

# UM REFINAMENTO $h$ , $p$ E $hp$ ADAPTATIVO NA ANÁLISE DE FLEXÃO DE PLACAS SEMI-ESPESSAS

A.A. NOVOTNY

e

E.A. FANCELLO

*GRANTE-Grupo de Análise de Tensões  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil  
Tel: + 55-48-231 9264 Fax: + 55-48-234 1519  
E-mail: fancello@emc.ufsc.br*

## SUMÁRIO

O Método dos Elementos Finitos é utilizado através de suas versões adaptativas  $h$ ,  $p$  e  $hp$  para analisar problemas de flexão elástica de placas semi-espessas. A abordagem adotada considera a influência das deformações cisalhantes transversais, caracterizando, assim, a teoria de primeira ordem para flexão de placas semi-espessas, conhecida por teoria de Reissner-Mindlin. Devido à complexidade no gerenciamento das informações em um problema auto-adaptativo, é utilizada a filosofia de programação orientada a objetos (C++). Na discretização do problema é adotada a base hierárquica para triângulos de Webb e Abouchacra, recentemente proposta em<sup>12</sup>. O estimador de erro de Zienkiewicz e Zhu<sup>13</sup> é utilizado para guiar o processo de refinamento da malha. Finalmente, são apresentados alguns resultados numéricos, sendo comparados, quando possível, com soluções analíticas.

## AN $h$ , $p$ AND $hp$ -ADAPTIVE REFINEMENT FOR THICK PLATE FINITE ELEMENT

### SUMMARY

In this work, the Finite Element Method is used through its  $h$ ,  $p$  and  $hp$  adaptive version to solve the Reissner-Mindlin plate elastic bending problem. The object oriented programming philosophy (C++) is employed in order to overcome the natural difficulties of handling information in a self-adaptive finite element code. The Webb and Abouchacra hierarchical basis for triangular elements, recently proposed in<sup>12</sup>, is employed to discretize the plate domain. The adaptive refinement is done in accordance with the Zienkiewicz and Zhu error estimator<sup>13</sup>. Finally, some numerical results are shown, being compared with analytical solutions, when they are available.

Recibido: Septiembre 1996

## INTRODUÇÃO

Apesar dos significativos avanços alcançados no desenvolvimento da teoria matemática e de algoritmos para o Método dos Elementos Finitos, a discretização de um determinado problema depende, na maioria dos casos, do bom senso do analista e das experiências adquiridas na solução de outros problemas. No caso de os resultados serem julgados ruins, a discretização deve ser refeita. Dessa forma, é razoável supor que se na concepção do modelo a intuição do analista falhou, o mesmo pode acontecer no julgamento da validade dos resultados<sup>1</sup>.

Devido a estas incertezas, a possibilidade de se melhorar automaticamente a qualidade de uma solução numérica tornou-se uma questão de grande interesse em Mecânica Computacional. A solução aproximada, obtida através do Método dos Elementos Finitos, pode ser melhorada mediante a implementação de estratégias adaptativas, que consistem na modificação automática do modelo nas regiões do domínio onde a precisão não é satisfatória. Assim, neste trabalho são apresentadas as versões adaptativas  $h$ ,  $p$  e  $hp$  do Método dos Elementos Finitos no contexto do problema de flexão elástica de placas de Reissner-Mindlin.

### Estratégias adaptativas

As técnicas de refino adaptativo de malhas de elementos finitos são, geralmente, baseadas na mudança de localização dos nós sem alterar a topologia da malha (refino  $r$ ), no refinamento da malha através do aumento do número de elementos (refino  $h$ ), no aumento da ordem polinomial dos elementos (refino  $p$ ) ou através de combinações destes; principalmente dos refinos  $h$  e  $p$  (refino  $hp$ ).

Nos métodos adaptativos está implícita a capacidade de se avaliar localmente o erro de discretização, fornecendo uma medida da qualidade da solução aproximada. Mediante esta informação, as técnicas de refino acima mencionadas podem ser utilizadas para melhorar de forma eficiente a solução obtida.

### Versão $h$

No refino  $h$  da malha, a ordem polinomial das funções de interpolação dos elementos permanece constante, enquanto o tamanho dos mesmos é modificado em função de uma estimativa de erro calculada localmente.

A versão  $h$  adaptativa é adequada aos casos em que a solução não é suave em todo o domínio, tais como interfaces entre materiais diferentes, camadas limites, fronteira de uma frente plástica, etc.

### Versão $p$

Esta metodologia procura criar uma sequência de malhas aumentando-se sucessivamente a ordem polinomial das funções de interpolação em cada elemento e mantendo-se a topologia da malha inalterada, até que um nível aceitável de erro local seja alcançado.

A versão  $p$  adaptativa é adequada a problemas em que a solução analítica não possui pontos de singularidade. Neste caso, a energia de deformação da função erro

decrece exponencialmente com o aumento da ordem polinomial dos elementos, sendo, portanto, o método de controle do erro de discretização mais eficiente para esta classe de problemas<sup>9</sup>. Em contrapartida, a principal desvantagem da versão  $p$  é que, em problemas cuja solução não é suave, a solução aproximada pode oscilar nas regiões de singularidade.

Outra desvantagem deste método é que o enriquecimento das funções de interpolação de cada elemento, em função de uma distribuição adequada do erro, produz uma malha não conforme que deve ser compatibilizada através de alguma técnica impedindo, com isso, a utilização de códigos comuns de análise por elementos finitos.

### Versão $hp$

Neste caso as estratégias  $h$  e  $p$  são combinadas, obtendo-se então o método mais eficiente de controle de erro para uma vasta classe de problemas<sup>1</sup>, sendo este o motivo do grande interesse no refinamento  $hp$  adaptativo, apesar do inconveniente de que as estruturas de dados capazes de suportar versões combinadas são extremamente complexas.

Existem várias formas de desencadear um refino  $hp$  adaptativo de uma malha de elementos finitos. Uma delas, e a mais utilizada, é fazer primeiramente um refino  $h$  adaptativo da malha, até captar as singularidades, caso presentes no problema analisado, e em seguida realizar um refino  $p$  uniforme até atingir uma precisão pré-estabelecida. Outra maneira é fazer, sob algum critério, uma projeção simultânea dos parâmetros  $h$  e  $p$  da malha em cada iteração do problema, até atingir uma precisão aceitável.

## A BASE HIERÁRQUICA TRIANGULAR DE WEBB E ABOUCHACRA

Sabe-se que o procedimento padrão para interpolar os deslocamentos tem a vantagem de atribuir um significado físico aos deslocamentos, mas com o inconveniente de que as funções relativas a uma determinada ordem de aproximação diferem totalmente das de outra ordem e, como consequência, também as respectivas matrizes e vetores resultantes. Isso faz com que, por exemplo, em um processo  $p$  ou  $hp$  adaptativo, o sistema obtido na iteração anterior (para um determinado  $p$ ) não seja aproveitado. Este inconveniente pode ser resolvido utilizando-se uma base hierárquica, pois, neste caso, a matriz de rigidez e o vetor carregamento relativos a um grau  $p$  estarão contidos nas matrizes e vetores correspondentes aos graus polinomiais maiores ou igual a  $p + 1$ . Desta maneira pode-se aproveitar a matriz de rigidez e o respectivo vetor carregamento calculados numa iteração anterior, diminuindo assim o custo computacional na montagem de um problema auto-adaptativo.

Outra importante vantagem da utilização de uma base hierárquica nas versões  $p$  e  $hp$  é a facilidade de forçar a continuidade no contorno inter-elementos quando estes possuem ordens diferentes. Neste trabalho é utilizada a *Regra do Mínimo* para obter uma aproximação contínua (conforme) dos deslocamentos, a qual baseia-se no fato de que os coeficientes das funções de interpolação hierárquicas, com exceção dos coeficientes dos valores nodais, representam *desvios de linearidade*, podendo-se, dessa

forma, simplesmente eliminar a função de interpolação associada ao lado do elemento de maior grau, de modo a compatibilizar o lado comum aos elementos de ordens diferentes. Esse mesmo procedimento pode ser empregado para impor, automaticamente, as condições de contorno homogêneas nos modos hierárquicos.

Recentemente, foi proposto por Webb e Abouchacra<sup>12</sup> um novo conjunto de funções de interpolação hierárquicas triangulares de continuidade  $C^0$ . Tais funções são construídas a partir dos polinômios de Jacobi, cuja propriedade de ortogonalidade resulta em um melhor condicionamento da matriz de rigidez, quando comparado com outras funções hierárquicas para triângulos.

