

# **Análisis del comportamiento de placas rectangulares ortotrópicas y anisotrópicas**

Liz Graciela Nallim y Ricardo Oscar Grossi

CONICET - PROMAS  
Facultad de Ingeniería  
Universidad Nacional de Salta  
Avda. Bolivia 5150  
4400 Salta, Argentina  
Tel.: 54-387-425 53 79, Fax: 54-387-425 53 51  
e-mail: promas@ciunsa.edu.ar

## **Resumen**

En este trabajo se usan el método de Ritz con polinomios ortogonales como funciones aproximantes y el método de Rayleigh-Schmidt para generar valores de coeficientes de frecuencias de placas ortotrópicas y anisotrópicas con efectos complicantes. Se presentan valores correspondientes a las primeras cinco frecuencias y se realizan comparaciones de valores para el caso de la frecuencia fundamental con resultados que figuran en la literatura.

## **DYNAMIC ANALYSIS OF RECTANGULAR ORTHOTROPIC AND ANISOTROPIC PLATES**

## **Summary**

Natural frequencies of anisotropic and orthotropic tapered plates with complicating effects are studied by using boundary characteristic orthogonal polynomials in the Ritz method and applying the Rayleigh-Schmidt method. Values of the first five frequencies are presented and comparison of results are made in the case of the fundamental frequency with data published in the open literature.

## **INTRODUCCIÓN**

La determinación de las frecuencias naturales de vibración transversal en placas rectangulares isotrópicas es un problema que ha sido extensamente estudiado por diversos investigadores. Los trabajos de Leissa<sup>1,2</sup> constituyen excelentes compilaciones de la literatura correspondiente. También los problemas de vibraciones de placas rectangulares con efectos complicantes tales como espesor variable, presencia de una masa concentrada, bordes elásticamente restringidos, etc. recibieron un tratamiento considerable<sup>3-13</sup>. En el presente trabajo no se intenta revisar la literatura, sino solamente se mencionan algunos de los muchos y excelentes artículos publicados. Las aplicaciones a materiales compuestos son de gran importancia en muchos campos de la tecnología moderna. No obstante, comparativamente la cantidad de información sobre el comportamiento dinámico de placas de material compuesto es limitada, especialmente en el caso de placas anisotrópicas con efectos complicantes<sup>14</sup>.

La referencia<sup>15</sup> constituye una excelente revisión de la literatura concerniente a la dinámica de placas de materiales compuestos. Laura y colaboradores<sup>16-19</sup> han proporcionado mucha de la información concerniente al uso de expresiones polinómicas como funciones aproximantes para la determinación de frecuencias de placas ortotrópicas y anisotrópicas mediante métodos variacionales. El objetivo del presente trabajo es presentar información sobre el comportamiento dinámico de placas ortotrópicas y anisotrópicas

con efectos complicantes. Las frecuencias naturales se obtuvieron mediante la aplicación del método de Rayleigh-Schmidt<sup>20-23</sup> y el uso de polinomios ortogonales en el método de Ritz<sup>24</sup>. El método de Rayleigh-Schmidt se desarrolló con una función aproximante con sólo dos términos, mientras que el método Ritz se aplicó con una función aproximante de hasta treinta y seis términos. Ya que las combinaciones de diferentes condiciones de contorno y parámetros de variación de espesor son numerosas, los resultados se presentan sólo para algunos casos. En la construcción de los polinomios ortogonales es posible incorporar una función de peso para incluir el espesor no uniforme de la estructura. Por otro lado, la incorporación de la función que toma en cuenta la variación de espesor en el método Rayleigh-Schmidt se logra fácilmente.

Los resultados obtenidos son muy precisos y los algoritmos correspondientes pueden ser implementados fácilmente en una computadora personal. La rápida y poco costosa determinación de los valores numéricos de las frecuencias de placas es muy importante en trabajos de diseño. Los algoritmos generales desarrollados en este artículo ofrecen esa posibilidad para una gran variedad de problemas de vibraciones de placas con diversos efectos complicantes.

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMAS

En el tipo de problemas a tratar, el método de Rayleigh requiere la minimización del siguiente funcional

$$I[W] = U_{\max} - T_{\max}; \quad U_{\max} = U_{p,\max} + U_{r,\max} + U_{t,\max} \quad (1)$$

siendo  $U_{p,\max}$  valor máximo de la energía de la deformación de la placa,  $U_{r,\max}$  valor máximo de la energía almacenada en los vínculos rotacionales de los bordes de la placa,  $U_{t,\max}$  valor máximo de la energía almacenada en los vínculos traslacionales de los bordes de la placa y  $T_{\max}$  valor máximo de la energía cinética de la placa.

Consideremos el siguiente funcional general, que representa al máximo valor de la energía de deformación de una amplia variedad de placas rectangulares

$$U_{p,\max} = \frac{1}{2} \int \int_R [D_1(W_{xx})^2 + D_2(W_{yy})^2 + 2D_3W_{xx}W_{yy} + 4D_4(W_{xy})^2 + 4D_5W_{xx}W_{xy} + 4D_6W_{xy}W_{yy}] dx dy \quad (2)$$

donde  $W = W(x, y)$  indica la deflexión de la placa y cada subíndice denota la derivación de  $W$  con respecto a la variable que se usa como tal. El dominio de la integración está dado por  $R = [0, a] \times [0, b]$ , donde  $a$  y  $b$  son las longitudes de los lados de la placa en las direcciones  $x$  e  $y$  respectivamente (Figura 1). Los coeficientes  $D_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) indican las rigideces flexionales, torsionales y adicionales de la placa.

