro que todo semisistema dinámico discreto sin unicidad sobre R^n, es un semisistema dinámico discreto debil sin unicidad sobre R^n. Recíprocamente, supongamos que $x_n \to x$ en R^n.Entonces, por 2.1.2., para cada entero no negativo k, $\pi(x_n,k) \xrightarrow{\sigma} \pi(x,k)$ Veamos que también $\pi(x_n,k) \xrightarrow{\beta} \pi(x,k)$:

Caso contrario existe $\varepsilon>0$ tal que, para una subsucesión $\beta(\pi(x_{n_p},k),\pi(x,k)) \geq \varepsilon$.Puede encontrarse entonces $y_{n_p}\in \pi(x_{n_p},k)$ $p=1,2,\ldots$ tal que $d(y_{n_p},\pi(x\quad,k)) \geq \varepsilon$. Como $x_{n_p}\to x$, necesariamente $\pi(x_{n_p},k) \xrightarrow{\sigma} \pi(x,k)$, en cuyo caso, para una subsucesión de $\{y_{n_p}\}$ (que, por comodidad supondremos es ella misma):

$y_{n_p} \longrightarrow y\in \pi(x,k)$

es decir, $d(y_{n_p},y)\to 0$, y por tanto, $d(y_{n_p},\pi(x,k))\to 0$, lo que es absurdo.

Luego, sobre R^n, coinciden los conceptos de semisistema dinámico discreto y semisistema dinámico discreto debil.

2.2.3.:

El axioma 2.1.2., puede expresarse de modo equivalente afirmando que:

2.1.2.' : Si $x_n \longrightarrow x$ en H, entonces para cada entero no negativo, k, $\pi(x_n,k) \xrightarrow{\tilde{\sigma}} \pi(x,k)$.

En efecto, si $x_n \longrightarrow x$ y se tuviera que $\pi(x_n,k) \overset{\tilde{\sigma}}{\not\longrightarrow} \pi(x,k)$, para alguna subsucesión

$\pi(x_{n_p},k) \overset{\sigma}{\not\longrightarrow} \pi(x,k)$

pero como $x_{n_p} \longrightarrow x$, en virtud de 2.1.2.,

$\pi(x_{n_p},k) \xrightarrow{\sigma} \pi(x,k)$

lo que es contradictorio.

Por lo tanto, si se considera el espacio topológico (H,σ) como espacio con límite, al igual que $(F(H),\tilde{\sigma})$ todavía puede redactarse de otro modo el axioma considerado semejante al introducido originalmente en (8):

2.1.2": Para cada $k \in I^+$, la aplicación

$\pi(.,k): H \longrightarrow F(H)$

es σ-$\tilde{\sigma}$-contínua en H.

Naturalmente, la continuidad debe entenderse en el sentido de (6).20.III.

2.2.4.:

Si $\pi(x,k)$ está constituido por un número finito de puntos, para todo $k \in I^+$, se dice que (H,I^+,π) es localmente finito en x.

Si para cada $x \in H$, existe $y \in H$ tal que $\pi(x,1)=\{y\}$ (H,I^+,π) se dice que tiene unicidad positiva.

El siguiente teorema proporciona un método "standard" para definir sobre H un semisistema dinámico discreto débil:

2.3.: TEOREMA

Sea $\pi(.,1): H \longrightarrow F(H)$ una aplicación tal que:

2.3.1.: Si $x_n \longrightarrow x$ en H, entonces

$\pi(x_n,1) \xrightarrow{\sigma} \pi(x,1)$, en F(H).

Si se define $\pi: H\times I^+ \longrightarrow F(H)$ de modo que:

$\pi(x,0) = \{x\} \quad \forall x \in H.$

$$\pi(x,k+1) = \bigcup_{y\in\pi(x,k)} \pi(y,1)$$

la terna (H,I^+,π) constituye un semisistema dinámico discreto sobre H, que denominaremos inducido en H por la aplicación $\pi(.,1)$ dada.

Prueba:

$\pi: H\times I^+ \longrightarrow F(H)$ está bien definida como consecuencia de 2.2.1.,y verifica 2.1.1., por construcción.

Veamos que cumple también 2.1.3.:

Se procederá por inducción sobre k. Para k=1 se cumple por la misma definición de π.Supongámoslo válido para k-1.

Si $z\epsilon\pi(x,h+k)$, existe $z_1\epsilon\pi(x,h+k-1)$ tal que $z\epsilon\pi(z_1,1)$, y por hipótesis de inducción, $z_1\epsilon\pi(\pi(x,h),k-1)$.

Sea $y\epsilon\pi(x,h)$ tal que $z_1\epsilon\pi(y,k-1)$. Entonces:

$z\epsilon\pi(z_1,1)\subset\pi(\pi(y,k-1),1)$ y por tanto $z\epsilon\pi(y,k)$, de donde

$$z\epsilon\pi(\pi(x,h),k)$$

con lo que se demuestra que $\pi(x,h+k)\subset\pi(\pi(x,k),k)$.

Sea ahora $z\epsilon\pi(\pi(x,h),k)$. Puede encontrarse $y\epsilon\pi(x,h)$ tal que

$$z\epsilon\pi(y,k)=\pi(\pi(y,k-1),1).$$

Entonces si $z_1\epsilon\pi(y,k-1)$ es tal que $z\epsilon\pi(z_1,1)$, se tiene que:

$$z_1\epsilon\pi(y,k-1)\subset\pi(\pi(x,h),k-1)=\pi(x,h+k-1)$$

de donde

$$z\epsilon\pi(z_1,1)\subset\pi(\pi(x,h+k-1),1)=\pi(x,k+h),$$

es decir que también $\pi(\pi(x,h),k)\subset\pi(x,h+k)$, completándose la prueba de 2.1.3.