As funções hierárquicas de Webb e Abouchacra são organizadas em três categorias: funções nodais, funções de aresta e funções de face.

**Funções nodais:** associadas aos vértices do triângulo

Considerando um triângulo simplex mapeado em  $\xi$  e  $\eta$  (Figura1), pode-se definir três coordenadas naturais  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  e  $\zeta_3$ , da seguinte maneira

$$\zeta_1 = \frac{\text{Área } P23}{\text{Área } 123}, \quad \zeta_2 = \frac{\text{Área } 1P3}{\text{Área } 123} \quad \text{e} \quad \zeta_3 = \frac{\text{Área } 12P}{\text{Área } 123} \quad (1)$$

onde  $0 \leq (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \leq 1$  e  $\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 1$ .

Dessa forma, as três primeiras funções de interpolação são dadas por

$$\begin{aligned} N_1 &= \zeta_1 \\ N_2 &= \zeta_2 \\ N_3 &= \zeta_3 \end{aligned} \quad (2)$$

Note que estas são as funções lineares usuais para triângulos.

**Funções de aresta:** associadas aos lados do triângulo

As funções de interpolação associadas aos lados do triângulo, para a  $n$ -ésima ordem, são escritas da seguinte maneira

$$\begin{aligned} N_{a+1} &= \zeta_1 \zeta_2 P_{i-1}^{(2,2)} (\zeta_2 - \zeta_1) \\ N_{a+2} &= \zeta_2 \zeta_3 P_{i-1}^{(2,2)} (\zeta_3 - \zeta_2) \\ N_{a+3} &= \zeta_3 \zeta_1 P_{i-1}^{(2,2)} (\zeta_1 - \zeta_3) \end{aligned} \quad (3)$$

onde  $a = \frac{1}{2}p(p+1)$ ,  $p = 2, 3, \dots, n$  e  $P_i^{(\alpha,\beta)}$  é o polinômio de Jacobi, definido em uma forma recursiva como

$$P_i^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{cx + e}{b} P_{i-1}^{(\alpha,\beta)}(x) - \frac{f}{b} P_{i-2}^{(\alpha,\beta)}(x) \quad (4)$$

onde  $P_{-1}^{(\alpha,\beta)} = 0$ ,  $P_0^{(\alpha,\beta)} = 1$  e as constantes  $b, c, e$  e  $f$  são calculadas como

$$\begin{aligned} u &= i - 1, \quad g = \alpha + \beta + i, \quad s = g + u, \quad h = s + 1, \quad t = s - 1 \\ b &= 2igt, \quad c = hst, \quad e = s(\alpha^2 - \beta^2), \quad f = 2(\alpha + u)(\beta + u)h \end{aligned} \quad (5)$$

**Funções de face:** associadas aos modos internos

Finalmente, as funções de face são construídas como segue

$$N_{a+4+i} = \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 (1 - \zeta_3)^k P_i^{(2,2k+5)} (1 - 2\zeta_3) P_k^{(2,2)} \left( \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{1 - \zeta_3} \right) \quad (6)$$

onde  $k = p - 3 - i$ .

O esquema da numeração utilizado neste trabalho para o conjunto de funções  $N_i$  (eqs. 2,3 e 6) pode ser visto na Figura 1b.

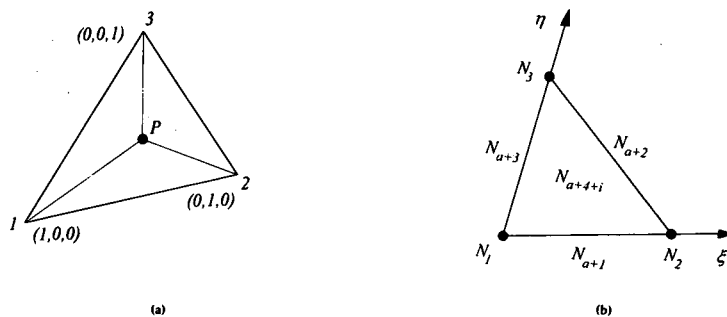


Figura 1. Elemento Mestre

É importante observar que somente os coeficientes das funções hierárquicas associados aos vértices representam deslocamentos nodais, os demais graus de liberdade estão associados à *desvios da linearidade*<sup>1</sup>.

A geração automática do espaço de funções de interpolação hierárquicas  $N_i$  e de suas derivadas em relação a  $\xi$  e  $\eta$  é feita utilizando-se o software *Mathematica* versão 2.2. O algoritmo implementado pode ser visto no Apêndice A.

Uma complicação adicional quando utiliza-se estas funções base é que, se os elementos são numerados sempre no sentido anti-horário, existe uma incompatibilidade de sinal entre as funções de aresta ímpares comuns a dois elementos adjacentes. Isso significa que, para obter uma malha conforme em todo o domínio, deve-se corrigir o sinal de uma das funções incompatíveis.

Uma forma simples de resolver este problema é, antes de sobrepor a matriz de um elemento, verificar, para cada lado do elemento, se as equações correspondentes às funções de aresta ímpares pertencentes ao elemento vizinho já foram sobrepostas. Caso não tenham sido, as linhas e colunas relativas às funções de aresta ímpares da matriz do elemento que está sendo sobreposto devem ser multiplicadas por  $-1$ .

## O ESTIMADOR DE ERRO DE ZIENKIEWICZ E ZHU

Pela teoria de Elementos Finitos, o erro de discretização  $\mathbf{e}$  é uma decorrência do particionamento do domínio  $\Omega$  e da escolha das funções de interpolação<sup>9</sup>. Portanto, pode ser escrito como a diferença entre o valor exato da solução  $\mathbf{u}$  e o valor  $\mathbf{u}_p$  obtido numericamente, sendo dado por

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_p \quad (7)$$

A norma-energia do erro  $\|\mathbf{e}\|_E^2$  pode ser definida como

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 = \int_{\Omega} (\partial \mathbf{u} - \partial \mathbf{u}_p)^T \mathbf{D} (\partial \mathbf{u} - \partial \mathbf{u}_p) d\Omega \quad (8)$$

onde  $\partial$  é um operador diferencial e  $\mathbf{D}$  é a matriz constitutiva do material.

Uma forma mais conveniente de apresentar a equação (8) é em termos de tensões, ou seja

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_p)^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_p) d\Omega \quad (9)$$

Como não se conhece  $\boldsymbol{\sigma}$ , o cálculo da norma-energia do erro utilizando a equação (9) é ainda impossível. No entanto, uma estimativa do erro pode ser obtida se  $\boldsymbol{\sigma}$  for substituído por  $\boldsymbol{\sigma}^*$ , a qual é obtida a partir de um pós-processamento de  $\boldsymbol{\sigma}_p$ . Neste trabalho utiliza-se a Técnica da Projeção<sup>6</sup>, que consiste na obtenção de um campo de tensões contínuo mediante uma projeção de  $\boldsymbol{\sigma}_p$  nas funções base. Dessa forma, o campo de tensões será considerado contínuo em todo o domínio e escrito em termos de valores nodais, empregando-se a mesma base de funções de interpolação utilizada para interpolar os deslocamentos, ou seja,  $\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{N}\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*$ , onde  $\mathbf{N}$  é a matriz de funções de interpolação e  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*$  denota o vetor tensão nodal. Sendo assim, a equação (9) pode ser escrita como

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 = \int_{\Omega} (\mathbf{N}\bar{\boldsymbol{\sigma}}^* - \boldsymbol{\sigma}_p)^T \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{N}\bar{\boldsymbol{\sigma}}^* - \boldsymbol{\sigma}_p) d\Omega \quad (10)$$

A minimização da expressão (10) resulta no seguinte sistema de equações

$$\mathbf{m}\bar{\boldsymbol{\sigma}}^* = \mathbf{F} \quad (11)$$

sendo a matriz massa de densidade unitária  $\mathbf{m}$  e o vetor  $\mathbf{F}$  escritos, respectivamente, como

$$\mathbf{m} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\sigma}_p d\Omega \quad (12)$$

Este procedimento é equivalente a resolver um problema de mínimos quadrados<sup>6</sup>.

Necessita-se, agora, mostrar uma forma possível de utilizar o erro de discretização estimado para atingir uma precisão pré-estabelecida, mediante modificação dos parâmetros  $h$  e  $p$  da malha.