La máxima energía de la deformación asociada a las restricciones rotacionales en los bordes está dada por

$$U_{r,\max} = \frac{1}{2} [r_1 \int_0^b (W_x(0, y))^2 dy + r_2 \int_0^b (W_x(a, y))^2 dy + r_3 \int_0^a (W_y(x, 0))^2 dx + r_4 \int_0^a (W_y(x, b))^2 dx] \quad (3)$$

donde  $r_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) son las constantes de los resortes rotacionales a lo largo de los bordes correspondientes.

La máxima energía de deformación asociada a las restricciones traslacionales en los bordes está dada por

$$U_{t,\max} = \frac{1}{2} [t_1 \int_0^b (W(0,y))^2 dy + t_2 \int_0^b (W(a,y))^2 dy + t_3 \int_0^a (W(x,0))^2 dx + t_4 \int_0^a (W(x,b))^2 dx] \quad (4)$$

donde  $t_i = (1, \dots, 4)$  son las constantes de los resortes traslacionales a lo largo de los bordes correspondientes.

Finalmente, la máxima energía cinética de la placa está dada por

$$T_{\max} = \frac{\rho\omega^2}{2} \int \int_R h(x,y) W^2(x,y) dx dy \quad (5)$$

donde  $\rho$  es la densidad del material de la placa,  $\omega$  la frecuencia natural y  $h(x,y)$  el espesor de la placa.

En este estudio, la variación de espesor ha sido tomada en cuenta considerando variación lineal en las direcciones  $x$  e  $y$ . La función que representa esta variación está dada por

$$h = h(x,y) = h^{(1)} f(x) g(y) \quad (6)$$

$$f(x) = \left(1 + c_1 \frac{x}{a}\right) \quad g(y) = \left(1 + c_2 \frac{y}{b}\right) \quad (7)$$

donde  $h^{(1)}$  es el valor de  $h$  referido al borde 1 en el punto  $(0,0)$  y  $h^{(2)} = h^{(1)}(1 + c_1)(1 + c_2)$  es el valor de  $h$  referido al borde 2 en el punto  $(a,b)$  (Figura 1).

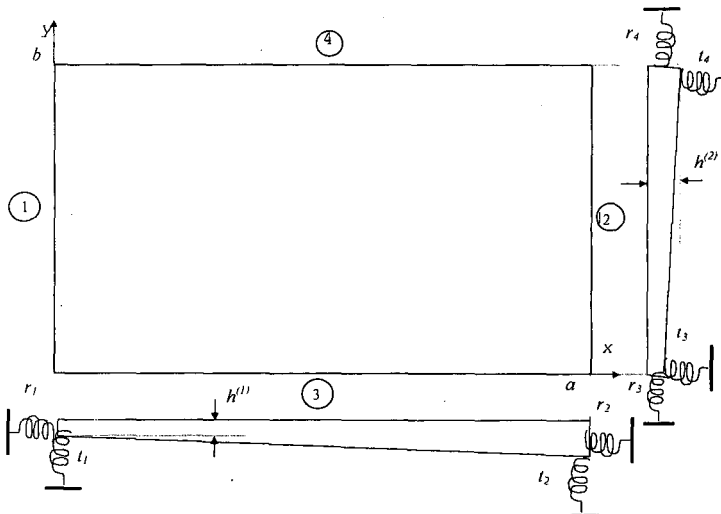


Figura 1. Sistema mecánico en estudio

Es conveniente cambiar las variables  $x$  e  $y$  por  $\bar{x} = x/a$  e  $\bar{y} = y/b$  respectivamente, con el fin de trabajar en un intervalo de integración más adecuado. No obstante, de aquí en más se vuelven a usar las letras  $x$  e  $y$  en lugar de  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ .

### APLICACIÓN DEL MÉTODO DE RAYLEIGH-SCHMIDT

Las funciones de forma adoptadas para usar el procedimiento de Rayleigh-Schmidt están dadas por

$$W(x, y) = A_1 X_1(x) Y_1(y) + A_2 X_2(x) Y_2(y) \tag{8}$$

donde

$$X_1(x) = \sum_{i=0}^4 a_i x^{n_i} \quad Y_1(y) = \sum_{i=0}^4 a'_i y^{n_i} \tag{9}$$

$$X_2(x) = \sum_{i=0}^5 b_i x^{m_i} \quad Y_2(y) = \sum_{i=0}^5 b'_i y^{m_i} \tag{10}$$

$a_4 = a'_4 = 1, n_0 = 0, n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 3, b_5 = b'_5 = 1, m_0 = 0, m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 3$  y los exponentes  $n_4, m_4, n_5$  y  $m_5$  son los parámetros ajustables. Los coeficientes  $a_i, b_i, a'_i$  y  $b'_i$  se obtienen de las correspondientes condiciones contorno. El hecho de que las condiciones naturales de borde no necesitan ser satisfechas por las funciones coordenadas escogidas es un aspecto muy importante del método de Rayleigh-Schmidt, especialmente cuando tratamos con problemas para los cuales tal satisfacción es difícil de lograr. En estos casos es posible reemplazar las condiciones de bordes naturales por expresiones analíticas más simples. Este procedimiento ha sido usado con éxito en varios trabajos previos<sup>16-19</sup> y también se usa en el presente desarrollo.