Por último veamos, por inducción sobre k,que se verifica 2.1.2.:

Para k=1 es evidente.

Si $x_n\longrightarrow x$ en H, consideremos la sucesión $\{z_n\}$ con $z_n\epsilon\pi(x_n,k)$, n=1,2,... .

Como $\pi(x_n,k)=\pi(\pi(x_n,k-1),1)$, existe una sucesión $\{y_n\}$ con $y_n\epsilon\ \pi(x_n,k-1)\ \forall n=1,2,...$,tal que $z_n\epsilon\pi(y_n,1)$, para cada n=1,2,... .

Por hipótesis de inducción $\pi(x_n,k-1)\xrightarrow{\sigma}\pi(x,k-1)$ y de aquí que $\{y_n\}$ admite una subsucesión $\{y_{n_p}\}$ tal que

$$y_{n_p}\longrightarrow y\epsilon\pi(x,k-1)$$

pero entonces

$$\pi(y_{n_p},1)\xrightarrow{\sigma}\pi(y,1)$$

lo que implica que $\{z_{n_p}\}$ admite una subsucesión $\{z_{n_{p^*}}\}$tal que:

$$z_{n_{p^*}}\longrightarrow z\epsilon\pi(y,1).$$

Como $y\epsilon\pi(x,k-1)$, $z\epsilon\pi(\pi(x,k-1),1)=\pi(x,k)$ lo que demuestra que $\pi(x_n,k)\xrightarrow{\sigma}\pi(x,k)$, probándose así el teorema.

■

2.4.: EJEMPLOS

Como consecuencia del teorema anterior, pueden darse definiendo únicamente una aplicación $\pi(.,1):H\to F(H)$, sobreentendiéndose que se trata del semisistema dinámico discreto débil que induce en H.

2.4.1.:

Sea $M\in F(H)$, fijo. Se define para todo x de H:

$\pi_1(x,1) = M$.

Obviamente verifica 2.3.1., y por tanto $(H,I^+\pi_1)$ es un semisistema dinámico discreto débil sobre H.

2.4.2.:

Sean F un conjunto finito no vacío y

$B=\{v_i: i\in F\}\subset H$.

Definimos $\pi_2(x,1)=\{(x/v_i)v_i: i\in F\}$

Si $x_n \longrightarrow x$ en H, sea $\{z_n\}$ tal que $z_n\in\pi_2(x_n,1)$, n=1,... . Puede escribirse entonces que:

$$z_n = (x_n/v_{i(n)})v_{i(n)}$$

y al ser F finito, para algún $i_0\in F$ existe una subsucesión $\{z_{n_p}\}$ tal que

$$z_{n_p} = (x_{n_p}/v_{i_0})\, v_{i_0}$$

en cuyo caso es inmediato que

$$z_{n_p} \longrightarrow (x/v_{i_0})v_{i_0}\in\pi_2(x,1).$$

Luego $\pi_2(x_n,1) \xrightarrow{\sigma} \pi_2(x,1)$ y de aquí que (H,I^+,π_2) es un semisistema dinámico discreto débil sobre H.

2.4.3.:

Sean $k>0$ y $\alpha\in R$, fijos.

Se define $\pi_3(x,1) = S[\alpha x,k]$

Si $x_n \longrightarrow x$ en H, sea $\{z_n\}$ tal que $z_n\in\pi(x_n 1)$ n=1,2,... . En tal caso

$$z_n = \alpha x_n + v_n \quad \text{con } \|v_n\| \leq k,\ (n=1,2,\ldots).$$

Al ser $\{v_n\}$ acotada, puede extraerse de ella una subsucesión

$$v_{n_p} \longrightarrow v\in S[0,k]$$

luego

$$z_{n_p} \longrightarrow \alpha x + v\in S[\alpha x,k] = \pi_3(x,1)$$

Por tanto, $\pi_3(x_n,1) \xrightarrow{\sigma} \pi_3(x,1)$, y, en consecuencia, (H,I^+,π_3) es un semisistema dinámico discreto débil sin unicidad sobre H.

3.: CONCLUSIONES

Se ha desarrollado en este trabajo una definición axiomática de semisistemas dinámicos discretos sobre H, que abarca a una clase mas extensa que las usuales y que permite, reformulando adecuadamente los conceptos de naturalesza topológica,como conjuntos límitė,funciones de Liapunov etc., disponer de un instrumento adecuado para el estudio de la convergencia (débil) de ciertos algoritmos de minimización de funcionales.

BIBLIOGRAFIA

(1) BALL, J.M.
Stability Theory for an extensible beam.
Journal of Diff.Eq. 14,399-418, 1973.

(2) BHATIA, N.P.; SZEGO, G.P.
Local Semi-Dynamical Systems.
Lecture Notes in Math. Vol 35. Springer,1970

(3) CASTILLO, F.
Discrete Semi-Dynamical Systems and Aplicns.
In "Towards Global Optimization" Szego-Dixons Editores. North Holland, 1.975.

(4) CEA, J.
Optimisation: Therie et Algoritmes.
Dunod, París, 1971.

(5) KOTHE, G.
Topological Vector Spaces, I.
Springer Verlag, 1969.

(6) KURATOWSKI
Topologie II
Varsovia, 1950.

(7) RODRIGUEZ, G.
Semisistemas dinámicos discretos y algoritmos de minimización.
Collectánea Math. Vol XXV, fascíc. 10, 1974

(8) SZEGO, G.P.; TRECCANI, G.
An Abstract Formulation of Minimization Algorithms, en "Differential Games and Related Topics", Kuhn,H.W.-Szego, G.P. Editores.
North Holland Publ.Comp., 1971.