O processo de sucessivos refinamentos locais, até que seja obtida uma tolerância prescrita, não é eficiente. Como uma alternativa, é proposto por Zienkiewicz e Zhu<sup>13</sup> uma maneira de se obter uma malha quase ótima, através de uma equidistribuição do erro, sendo este menor do que um limite previamente estabelecido.

Seja  $\eta_{ad}$  o erro relativo global máximo admissível e dado por

$$\eta_{ad} = \frac{\|\mathbf{e}_{ad}\|_E}{\left(\|\mathbf{u}_p\|_E^2 + \|\mathbf{e}\|_E^2\right)^{1/2}} \quad (13)$$

na qual  $\mathbf{e}_{ad}$  é o erro máximo admissível  $\|\mathbf{u}_p\|_E^2$  é a norma-energia do deslocamento aproximado  $\mathbf{u}_p$ .

Partindo-se da premissa de que haja uma equidistribuição do erro em todos os elementos da malha, a equação (13) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \eta_{ad} &= \frac{\left(m \|\mathbf{e}_{ad}^e\|_E^2\right)^{1/2}}{\left(\|\mathbf{u}_p\|_E^2 + \|\mathbf{e}\|_E^2\right)^{1/2}} \\ &= \frac{\sqrt{m} \|\mathbf{e}_{ad}^e\|_E}{\left(\|\mathbf{u}_p\|_E^2 + \|\mathbf{e}\|_E^2\right)^{1/2}} \\ \|\mathbf{e}_{ad}^e\|_E &= \eta_{ad} \frac{\left(\|\mathbf{u}_p\|_E^2 + \|\mathbf{e}\|_E^2\right)^{1/2}}{\sqrt{m}} \end{aligned} \quad (14)$$

onde  $\|\mathbf{e}_{ad}^e\|_E$  é a norma-energia do erro admissível do  $e$ -ésimo elemento e  $m$  é o número de elementos da malha.

Dessa forma, pode-se definir o parâmetro de enriquecimento local da malha como

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{e}^e\|_E}{\|\mathbf{e}_{ad}^e\|_E} \quad (15)$$

Quando utiliza-se um refinamento  $p$  adaptativo da malha, tem-se que para  $\kappa > 1$  o elemento será enriquecido. Nesse trabalho, o incremento da ordem polinomial dos elementos é unitário em cada iteração. No entanto, pode-se fazer uma projeção (extrapolação) da solução obtida na  $i$ -ésima iteração de forma a estimar a nova ordem de um dado elemento, mediante uma análise da taxa de convergência local do elemento<sup>9</sup>.

Sabe-se que este tipo de estimador de erro não funciona bem para elementos de ordem elevada<sup>13</sup>, sendo portanto utilizado neste trabalho apenas como um indicador de erro nos problemas  $p$  adaptativos. O termo indicador de erro é empregado para denotar uma estimativa, geralmente grosseira, do erro em um determinado elemento da malha. Os indicadores de erro fornecem, apenas, informações para o controle de um refinamento adaptativo, não quantificando, de forma satisfatória, o erro de discretização cometido<sup>1</sup>.

No caso de tratar-se de um enriquecimento  $h$  adaptativo é necessário calcular o novo tamanho do elemento  $h_n^e$ , o que pode ser realizado assumindo uma convergência assintótica da solução de elementos finitos a nível global, ou seja

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq \alpha h^{\min(p,\lambda)} \quad (16)$$

onde  $\lambda$  é uma constante positiva que depende da intensidade das singularidades, caso presentes no problema.

Dessa forma, pode-se escrever a expressão elementar (15) como

$$\kappa \approx \frac{\alpha (h^e)^{\min(p,\lambda)}}{\alpha (h_n^e)^{\min(p,\lambda)}} \quad (17)$$

Sabe-se que para uma malha ótima a dependência de  $\lambda$  é eliminada<sup>13</sup>. Embora a malha não seja ótima, é bastante razoável prever o novo tamanho do elemento reescrevendo a equação (17) da seguinte maneira

$$h_n^e = \left( \frac{(h^e)^p}{\kappa} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (18)$$

Assim, a cada elemento  $e$  da malha, está associado um novo valor de tamanho ideal  $h_n^e$ .

## FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE FLEXÃO DE PLACAS SEMI-ESPESSAS

Considerando um sistema cartesiano de referência  $(x, y, z)$ , pode-se caracterizar uma placa como uma estrutura que possui uma dimensão muito pequena, comparada com as outras duas dimensões.

O domínio de interesse  $\Omega$  de uma placa é denotado da seguinte maneira

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in R^3 \mid z \in \left[ -\frac{t}{2}, \frac{t}{2} \right], (x, y) \in S \subset R^2 \right\} \quad (19)$$

sendo  $S$  a projeção do domínio  $\Omega$  sobre a superfície de referência e  $t$  a espessura da placa.



As equações cinemáticas de uma placa semi-espessa, segundo a teoria de Reissner-Mindlin, são aproximadas por<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &\approx -z\theta_x(x, y) \\ u_y(x, y, z) &\approx -z\theta_y(x, y) \\ u_z(x, y, z) &\approx w(x, y) \end{aligned} \quad (20)$$

sendo  $u_x$  e  $u_y$  os deslocamentos nas direções  $x$  e  $y$ ,  $u_z$  o deslocamento na direção transversal  $z$  e  $\theta_x$  e  $\theta_y$  as rotações da superfície de referência normal ao planos  $xz$  e  $yz$ , respectivamente.

Como na teoria de Reissner-Mindlin utiliza-se a hipótese de que a tensão normal transversal é nula ( $\sigma_z \approx 0$ ), o princípio dos trabalhos virtuais pode ser expresso da seguinte maneira<sup>8</sup>

$$\int_{\Omega} \left( \delta \boldsymbol{\varepsilon}_f^T \boldsymbol{\sigma}_f + \delta \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \boldsymbol{\sigma}_s - \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} \right) d\Omega - \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} dS = 0 \quad (21)$$

sendo  $\delta \mathbf{u}$  o vetor deslocamentos virtuais,  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}_f$  e  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}_s$  os vetores deformações virtuais devido à flexão e ao cisalhamento transversal, respectivamente,  $\boldsymbol{\sigma}_f$  as tensões devido à flexão,  $\boldsymbol{\sigma}_s$  as tensões devido ao cisalhamento transversal,  $\mathbf{b}$  o vetor força de corpo e  $\mathbf{q}$  o carregamento transversal distribuído por unidade de área (o carregamento de fronteira foi eliminado por simplicidade de apresentação).

Introduzindo em (21), as relações constitutivas, as equações cinemáticas linearizadas e as funções de interpolação de Webb e Abouchacra, pode ser obtido, após o processo de integração<sup>2</sup>, o sistema de equações

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_p = \mathbf{f} \quad (22)$$

sendo  $\mathbf{K}$  a matriz de rigidez global da estrutura,  $\mathbf{u}_p$  o vetor deslocamentos generalizado e  $\mathbf{f}$  o vetor carregamento consistente generalizado.

Particularizando-se a equação (11) para o estado de tensões atuantes em uma placa de Reissner-Mindlin, tem-se

$$\mathbf{m} \overline{\mathbf{M}}_f^* = \mathbf{F}_f \quad \text{e} \quad \mathbf{m} \overline{\mathbf{Q}}_s^* = \mathbf{F}_s \quad (23)$$

onde  $\overline{\mathbf{M}}_f^*$  é o vetor momento resultante suavizado e  $\overline{\mathbf{Q}}_s^*$  o vetor esforço cortante resultante suavizado. Os vetores  $\mathbf{F}_f$  e  $\mathbf{F}_s$  são dados, respectivamente, por

$$\mathbf{F}_f = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{M}_f d\Omega \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_s = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{Q}_s d\Omega \quad (24)$$

sendo  $\mathbf{M}_f$  o vetor momento resultante  $\mathbf{Q}_s$  e o esforço cortante resultante calculados via Elementos Finitos. É importante observar que a resolução do sistema de equações (23) é extremamente custosa. Uma alternativa para diminuir o custo computacional deste processo é desenvolver uma forma de diagonalizar a matriz massa  $\mathbf{m}$ .

Neste trabalho adotou-se uma forma alternativa para diminuir o custo no cálculo de  $\overline{\mathbf{M}}_f^*$  e  $\overline{\mathbf{Q}}_s^*$ , que consiste em resolver (23) a nível de elemento e em seguida fazer uma média aritmética dos valores nodais encontrados. Muito embora isto possa parecer o

mesmo que calcular  $M_f$  e  $Q_s$  diretamente nos nós, este procedimento fornece resultados melhores, pois sabe-se que os pontos de integração são locais onde obtém-se os melhores valores para as tensões<sup>7</sup>.