Al sustituir la función de flexión definida en (8) en el funcional de energía (1) y aplicar la condición necesaria para la existencia de mínimo

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial A_i} = 0, \quad i = 1, 2 \tag{11}$$

se obtiene

$$\sum_{i=1}^6 k_i \left( \frac{D_i^{(1)}}{D^*} \right) I_i + \sum_{i=7}^{14} k_i I_i - \frac{\rho h^{(1)}}{D^*} \omega^2 S^4 I_{15} = 0 \tag{12}$$

Los términos  $I_i$  en la ecuación (12) están dados por

$$\begin{aligned} I_i &= \sum_{j=1}^3 C_j P X_{ij} P Y_{ij}, \quad i = 1, 2, 4 & I_i &= \sum_{j=1}^4 B_j P X_{ij} P Y_{ij}, \quad i = 3, 5, 6 \\ I_i &= \sum_{j=1}^3 C_j R X_{i-6,j} R Y_{i-6,j}, \quad i = 7, 8, 9, 10 & I_i &= \sum_{j=1}^3 C_j T X_{i-10,j} T Y_{i-10,j}, \quad i = 11, 12, 13, 14 \\ I_{15} &= \sum_{j=1}^3 C_j C X_j C Y_j \end{aligned} \tag{13}$$

donde  $C_1 = A_1^2, C_2 = A_2^2, C_3 = 2A_1 A_2, B_1 = A_1^2, B_2 = A_2^2, B_3 = A_1 A_2$  y  $B_4 = B_3$ .

Las expresiones analíticas de los términos  $PX_{ij}, PY_{ij}, RX_{ij}, RY_{ij}, TX_{ij}, TY_{ij}, CX_j, CY_j$  contienen expresiones en términos de los coeficientes  $a_i, b_i, a'_i, b'_i, c_1$  y  $c_2$ . Como los términos  $I_i$  son funciones de los parámetros  $A_1$  y  $A_2$ , cuando se aplican las condiciones (11), se obtiene

$$A_1(E_1 - \Omega^2 E_2) + A_2(E_3 - \Omega^2 E_4) = 0 \quad (14)$$

$$A_1(E_3 - \Omega^2 E_4) + A_2(E_5 - \Omega^2 E_6) = 0 \quad (15)$$

Se trata de un sistema homogéneo de dos ecuaciones con dos incógnitas  $A_1$  y  $A_2$ . Para una solución no trivial, el determinante de los coeficientes debe ser nulo. Se obtiene así una ecuación de frecuencias del tipo

$$A\Omega^4 + B\Omega^2 + C = 0 \quad (16)$$

La ecuación (16) posee dos raíces; la de menor valor absoluto corresponde al coeficiente de frecuencia fundamental. Los coeficientes de frecuencia son funciones de los parámetros  $n_i$  y  $m_j$  de las funciones de forma adoptadas. Por lo tanto se puede escribir

$$\Omega_k = \Omega_k(n_j, m_j), \quad k = 1, 2 \quad (17)$$

El método de Rayleigh-Schmidt ahora requiere la minimización de los coeficientes de frecuencia con respecto a los parámetros exponenciales  $n_j$  y  $m_j$ . Obviamente, el procedimiento de derivación de  $\Omega_k$  con respecto a  $n_j$  y  $m_j$  con el propósito de minimizar es muy complicado. Sin embargo, la variación de los parámetros  $n_j$  y  $m_j$  en entornos de los valores enteros  $i$  y  $j$  es suficiente para la determinación aproximada de los coeficientes de frecuencias mínimos.

## SOLUCIÓN MEDIANTE LA IMPLEMENTACIÓN DE POLINOMIOS ORTOGONALES EN EL MÉTODO DE RITZ

Las funciones de forma adoptadas para usar el método de Ritz están dadas por

$$W(x, y) = \sum_m \sum_n c_{mn} p_m(x) q_n(y) \quad (18)$$

donde  $c_{mn}$  son coeficientes arbitrarios y  $\{p_m(x)\}$ ,  $\{q_n(y)\}$  conjuntos de polinomios ortogonales.

Los primeros elementos de estos conjuntos están dados por  $p_1(x) = \sum_{i=1}^5 a_i x^{i-1}$  y  $q_1(y) = \sum_{i=1}^5 b_i y^{i-1}$ , donde los  $a_i$  y los  $b_i$  se obtienen de las condiciones de contorno correspondientes.

Los demás elementos del conjunto de polinomios ortogonales en la variable  $x$  se generan usando el proceso de Gram-Schmidt de la siguiente manera

$$\begin{aligned} p_2(x) &= (x - B_2)p_1(x) \\ p_k(x) &= (x - B_k)p_{k-1}(x) - C_k p_{k-2}(x) \end{aligned}$$

donde  $B_k$  y  $C_k$  se obtienen usando las propiedades de ortogonalidad de los polinomios  $p_k(x)$  de la siguiente manera

$$B_K = \frac{\int_0^1 x w(x) (p_{k-1}(x))^2 dx}{\int_0^1 w(x) (p_{k-1}(x))^2 dx} \quad C_K = \frac{\int_0^1 x w(x) p_{k-1}(x) p_{k-2}(x) dx}{\int_0^1 w(x) (p_{k-2}(x))^2 dx}$$

El procedimiento es el mismo para los polinomios en la variable  $y$ . Una vez obtenidos los polinomios de la manera descrita, se encuentran las expresiones de las energías de deformación y de la energía cinética de la placa, reemplazando la expresión de  $W(x, y)$  dada por (18) y las expresiones de las correspondientes derivadas en el funcional de energías (1).