## ASPECTOS COMPUTACIONAIS

O problema da implementação computacional de novos procedimentos em um programa de Elementos Finitos visando aproveitar a estrutura computacional já existente, pode tornar-se extremamente trabalhoso quando utiliza-se uma filosofia de programação procedural. Neste sentido, a filosofia de programação orientada a objetos fornece uma estrutura de trabalho que induz o programador a desenvolver seus códigos de forma modular, organizando o trabalho em classes. Esta particularidade, quando devidamente utilizada, oferece vantagens no gerenciamento de grandes estruturas computacionais, na atualização do código e na incorporação de novos procedimentos.

Neste trabalho são exploradas as potencialidades oferecidas pela filosofia de programação orientada a objetos, mediante a utilização dos recursos já existentes no ACDPOOP<sup>5</sup>, ACDPFEM<sup>4</sup> e no gerador de malhas 2D ARANHA<sup>3</sup>, o qual baseia-se em técnicas *não estruturadas frontais* para discretização de domínios arbitrários, e a implementação de novos procedimentos (classes) compatíveis com estes, de modo a desenvolver uma estrutura computacional, capaz de gerenciar a complexidade das informações inerentes a versões  $h$ ,  $p$  e  $hp$  adaptativas. Assim, durante o processo iterativo, esta estrutura computacional permite gerenciar, entre outros:

- a) O aumento do número de graus de liberdade associados com cada modo hierárquico;
- b) O conseqüente aumento do tamanho das matrizes e vetores globais;
- c) A construção automática do espaço de funções de interpolação para qualquer ordem polinomial;
- d) A compatibilização das funções de interpolação entre elementos de diferentes ordens;
- e) A imposição automática das condições de contorno homogêneas nos modos hierárquicos;
- f) A compatibilização de sinal das funções de aresta ímpares de elementos adjacentes;
- g) O cálculo do erro e definição dos parâmetros  $h$  e  $p$  da nova malha.

É importante ressaltar ainda que, devido à característica modular dos procedimentos implementados neste trabalho, a aplicabilidade da estrutura computacional desenvolvida não se limita apenas à adaptabilidade de placas de Reissner-Mindlin, sendo facilmente estendida a outras classes de problemas.

## RESULTADOS NUMÉRICOS

Na análise dos resultados é discutido primeiramente o fenômeno de *locking*, caracterizado por uma excessiva rigidez da estrutura quando o modelo empregado possui uma espessura muito reduzida. Em seguida é realizado um estudo de convergência via enriquecimento  $h$ ,  $p$  e  $hp$  da malha, mediante uma análise comparativa entre as diversas técnicas de refino abordadas neste trabalho.

### Análise do fenômeno de *locking*

Para análise do fenômeno de *locking* são resolvidos numericamente três problemas submetidos a um carregamento transversal uniformemente distribuído, quais sejam, placa quadrada simplesmente apoiada (Figura 2), placa quadrada engastada (Figura 4) e placa circular engastada (Figura 6), sendo feita, em todos os casos, uma variação da espessura  $t$  do modelo.

#### Placa quadrada simplesmente apoiada

O problema de uma placa quadrada simplesmente apoiada, submetida a um carregamento transversal uniformemente distribuído é resolvido utilizando-se ordem polinomial  $p = 3$  e 4. O modelo empregado (Figura 2a) é discretizado com cinquenta elementos finitos, considerando a dupla simetria, como é mostrado na Figura 2b. As características geométricas da placa, as propriedades do material e a discretização utilizada são mostradas na Figura 2. Note que o parâmetro  $t$  do modelo é variado em uma faixa de  $10 \leq L/t \leq 10^6$ .

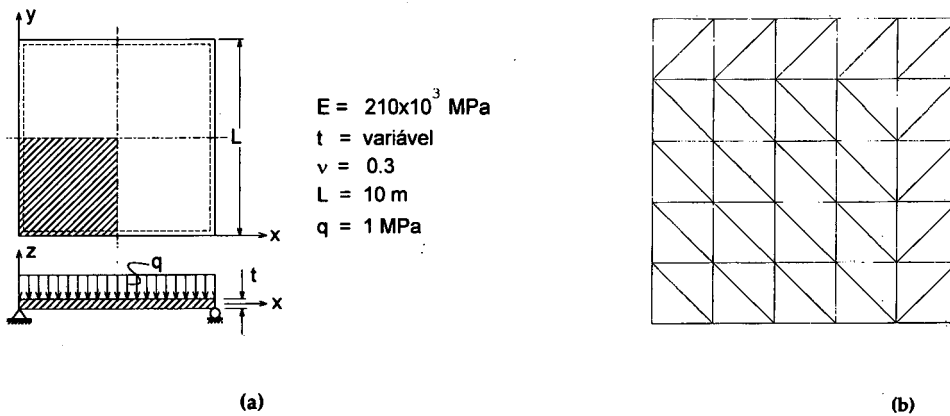


Figura 2. Placa quadrada simplesmente apoiada, submetida a um carregamento transversal uniformemente distribuído: a) modelo empregado e b) malha utilizada

Os deslocamentos transversais  $w$  no centro da placa são normalizados, utilizando-se a solução de placa fina de Timoshenko e Woinowsky-Krieger<sup>10</sup>, dada por

$$w_{\text{central}} = 0,004062 \frac{qL^4}{D} \quad (25)$$

sendo  $D$  a rigidez de flexão, isto é

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (26)$$

Os resultados obtidos são apresentados na Figura 3, onde nota-se uma concordância com a solução analítica de placa fina a partir da relação  $L/t \geq 10^2$ , o que era esperado, visto que para relações  $L/t$  dessa ordem o modelo de Reissner-Mindlin utilizado neste trabalho tende à teoria de placa fina de Kirchoff. Ressalva-se ainda que, neste caso, não é detectada qualquer perturbação nos resultados, inclusive para os problemas cuja espessura é extremamente reduzida, não manifestando-se, portanto, o fenômeno de *locking*.

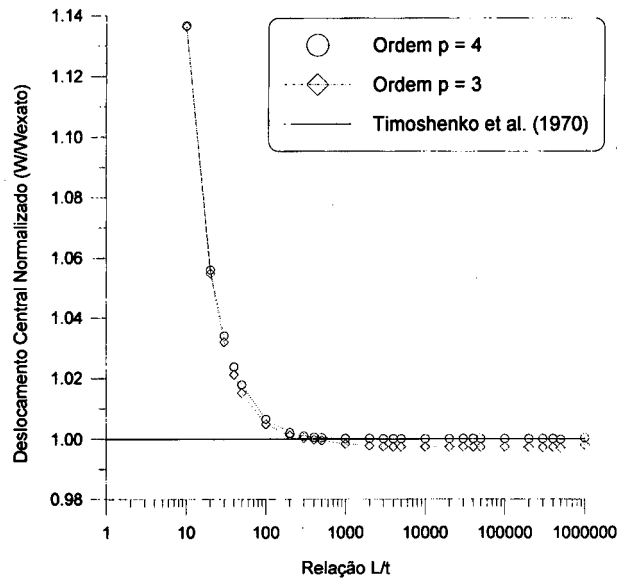


Figura 3. Deslocamento normalizado do nó central em função da relação  $L/t$

### ***Placa quadrada engastada***

Uma placa quadrada engastada, submetida a um carregamento transversal uniformemente distribuído é analisada. O modelo empregado (Figura 4a) é discretizado com cinquenta elementos finitos de ordem polinomial  $p = 3$  e 4, considerando a dupla simetria, como é mostrado na Figura 4b. As características geométricas da placa ( $10 \leq L/t \leq 10^6$ ), as propriedades material e a discretização utilizada são mostradas na Figura 4.

Os resultados obtidos para deslocamentos transversais normalizados no centro da placa são apresentados na Figura 5. A normalização dos deslocamentos é feita utilizando-se a solução de placa fina de Timoshenko e Woinowsky-Krieger<sup>10</sup>, que é escrita como

$$w_{\text{central}} = 0,001260 \frac{qL^4}{D} \quad (27)$$

na qual a rigidez de flexão  $D$  é dada por (26).

Pela análise da Figura 5, nota-se que os resultados obtidos para ordem polinomial  $p = 4$  são coincidentes com a solução analítica de placa fina a partir da relação  $L/t \geq 10^2$ . No entanto, quando utiliza-se ordem  $p = 3$  é verificado um enrijecimento do modelo na faixa  $10^2 \geq L/t \geq 10^4$  e uma posterior estabilização da resposta para  $L/t \geq 10^4$ .

Apesar da perturbação verificada nos resultados obtidos para ordem  $p = 3$ , o fenômeno de *locking* ainda não é caracterizado, uma vez que, mesmo com a redução da espessura do modelo, a solução mantém-se estável a partir de  $L/t = 10^4$ .

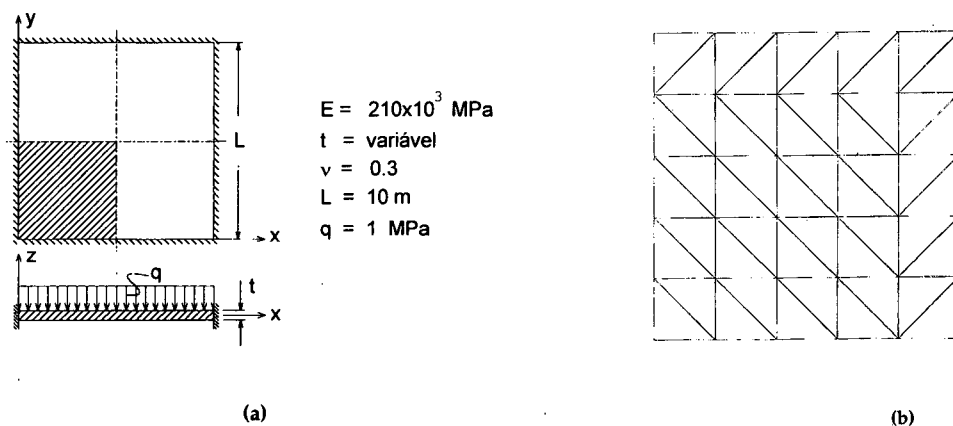


Figura 4. Placa quadrada engastada, submetida a um carregamento transversal uniformemente distribuído: a) modelo empregado e b) malha utilizada

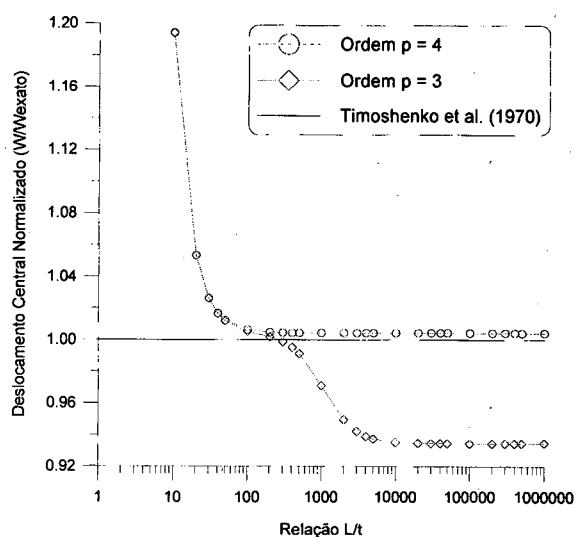


Figura 5. Deslocamento normalizado do nó central em função da relação  $L/t$

### Placa circular engastada

O problema de uma placa circular engastada, submetida a um carregamento transversal uniformemente distribuído, é resolvido utilizando-se ordem polinomial  $p = 3$  e 4. As características geométricas da placa, as propriedades material e a discretização utilizada são mostradas na Figura 6. Neste caso, o parâmetro  $t$  do modelo é variado em uma faixa de  $1 \leq 2R/t \leq 10^6$ . O modelo empregado (Figura 6a) é discretizado com noventa e um elementos finitos, considerando a dupla simetria, como é mostrado na Figura 6b.

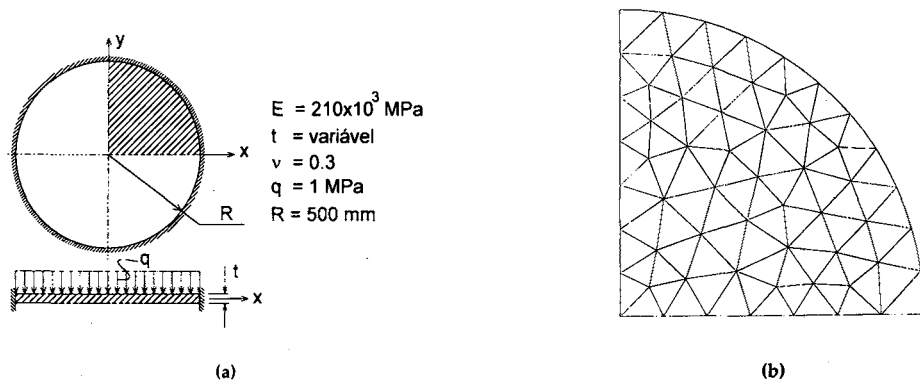


Figura 6. Placa circular engastada, submetida a um carregamento transversal uniformemente distribuído: a) modelo empregado e b) malha utilizada

Nesse caso é utilizada a solução de placa semi-espessa de Reissner, dada por Van der Wëeen<sup>11</sup>, para normalizar os deslocamentos, ou seja

$$w_{\text{central}} = \frac{qR^4}{64D} (1 + 2c) \quad (28)$$

na qual  $D$  é dada pela equação (26) e a constante  $c$  é escrita como

$$c = \frac{4}{3k(1 - \nu)} \left( \frac{t}{R} \right)^2 \quad (29)$$

sendo  $k$  o fator de correção de Reissner, dado por  $k = \frac{5}{6}$  (ref.<sup>7</sup>).

Pela análise dos resultados obtidos (Figura 7), nota-se uma concordância com a solução analítica de placa semi-espessa para ordem polinomial  $p = 4$  em uma ampla faixa  $2R/t$ . No entanto, quando o problema é resolvido utilizando-se ordem  $p = 3$  o *locking* manifesta-se provocando um apreciável enrijecimento no modelo, com a redução da espessura da placa a partir de  $2R/t \geq 2, 10^4$ .

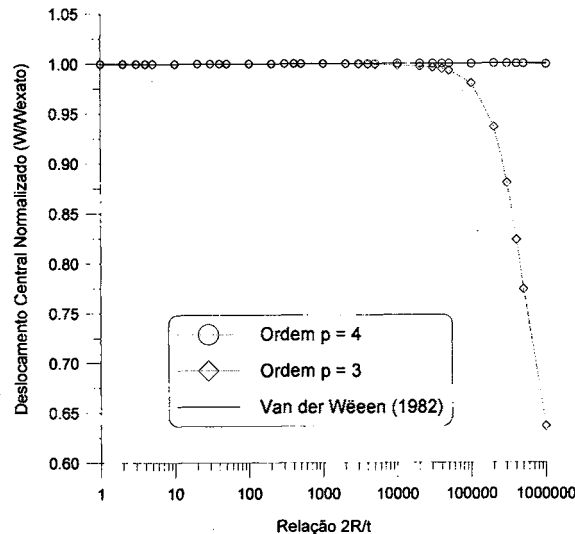


Figura 7. Deslocamento normalizado do nó central em função da relação  $2R/t$

É importante observar ainda que, neste caso, o fenômeno de *locking* está nitidamente caracterizado uma vez que não há qualquer sinal de recuperação da resposta para  $p = 3$  na faixa  $2R/t \geq 2, 10^4$ .

### Análise de convergência via enriquecimento $h$ , $p$ e $hp$ da malha

No estudo de convergência via enriquecimento  $h$ ,  $p$  e  $hp$  da malha, é resolvido numericamente o problema de uma placa quadrada engastada, submetida a uma carga concentrada no centro (Figura 8) e o problema de uma placa rômbrica simplesmente apoiada, submetida a um carregamento transversal uniformemente distribuído (Figura 13).

Neste trabalho, o processo de refinamento  $hp$  adaptativo é desencadeado mediante uma projeção simultânea dos parâmetros  $h$  e  $p$  da malha em cada iteração do problema, ou seja, primeiramente é feito um incremento unitário da ordem polinomial dos elementos cujo erro é maior que o aceitável ( $\kappa > 1$ ), em seguida é calculado o novo tamanho do elemento através da equação (18). Esse processo é repetido até que seja atingida uma precisão pré-estabelecida ( $\kappa \leq 1$ ).

Em ambos os casos é utilizado o estimador de erro de Zienkiewicz e Zhu<sup>13</sup>, descrito anteriormente, como indicador de erro para guiar o processo de refino adaptativo.