Al aplicar la condición de minimización del funcional de energía, resulta

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial c_{mn}} = 0 \quad (19)$$

Esto conduce al siguiente problema de autovalores

$$\sum_m \sum_n [K_{mni}j - \Omega^2 M_{mni}j] c_{mn} = 0 \quad (20)$$

donde

$$\begin{aligned} K_{mni}j &= \beta_1 P x_{mi}^{(2,2)} P y_{nj}^{(0,0)} + \beta_2 P x_{mi}^{(0,0)} P y_{nj}^{(2,2)} + \beta_3 (P x_{mi}^{(2,0)} P y_{nj}^{(0,2)} + P x_{mi}^{(0,2)} P y_{nj}^{(2,0)}) + \beta_4 P x_{mi}^{(1,1)} P y_{nj}^{(1,1)} + \\ &+ \beta_5 (P x_{mi}^{(2,1)} P y_{nj}^{(0,1)} + P x_{mi}^{(1,2)} P y_{nj}^{(1,0)}) + \beta_6 (P x_{mi}^{(0,1)} P y_{nj}^{(2,1)} + P x_{mi}^{(1,0)} P y_{nj}^{(1,2)}) + \sum_{h=1}^4 \alpha_h (R x_{mi})_h (R y_{nj})_h + \\ &+ \sum_{h=1}^4 \gamma_h (T x_{mi})_h (T y_{nj})_h \\ M_{mni}j &= C x_{mi}^{(0,0)} C y_{nj}^{(0,0)} \\ P x_{mi}^{(r,s)} &= \int_0^1 f^3(x) \left( \frac{d^r p_m(x)}{dx^r} \right) \left( \frac{d^s p_i(x)}{dx^s} \right) dx, \quad \text{con } r = 0, 1, 2 \text{ y } s = 0, 1, 2 \\ P y_{nj}^{(r,s)} &= \int_0^1 g^3(y) \left( \frac{d^r q_n(y)}{dy^r} \right) \left( \frac{d^s q_i(y)}{dy^s} \right) dy \\ (R x_{mi})_1 &= \frac{dp_m(0)}{dx} \frac{dp_i(0)}{dx}, \quad (R x_{mi})_2 = \frac{dp_m(1)}{dx} \frac{dp_i(1)}{dx}, \quad (R x_{mi})_3 = \int_0^1 p_m(x) p_i(x) dx, \quad (R x_{mi})_4 = (R x_{mi})_3 \\ (R y_{nj})_1 &= \int_0^1 q_n(y) q_j(y) dy, \quad (R y_{nj})_2 = (R y_{nj})_1, \quad (R y_{nj})_3 = \frac{dq_n(0)}{dy} \frac{dq_j(0)}{dy}, \quad (R y_{nj})_4 = \frac{dq_n(1)}{dy} \frac{dq_j(1)}{dy} \\ (T x_{mi})_1 &= p_m(0) p_i(0), \quad (T x_{mi})_2 = p_m(1) p_i(1), \quad (T x_{mi})_3 = \int_0^1 p_m(x) p_i(x) dx, \quad (T x_{mi})_4 = (T x_{mi})_3 \\ (T y_{nj})_1 &= \int_0^1 q_n(y) q_j(y) dy, \quad (T y_{nj})_2 = (T y_{nj})_1, \quad (T y_{nj})_3 = q_n(0) q_j(0), \quad (T y_{nj})_4 = q_n(1) q_j(1) \\ C x_{mi}^{(0,0)} &= \int_0^1 f(x) p_m(x) p_i(x) dx, \quad C y_{nj}^{(0,0)} = \int_0^1 g(y) q_n(y) q_j(y) dy \end{aligned}$$

donde  $\alpha_h, \beta_h$  y  $\gamma_h$  son parámetros que se definen para cada caso particular.  $\Omega$  es el coeficiente de frecuencia adimensional, cuya expresión analítica es diferente según los distintos problemas tratados.

## RESULTADOS NUMÉRICOS Y DISCUSIÓN

En las Tablas I a IV se muestran valores de los coeficientes de frecuencias  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$  referidos a los lados  $a$  o  $b$  para diversas situaciones de placas vibrantes isotrópicas, ortotrópicas y anisotrópicas.

## COMPARACIÓN CON TRABAJOS PREVIOS

Las comparaciones fueron realizadas con los valores determinados en estudios previos con otros métodos.

## PLACAS ANISOTRÓPICAS

Para este tipo de placas se consideraron sólo restricciones rotacionales en los bordes y espesor constante. Los valores de  $\Omega_1 = \sqrt{\frac{ph}{D_{11}}} \omega_1 b^2$  se obtuvieron con el método de Rayleigh-Schmidt mediante las expresiones (12) y (13) adoptando  $D_1^{(1)} = D_{11}$ ,  $D_2^{(1)} = D_{22}$ ,  $D_3^{(1)} = D_{12}$ ,  $D_4^{(1)} = D_{66}$ ,  $D_5^{(1)} = D_{26}$ ,  $D^* = D_{11}$  y  $s = b$ . La notación sigue como en la referencia<sup>19</sup>. Por otra parte, los coeficientes  $k_i$  están dados por

$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$
$r_l^4$	1	$2r_l^2$	$4r_l^2$	$4r_l^3$	$4r_l$

$k_7$	$k_8$	$k_9$	$k_{10}$
$R_1 r_l^4$	$R_2 r_l^4$	$R_3 (D_2/D^*)$	$R_4 (D_2/D^*)$

donde  $R_1 = \frac{r_1 a}{D_{11}}$ ,  $R_2 = \frac{r_2 a}{D_{11}}$ ,  $R_3 = \frac{r_3 b}{D_{22}}$  y  $R_4 = \frac{r_4 b}{D_{22}}$  y la relación de lados de la placa está dada por  $r_l = b/a$ .

Además se determinaron los valores de  $\Omega_i = \sqrt{\frac{ph}{D_{11}}} \omega_i b^2$ ,  $i = 1, \dots, 5$  mediante la implementación de los polinomios ortogonales como funciones aproximantes en el método de Ritz utilizando la expresión (20), en la cual los valores de los coeficientes que aparecen en ellas están dados por

$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$
$r_l^4$	$D_{22}/D_{11}$	$r_l^2 (D_{12}/D_{11})$	$4r_l^2 (D_{66}/D_{11})$	$2r_l^3 (D_{16}/D_{11})$	$2r_l (D_{26}/D_{11})$

donde  $\alpha_1 = k_7$ ,  $\alpha_2 = k_8$ ,  $\alpha_3 = k_9$  y  $\alpha_4 = k_{10}$ .

Las Tablas I y II muestran los resultados de los coeficientes de frecuencias mencionados  $\Omega_i$  para una placa rectangular de ortotropía generalizada con bordes 1 y 4 rígidamente empotrados o simplemente apoyados y borde 2 elásticamente restringido contra rotación. La ortotropía generalizada está caracterizada por los siguientes valores:  $D_{12}/D_{11} = 0,3245569$ ,  $D_{22}/D_{11} = 0,2130195$ ,  $D_{16}/D_{11} = 0,5120546$ ,  $D_{26}/D_{11} = 0,1694905$  y  $D_{66}/D_{11} = 0,3387559$ . Los valores de  $\Omega_1$  obtenidos con la presente aproximación se comparan con los reportados en la referencia<sup>19</sup>.

		$c_1 = 0, c_2 = 0$						
		$\Omega_1$	$\Omega_1$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
$r_1 = b/a$	$R_2$	(I)	(II)	(III)				
0.5	$\infty$	13,47	13,46	13,24	20,39	29,93	31,84	41,80
	10	13,16	13,14	12,88	19,39	28,40	31,44	40,03
	1	13,05	12,97	12,59	18,71	27,56	31,22	39,28
	0	13,04	12,95	12,53	18,58	27,41	31,18	39,17
1	$\infty$	27,44	27,42	26,66	39,66	59,32	65,95	80,80
	10	25,21	25,19	24,32	37,73	56,99	60,35	76,49
	1	23,15	23,06	21,80	35,96	55,06	56,33	73,84
	0	22,67	22,55	21,15	35,55	54,64	55,54	73,34
1,5	$\infty$	54,20	54,19	53,16	63,26	82,32	110,09	141,99
	10	48,42	48,42	47,26	58,12	77,92	105,85	128,47
	1	42,21	42,16	40,47	52,77	73,84	102,16	118,60
	0	40,61	40,52	38,64	51,42	72,88	101,33	116,65

(I): Valores obtenidos usando el método de Rayleigh- Ritz<sup>19</sup>

(II): Valores obtenidos usando el método de Rayleigh- Schmidt

(III): Valores obtenidos usando el método de Ritz con implementación de polinomios ortogonales

Tabla I. Valores de los coeficientes de frecuencia  $\Omega_i = \sqrt{\frac{\rho h}{D_{11}}} \omega_i b^2$ ,  $i = 1, \dots, 5$  para placas rectangulares anisotrópicas con bordes 1,3 y 4 rígidamente empotrados ( $R_1 = R_3 = R_4 = T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = \infty$ ) y borde 2 elásticamente restringido a rotación ( $R_2 = r_2 a / D_{11}$ )

		$c_1 = 0, c_2 = 0$						
		$\Omega_1$	$\Omega_1$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
$r_1 = b/a$	$R_2$	(I)	(II)	(III)				
0.5	$\infty$	11,34	11,22	10,85	18,58	27,25	27,94	38,37
	10	10,85	10,78	10,40	17,55	26,47	26,79	36,90
	1	10,53	10,50	10,02	16,82	25,67	26,49	36,17
	0	10,48	10,44	9,93	16,68	25,53	25,43	36,04
1	$\infty$	26,87	26,60	25,59	36,48	54,64	65,18	77,73
	10	24,32	24,13	23,11	34,44	52,48	59,44	73,04
	1	21,79	21,70	20,39	32,55	50,69	52,28	70,00
	0	21,17	21,11	19,67	32,11	50,31	54,45	69,42
1,5	$\infty$	54,32	53,93	52,67	61,21	78,11	105,20	141,63
	10	48,29	47,96	46,69	55,85	73,48	100,83	128,03
	1	41,66	41,37	39,76	50,20	69,14	97,10	118,03
	0	39,92	39,67	37,88	48,76	68,11	96,27	116,04

(I): Valores obtenidos usando el método de Rayleigh- Ritz<sup>19</sup>

(II): Valores obtenidos usando el método de Rayleigh- Schmidt

(III): Valores obtenidos usando el método de Ritz con implementación de polinomios ortogonales

Tabla II. Valores de los coeficientes de frecuencia  $\Omega_i = \sqrt{\frac{\rho h}{D_{11}}} \omega_i b^2$ ,  $i = 1, \dots, 5$  para placas rectangulares anisotrópicas con bordes 1 y 4 rígidamente empotrados, borde 3 simplemente apoyado ( $R_1 = R_4 = T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = \infty$ ,  $R_3 = 0$ ) y borde 2 elásticamente restringido a rotación ( $R_2 = r_2 a / D_{11}$ )