#### *Placa quadrada engastada*

Para análise comparativa entre as diversas técnicas de refino de malha estudadas neste trabalho é utilizado um modelo de placa quadrada engastada, submetida a um carregamento transversal concentrado no centro (Figura 8). Neste modelo também utilizou-se simetria, discretizando-se um quadrante da placa com cinquenta elementos finitos, como pode ser visto na Figura 8a.

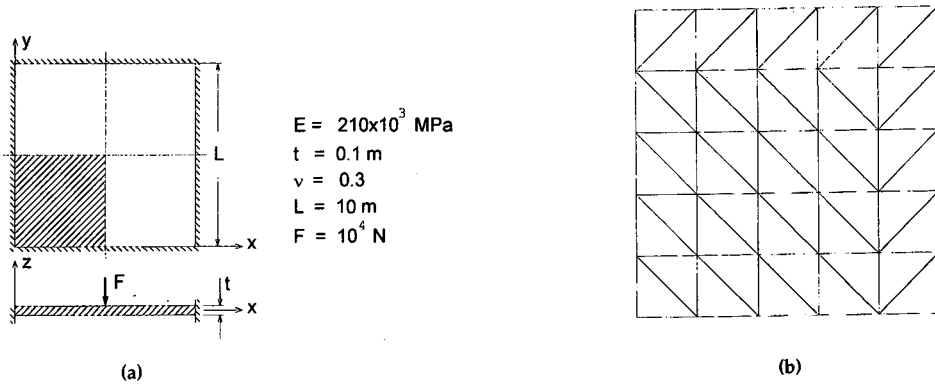


Figura 8. Placa quadrada engastada, submetida a um carregamento transversal concentrado no centro: a) modelo empregado e b) malha utilizada

Na Figura 9 são apresentados os resultados para deslocamento transversal no centro da placa, sendo este normalizado em relação à solução obtida para uma malha com  $p$  uniforme igual a 10. Neste gráfico pode-se notar claramente que quando utiliza-se refinamentos adaptativos da malha tem-se uma substancial diminuição do número de equações (nesse caso da ordem de quatro vezes), em relação ao refino  $p$  uniforme, para obter a mesma solução em termos de deslocamentos. Portanto, mediante um refino auto-adaptativo, consegue-se uma diminuição considerável do custo computacional para montagem e resolução do sistema de equações.

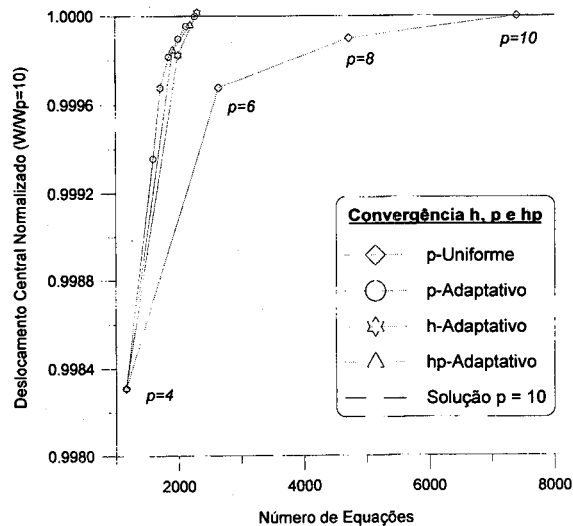


Figura 9. Convergência via enriquecimento  $h$ ,  $p$  e  $hp$  adaptativos, comparada ao refino  $p$  uniforme da malha



É interessante observar que, para este caso, as estratégias de refino adaptativo apresentam resultados muito similares, do ponto de vista de taxa de convergência, no entanto, ao utilizar-se um refino  $p$  adaptativo é necessário um número maior de iterações para chegar à mesma solução obtida via enriquecimento  $h$  e  $hp$  adaptativos.

As Figuras 10, 11 e 12 mostram o resultado final obtido após o processo iterativo de refinamento  $h$ ,  $p$  e  $hp$  adaptativos. Em todos os casos pode-se notar um refinamento concentrado na região próxima ao local onde é aplicado o carregamento, o que era esperado, visto que esta é uma região onde tem-se elevados gradientes de tensões, apresentando, portanto, os maiores erros de discretização. Isso mostra que o estimador de Zienkiewicz e Zhu<sup>13</sup>, fornece bons resultados como indicador de erro para as versões adaptativas aqui estudadas.

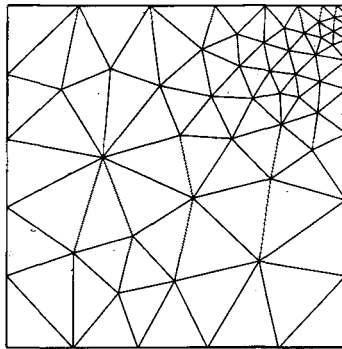
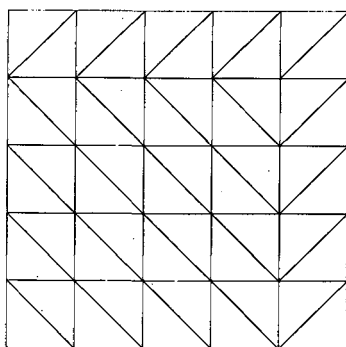
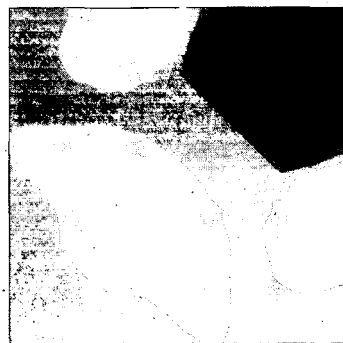


Figura 10. Refino obtido após processo  $h$  adaptativo (97 elementos)



(a)



(b)

INFORMATION:

Palette:

1.000000E+01
9.625000E+00
9.250000E+00
8.875000E+00
8.500000E+00
8.125000E+00
7.750000E+00
7.375000E+00
7.000000E+00
6.625000E+00
6.250000E+00
5.875000E+00
5.500000E+00
5.125000E+00
4.750000E+00
4.375000E+00
4.000000E+00

Figura 11. Refino obtido após processo  $p$  adaptativo: a) malha com 50 elementos e b) distribuição da ordem polinomial  $p$

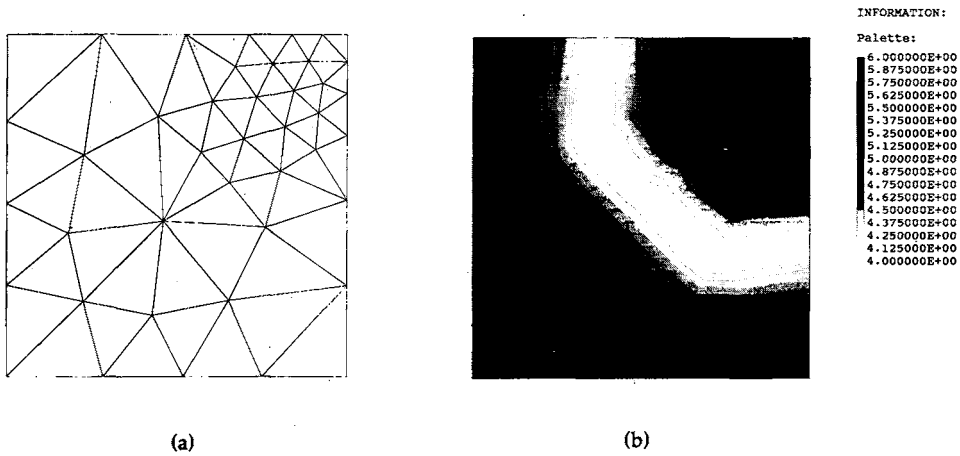


Figura 12. Refino obtido após processo  $hp$  adaptativo: a) malha com 62 elementos e b) distribuição da ordem polinomial  $p$

### *Placa rômbrica simplesmente apoiada*

Uma placa de forma rômbrica simplesmente apoiada, submetida a um carregamento transversal uniformemente distribuído (Figura 13) é analisada através das técnicas de refino  $p$  uniforme e  $h$ ,  $p$  e  $hp$  adaptativos, sendo feito, em seguida, um estudo comparativo entre as referidas estratégias. Neste caso, devido a dupla simetria do problema, também discretizou-se apenas um quarto do domínio com cinquenta e oito elementos finitos, conforme pode ser observado na Figura 13b.

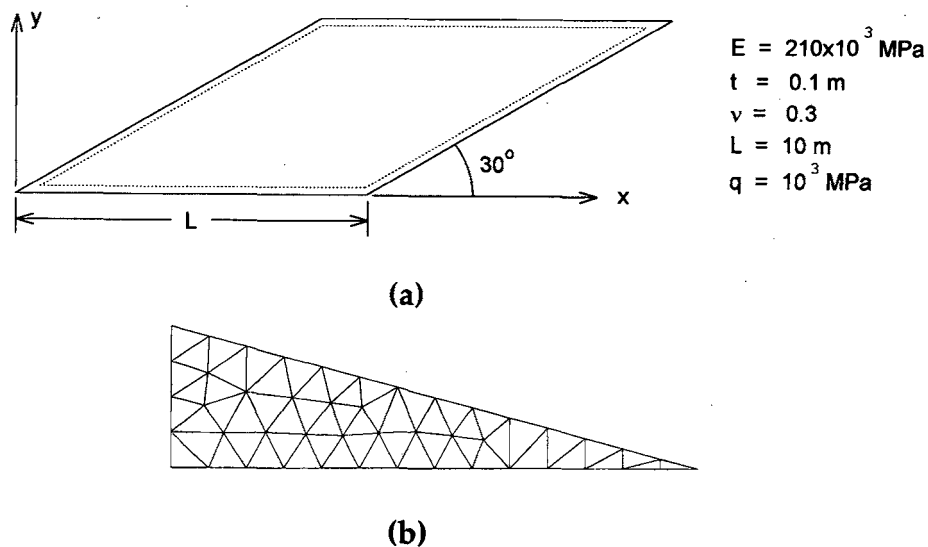


Figura 13. Placa rômbrica simplesmente apoiada, submetida a um carregamento transversal uniformemente distribuído: a) modelo empregado e b) malha utilizada.

Os resultados para deslocamentos do nó central, normalizados em relação à solução obtida com um refino  $p$  uniforme igual a 10, são mostrados na Figura 14, onde nota-se taxas de convergência muito superiores para os processos  $h$ ,  $p$  e  $hp$  adaptativos, frente ao refino  $p$  uniforme (equivalente a elementos finitos padrão). É possível notar ainda que, neste caso, os refinamentos  $p$  e  $hp$  adaptativos são superiores ao refino  $h$  adaptativo, do ponto de vista de taxa de convergência.

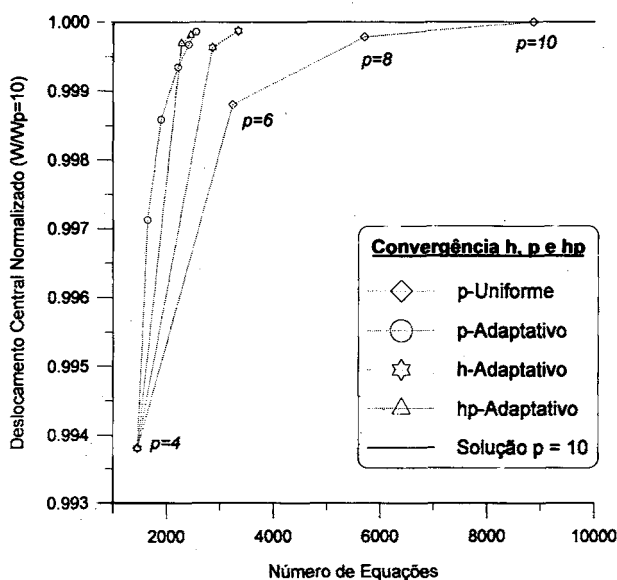


Figura 14. Convergência via enriquecimento  $h$ ,  $p$  e  $hp$  adaptativos, comparada ao refino  $p$  uniforme da malha.

No caso, de fazer uma comparação do processo de refinamento  $p$  adaptativo frente ao  $hp$  adaptativo, pode-se notar que ambos possuem uma elevada taxa de convergência, no entanto, o segundo converge mais rapidamente para a solução, necessitando apenas 3 iterações, contrário à estratégia  $p$  adaptativa que necessita de 6 iterações para obter aproximadamente a mesma resposta. Portanto, o refino  $hp$  adaptativo mostrou-se ser a técnica mais eficiente de controle do erro de discretização para o exemplo aqui estudado.

Os resultados finais após o processo iterativo de refinamento  $h$ ,  $p$  e  $hp$  adaptativos são mostrados nas Figuras 15, 16 e 17, onde nota-se uma semelhança qualitativa entre as malhas obtidas mediante as três metodologias, ou seja, o maior refino, em todos os casos, está localizado no vértice cujo ângulo interno é maior. Esta região corresponde a um local onde há gradientes de tensões elevados, qual seja, local onde tem-se os maiores erros de discretização, como pode ser visto na Figura 18.

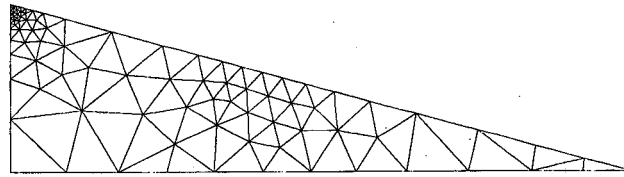


Figura 15. Refino obtido após processo  $h$  adaptativo (135 elementos)

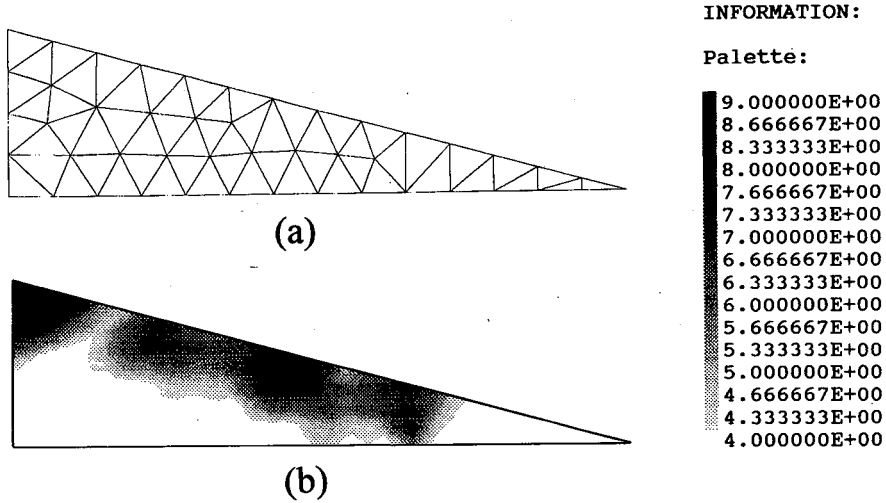


Figura 16. Refino obtido após processo  $p$  adaptativo: a) malha com 58 elementos e b) distribuição da ordem polinomial  $p$

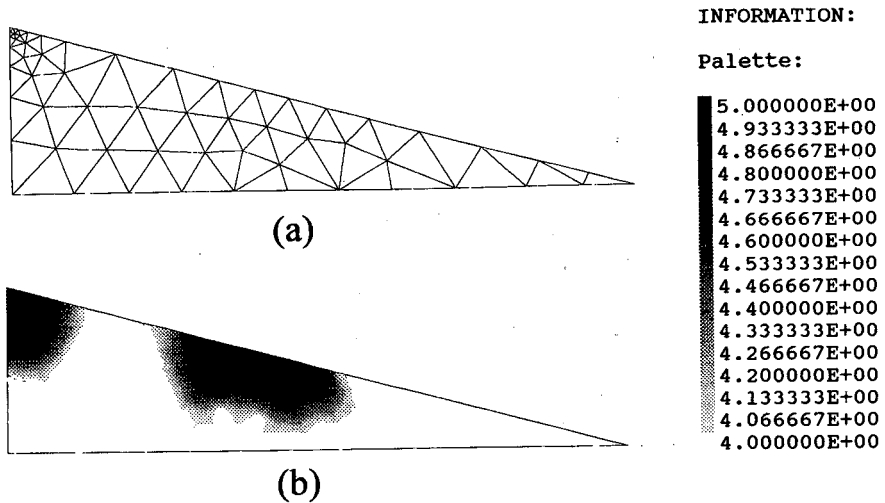


Figura 17. Refino obtido após processo  $hp$  adaptativo: a) malha com 79 elementos e b) distribuição da ordem polinomial  $p$