### PLACAS ORTOTRÓPICAS E ISOTRÓPICAS DE ESPESOR VARIABLE

Las rigideces a la flexión de la placa están dadas por

$$D_x(x, y) = D_x^{(1)} f^3(x) g^3(y) \text{ con } D_x^{(1)} = \frac{E_x (h^{(1)})^3}{12(1 - \mu_x \mu_y)}$$

$$D_y(x, y) = D_y^{(1)} f^3(x) g^3(y) \text{ con } D_y^{(1)} = \frac{E_y (h^{(1)})^3}{12(1 - \mu_x \mu_y)}$$

$$D_x^{(2)} = D_x^{(1)} f^3(a) g^3(b) = D_x^{(1)} C, \quad D_y^{(2)} D_y^{(1)} f^3(a) g^3(b) = D_y^{(1)} C, \quad C = (1 + c_1)^3 (1 + c_2)^3$$

Por otra parte, la rigidez a la torsión viene dada por

$$D_{xy}(x, y) = D_{xy}^{(1)} f^3(x) g^3(y) \text{ con } D_{xy}^{(1)} = \frac{E_x (h^{(1)})^3}{12}$$

Los valores de  $\Omega_1 = \sqrt{\frac{ph^{(1)}}{H_{xy}^{(1)}}} \omega_1 a^2$  se obtuvieron con el método de Rayleigh-Schmidt mediante las expresiones (12) y (13) adoptando  $D_1 = D_x$ ,  $D_2 = D_y$ ,  $D_3 = \mu_y D_x$ ,  $D_4 = D_{xy}$ ,  $D_5 = 0$ ,  $D_6 = 0$ ,  $D^* = H_{xy} = \mu_y D_x + 2D_{xy}$  y  $s = a$  y  $k_i$  dados por

$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$
1	$r_l^4$	$2r_l^2$	$4r_l^2$	$4r_l$	$4r_l^3$

$k_7$	$k_8$	$k_9$	$k_{10}$	$k_{11}$	$k_{12}$	$k_{13}$	$k_{14}$
$R_1 \left( \frac{D_1^{(1)}}{D^*} \right)$	$R_2 C \left( \frac{D_1^{(1)}}{D^*} \right)$	$R_3 r_l^4 \left( \frac{D_2^{(1)}}{D^*} \right)$	$R_4 r_l^4 C \left( \frac{D_2^{(1)}}{D^*} \right)$	$T_1 \left( \frac{D_1^{(1)}}{D^*} \right)$	$T_2 C \left( \frac{D_1^{(1)}}{D^*} \right)$	$T_3 r_l^4 \left( \frac{D_2^{(1)}}{D^*} \right)$	$T_4 r_l^4 C \left( \frac{D_2^{(1)}}{D^*} \right)$

donde  $R_1 = \frac{r_1 a}{D_1^{(1)}}$ ,  $R_2 = \frac{r_2 a}{D_1^{(2)}}$ ,  $R_3 = \frac{r_3 b}{D_2^{(1)}}$ ,  $R_4 = \frac{r_4 b}{D_2^{(2)}}$ ,  $T_1 = \frac{t_1 a^3}{D_1^{(1)}}$ ,  $T_2 = \frac{t_2 a^3}{D_1^{(2)}}$ ,  $T_3 = \frac{t_3 b^3}{D_2^{(1)}}$  y  $T_4 = \frac{t_4 b^3}{D_2^{(2)}}$ .

Por otro lado, los valores de  $\Omega_i = \sqrt{\frac{ph^{(1)}}{H_{xy}^{(1)}}} \omega_i a^2$ ,  $i = 1, \dots, 5$  se obtuvieron con el método de Ritz reemplazando en la expresión (20) los siguientes valores para  $\beta_i$ ,  $\alpha_i$  y  $\gamma_i$

$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$
$\frac{D_x^{(1)}}{H_{xy}^{(1)}}$	$\frac{D_y^{(1)}}{H_{xy}^{(1)}} r_l^4$	$\mu_y \frac{D_x^{(1)}}{H_{xy}^{(1)}} r_l^2$	$4 \frac{D_{xy}^{(1)}}{H_{xy}^{(1)}} r_l^2$	0	0

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$
$R_1 \frac{D_x^{(1)}}{H_{xy}^{(1)}}$	$CR_2 \frac{D_x^{(1)}}{H_{xy}^{(1)}}$	$r_l^4 R_3 \frac{D_y^{(1)}}{H_{xy}^{(1)}}$	$r_l^4 CR_4 \frac{D_y^{(1)}}{H_{xy}^{(1)}}$	$T_1 \frac{D_x^{(1)}}{H_{xy}^{(1)}}$	$CT_2 \frac{D_x^{(1)}}{H_{xy}^{(1)}}$	$r_l^4 T_3 \frac{D_y^{(1)}}{H_{xy}^{(1)}}$	$r_l^4 CT_4 \frac{D_y^{(1)}}{H_{xy}^{(1)}}$

La Tabla III contiene los resultados de los coeficientes de frecuencia para una placa rectangular ortotrópica con bordes 1 y 3 rígidamente empotrados, el borde 4 libre y el borde 2 elásticamente restringido contra rotación. En este caso la relación de lados está dada por  $r_l = a/b$ . Los resultados obtenidos son más exactos que los presentados en la referencia<sup>16</sup>.

			$\Omega_1$	$\Omega_1$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
		$R_2$	(I)	(II)	(III)				
$c_1 = 0$ $c_2 = 0$	0,5	$\infty$	16,61	16,60	16,35	20,44	28,00	40,01	44,27
		10	14,69	14,69	14,44	18,71	26,43	38,63	39,94
		1	12,51	12,50	12,22	17,04	25,26	36,73	37,80
		0	11,92	11,91	11,61	11,64	25,01	36,09	37,65
	1	$\infty$	18,77	18,75	18,18	33,83	46,44	61,80	66,58
		10	16,96	16,95	16,37	32,36	42,21	60,58	62,88
		1	15,11	15,07	14,44	31,38	39,17	60,00	60,83
		0	14,66	14,59	13,95	31,19	38,57	59,87	60,48
	1,5	$\infty$	22,26	22,19	21,47	50,28	54,50	92,16	92,60
		10	20,56	20,49	19,80	46,21	53,21	85,66	88,79
		1	19,06	18,91	18,24	43,43	52,59	82,16	87,26
		0	18,76	18,54	17,87	42,89	52,49	81,56	87,00
$c_1 = -0,2$ $c_2 = 0,2$	0,5	$\infty$	-	17,27	16,63	20,32	27,73	39,35	44,77
		10	-	15,52	14,85	18,73	26,26	38,00	40,83
		1	-	13,31	12,69	17,04	24,97	37,02	37,59
		10	-	12,68	12,09	16,60	24,68	36,80	36,93
	1	$\infty$	-	19,40	18,35	33,50	47,13	60,87	65,97
		10	-	17,70	16,58	32,04	43,05	59,54	62,47
		1	-	15,76	14,63	30,93	39,93	58,74	60,25
		0	-	15,23	14,12	30,70	39,29	58,55	59,86
	1,5	$\infty$	-	22,72	21,35	50,61	53,60	91,16	93,77
		10	-	21,08	19,65	46,61	52,18	86,93	87,83
		1	-	19,35	17,99	43,68	51,41	83,30	86,03
		0	-	18,90	17,58	43,10	51,26	82,66	85,71

(I): Valores obtenidos usando el método de Rayleigh- Ritz<sup>16</sup>

(II): Valores obtenidos usando el método de Rayleigh- Schmidt

(III): Valores obtenidos usando el método de Ritz con implementación de polinomios ortogonales

**Tabla III.** Valores de los coeficientes de frecuencia  $\Omega_i = \sqrt{\frac{\rho h^{(1)}}{H_{xy}^{(1)}}} \omega_i a^2$ ,  $i = 1, \dots, 5$  para una placa rectangular ortotrópica con bordes 1 y 3 rígidamente empotrados, borde 4 libre ( $R_1 = R_3 = T_1 = T_3 = T_2 = \infty$ ,  $R_4 = T_4 = 0$ ) y borde 2 elásticamente restringido a rotación ( $R_2 = r_2 a / D_x^{(2)}$ ,  $D_x / H_{xy} = 0,5$ ,  $D_y / H_{xy} = 0,5$ ,  $\mu_y = 0,2$ )

La Tabla IV contiene los resultados de los coeficientes de frecuencia para una placa rectangular isotrópica con bordes 1, 3 y 4 rígidamente empotrados y borde 2 elásticamente restringido a rotación. En este caso la relación de lados está dada por  $r_l = a/b$ .

			$\Omega_1$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
$r_1 = b/a$			(I)	(II)				
$c_1 = -0,2$ $c_2 = 0,2$	0,5	$\infty$	24,53	24,18	31,39	44,15	62,61	62,76
		10	22,30	21,99	29,42	42,45	57,52	61,21
		1	19,44	19,19	27,27	40,84	52,99	61,02
		0	18,64	18,38	26,71	40,46	51,99	59,60
	1	$\infty$	35,95	35,46	72,18	72,33	106,74	129,42
		10	34,06	33,69	67,38	70,81	102,55	121,16
		1	32,04	31,78	63,42	69,65	99,74	116,00
		0	31,52	31,28	62,58	69,39	99,20	115,06
	1,5	$\infty$	60,67	59,83	92,50	145,90	147,55	177,27
		10	59,05	58,41	88,21	139,41	144,48	173,83
		1	57,53	57,12	85,07	134,86	143,57	171,93
		0	57,18	62,82	84,44	134,06	143,40	171,59
$c_1 = 0,2$ $c_2 = 0,2$	0,5	$\infty$	29,78	29,58	38,40	54,02	76,60	76,80
		10	27,33	27,01	36,20	52,29	70,54	75,46
		1	23,25	23,10	33,43	50,47	64,28	74,26
		0	21,92	21,80	32,62	50,00	62,78	73,03
	1	$\infty$	43,46	43,38	88,33	88,48	130,56	158,44
		10	41,70	41,49	82,70	87,32	126,04	148,58
		1	39,35	39,14	77,37	86,35	122,60	141,35
		0	38,68	38,48	76,15	86,12	121,89	139,93
	1,5	$\infty$	73,49	73,21	113,15	178,76	180,52	216,74
		10	72,48	72,04	108,40	171,07	178,28	213,68
		1	71,49	70,85	104,39	164,81	177,95	211,78
		0	71,26	70,56	103,51	163,60	177,89	211,42

(I): Valores obtenidos usando el método de Rayleigh- Schmidt

(II): Valores obtenidos usando el método de Ritz con implementación de polinomios ortogonales

**Tabla IV.** Coeficiente de frecuencia fundamental  $\Omega_i = \sqrt{\frac{ph^{(1)}}{H_{xy}^{(1)}}}\omega_i a^2$ ,  $i = 1, \dots, 5$  para una placa rectangular isotrópica con lados 1, 3 y 4 rígidamente empotrados ( $R_1 = R_3 = R_4 = T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = \infty$ ) y lado 2 elásticamente restringido a rotación ( $R_2 = r_2 a / D_x^{(2)}$ ,  $\mu_y = 0, 3$ )

### CONCLUSIONES

Se ha presentado un algoritmo general para el tratamiento de vibraciones transversales de placas rectangulares. Para resolver el problema, se aplicó por un lado el método de Rayleigh-Schmidt con una expresión polinómica con exponentes ajustables como función aproximante y por otro el método de Ritz con el uso de polinomios ortogonales como funciones aproximantes. Así se derivaron ecuaciones de frecuencias que permiten el análisis de diversas características geométricas y mecánicas de las placas.

Fueron usados distintos coeficientes adimensionales de frecuencias, parámetros de restricción y relación de lados. Como los valores obtenidos con los dos métodos mencionados son cotas superiores de los valores exactos, el análisis de las Tablas I a IV y la comparación con diversos trabajos previos muestra que los resultados obtenidos con los métodos desarrollados en el presente artículo son en todos los casos más exactos. Por otro lado, la implementación del método de Ritz como ha sido planteada no sólo arroja resultados más precisos, sino que facilita la obtención de las frecuencias correspondientes a los modos superiores de vibración. Otra gran ventaja de estas aproximaciones es el hecho que los algoritmos obtenidos pueden implementarse fácilmente en una computadora personal.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se realizó con el apoyo del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina y del Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta.

## REFERENCIAS

- 1 A.W. Leissa, "Vibration of plates", NASA, SP 160, (1969).
- 2 A.W. Leissa, "The free vibration of rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 31, pp. 257-293, (1973).
- 3 E.M. Nassar, "Rapid calculation of resonance frequency for rotational restrained rectangular plates", *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 17, pp. 6-11, (1979).
- 4 T. Charmichael, "The vibration of rectangular plates with edges elastically restrained against rotation", *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 12, pp. 29-42, (1959).
- 5 M. Mukhopadhyay, "Vibration analysis of elastically restrained rectangular plates with concentrated masses", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 113, pp. 547-558, (1987).
- 6 S.F. Bassily y S.M. Dickinson, "On the use of beam functions for problems of plates involving free edges", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 42, pp. 858-864, (1975).
- 7 S.F. Bassily y S.M. Dickinson, "Buckling and vibration of in-plane loaded plates treated by a unified Ritz approach", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 59, pp. 1-14, (1978).
- 8 K. Vijayakumar y G.K. Ramaiah, "Analysis of vibration of clamped square plates by the Rayleigh-Ritz method with asymptotic solution from a modified Bolotin method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 56, pp. 127-135, (1978).
- 9 S.M. Dickinson y A. Di Blasio, "On the use of orthogonal polynomials in the Rayleigh-Ritz method for the study of the flexural vibration and buckling of isotropic and orthotropic rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 108, N°1, pp. 51-62, (1986).
- 10 G.B. Warburton y S. Edney, "Vibration of rectangular plates with elastically restrained edges", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 95, N°4, pp. 537-552, (1984).
- 11 P.A.A. Laura y R.O. Grossi, "Transverse vibrations of rectangular plates with edges elastically restrained against translation and rotation", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 75, N°1, pp. 101-107, (1981).
- 12 P.A.A. Laura, R.O. Grossi y S.R. Soni, "Free vibration of a rectangular plate of variable thickness elastically restrained against rotation along three edges and free on the fourth edge", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 62, N°4, pp. 493-503, (1979).
- 13 P.A.A. Laura y R.O. Grossi, "Transverse vibration of a rectangular plate elastically restrained against rotation along three and free on the fourth edge", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 59, N°3, pp. 355-368, (1978).
- 14 R.O. Grossi y L.G. Nallim, "On the approximate determination of the fundamental frequency of rectangular, anisotropic plates carrying a concentrated mass", *Journal of Sound and Vibration*, (en prensa).
- 15 C.W. Bert, "Research on dynamics of composite and sandwich plates", *The Shock and Vibration Digest*, pp. 17-34, (1982).

- 16 R.O. Grossi y P.A.A. Laura, "Transverse vibrations of orthotropic rectangular plates with thickness varying in two directions and with edges elastically restrained against rotation", *Fibre Science and Technology*, Vol. **14**, pp. 311-317, (1981).
- 17 R.O. Grossi y P.A.A. Laura, "Transverse vibrations of rectangular orthotropic plates with one or two free edges while the remaining are elastically restrained against rotation", *Ocean Engineering*, Vol. **6**, pp. 527-539, (1979).
- 18 R.O. Grossi, P.A.A. Laura y M. Mukhopadhyay "Fundamental frequency of vibration of orthotropic rectangular plates with three elastically restrained against rotation while fourth is free", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **103**, N°3, pp. 443-445, (1985).
- 19 R.O. Grossi y P.A.A. Laura, "Transverse vibrations of rectangular anisotropic plates with edges elastically restrained against rotation", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **64**, N°2 pp. 257-267, (1979).
- 20 R. Schmidt, "A variant of the Rayleigh-Ritz method", *The Journal of the Industrial Mathematics Society*, Vol. **31**, N°1, pp. 37-46, (1981).
- 21 R.O. Grossi, "A note on the Rayleigh-Schmidt method", *The Journal of the Industrial Mathematics Society*, Vol. **37**, N°1, pp. 29-35, (1981).
- 22 C.H. Bert, "Application of a version of Rayleigh technique to problems of bars, beams, columns, membranes and plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **119**, N°2, pp. 317-326, (1987).
- 23 R.O. Grossi, "On the use of the Rayleigh-Schmidt approach", *The Journal of the Industrial Mathematics Society*, Vol. **40**, N°2, pp. 115-122, (1990).
- 24 R.O. Grossi y R.B. Bhat, "Natural frequencies of edge restrained tapered rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **185**, N°2, pp. 335-343, (1995).
- 25 R.O. Grossi, "Determinación aproximada de la frecuencia fundamental de placas rectangulares mediante el método de Rayleigh-Ritz", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **11**, N°2, pp. 183-204, (1995).