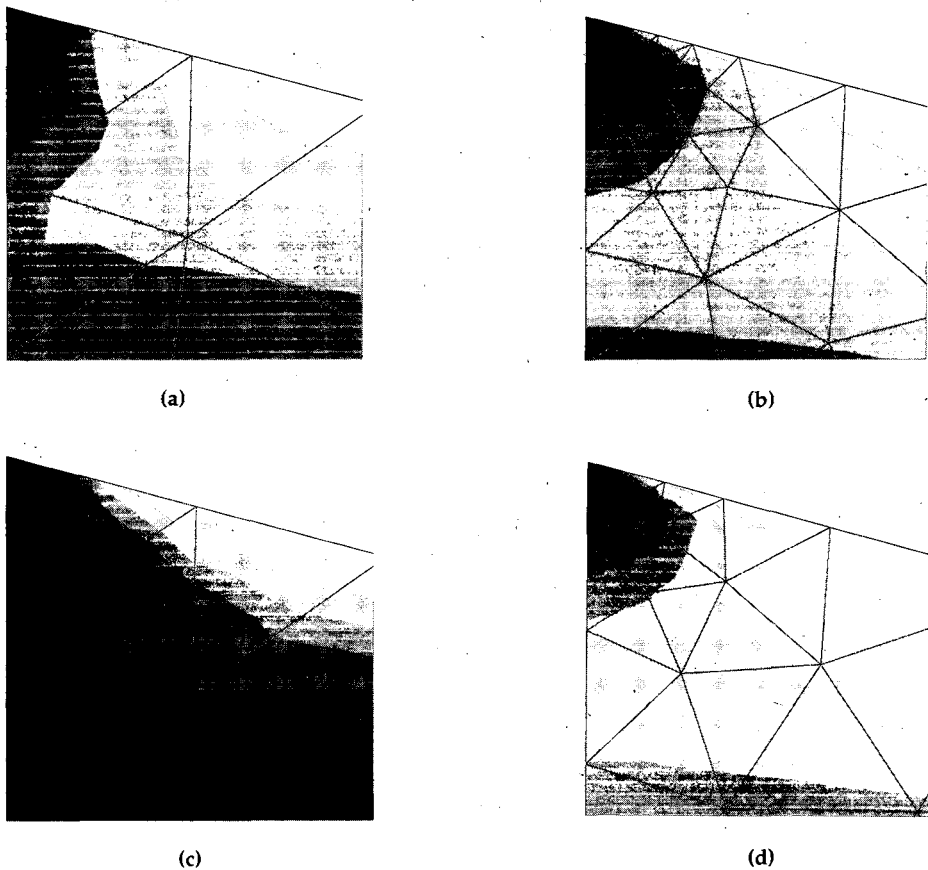


Figura 18. Tensão equivalente de von Mises: a) malha inicial; b) após refino  $h$  adaptativo; c) após refino  $p$  adaptativo e d) após refino  $hp$  adaptativo

## CONCLUSÕES

Os resultados numéricos apresentados anteriormente, mostram que, quando é utilizada a base hierárquica de Webb e Abouchacra<sup>12</sup> de ordem polinomial  $p = 3$ , o efeito de *locking* manifesta-se em alguns casos, provocando um enrijecimento no modelo. No entanto, para ordens polinomiais superiores a 4 não houve, nos casos analisados, qualquer perturbação da resposta, quando a espessura do modelo é reduzida. Isso sugere que seja utilizada ordem  $p \geq 4$  para discretização das equações de placas de Reissner-Mindlin através das funções de interpolação estudadas neste trabalho.

Com relação à análise de convergência via enriquecimento  $h$ ,  $p$  e  $hp$  apresentado anteriormente é possível verificar que através de técnicas de refino adaptativo atinge-se altas taxas de convergência, superiores às obtidas com malhas  $p$  uniforme, como era esperado.

Finalmente pode-se mencionar que mediante o uso de técnicas adaptativas evita-se com que haja um refinamento desnecessário nas regiões do domínio onde o erro é pequeno. Com isso consegue-se reduzir substancialmente as dimensões das matrizes de rigidez e correspondente vetores de carregamento, sendo verificado, portanto, uma diminuição apreciável dos custos computacionais para montagem e resolução do sistema

de equações, em relação aos métodos convencionais de análise por Elementos Finitos. Outra importante vantagem dos métodos adaptativos é que, com eles, possíveis erros de discretização decorrentes de falta de experiência ou desconhecimento do problema específico são corrigidos no processo iterativo.

### AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem aos demais integrantes do TACSOM-Theoretical, Applied and Computational Solid Mechanics Group (<http://www.lncc.br/feij>) pela permissão de utilizar as bibliotecas do ACDPOOP e ACDFEM no desenvolvimento deste trabalho. Agradecem também à agência de fomento à pesquisa CNPq, pelo apoio financeiro cedido.

### REFERÊNCIAS

1. C.A.M. Duarte, "Estudo da versão  $p$  do Método dos Elementos Finitos para Problemas de Elasticidade e de Potencial", Dissertação de Mestrado, GRANTE/EMC/UFSC, Florianópolis, SC, Brasil, (1991).
2. D.A. Dunavant, "High Degree Efficient Symmetrical Gaussian Quadrature Rules for the Triangle", *Int. J. Num. Meth. in Engng.*, Vol. **21**, pp. 1129–1148 (1985).
3. E.A. Fancello, "Análise de Sensibilidade, Geração Adaptativa de Malhas e o Método dos Elementos Finitos na Otimização de Forma em Problemas de Contato e Mecânica da Fratura", Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, (1993).
4. R.A. Feijóo, A.C.S. Guimarães y E.A. Fancello, "Algumas Experiencias en la Programación Orientada por Objetos y su Aplicación en el Método de los Elementos Finitos", *Relatório de Pesquisa e Desenvolvimento do Laboratório Nacional de Computação Científica*, N° 15/91, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, (1991).
5. A.C.S. Guimarães y R.A. Feijóo, "ACDP: Um Ambiente Computacional para Desenvolvimento de Programas", *Relatório de Pesquisa e Desenvolvimento do Laboratório Nacional de Computação Científica*, N° 027/89, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, (1989).
6. E. Hinton y J.S. Campbell, "Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Square Method", *Int. J. Num. Meth. in Engng.*, Vol. **8**, pp. 461–480, (1974).
7. T.J.R. Hughes, "*The Finite Element Method-Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*", Prentice-Hall International, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, USA, (1987).
8. J.N. Reddy, "*Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*", John Wiley & Sons, Co., New York, USA, (1984).
9. B. Szabó y I. Babuška, "*Finite Elements Analysis*", John Wiley & Sons, Co., New York, USA, (1991).
10. S.P. Timoshenko y S. Woinowsky-Krieger, "*Theory of Plates and Shells*", 2ª ed. McGraw-Hill Book Co., Singapore, (1970).
11. F. Van der Wëeen, F., "Applicaton of the Boundary Integral Equation Method to Reissner's Plate Model", *Int. J. Num. Meth. in Engng.*, Vol. **18**, pp. 1–10, (1982).
12. J.P. Webb y R. Abouchacra, "Hierarchal Triangular Elements Using Orthogonal Polynomials", *Int. J. Num. Meth. in Engng.*, Vol. **38**, pp. 245–257, (1995).
13. O.C. Zienkiewicz y J.Z. Zhu, "A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis", *Int. J. Num. Meth. in Engng.*, Vol. **24**, pp. 337–357, (1987).

## APPENDIX

Apêndice A. Algoritmo para Geração Automática do Espaço de Elementos Finitos de Webb & Abouchacra (*Mathematica 2.2*)

```

(* Calculo das Funcoes de Interpolacao Hierarquicas e Derivadas *)
(* para Elementos Triangulares J.P. Webb & R. Abouchacra, *)
(* "Hierarchal Triangular Elements Using Orthogonal Polynomials", *)
(* Int. Journal for Num. Methods in Eng., vol. 38, 245-257 (1995) *)

p = 10; (* Ordem polinomial arbitraria *)
alf = 2;
NumPsi = (p+1)(p+2)/2; (* Numero de funcoes de interpolacao *)

(* Calculo de Polinomio de Jacobi para "alf" = 2 e "bet" variavel *)
Do[
  P[0,bet] = 0; P[1,bet] = 1;
  Do[
    i = j - 1; u = i - 1; g = alf + bet + i; s = g + u;
    h = s + 1; t = s - 1; b = 2 i g t; c = h s t;
    e = s (alf^2 - bet^2); f = 2 (alf + u)(bet + u) h;
    P[j,bet] = ((c x+e)/b) P[j-1,bet] - (f/b) P[j-2,bet]
    , {j,2,p}
  ]
, {bet,0,20}
]

(* Calculo de Polinomio de Jacobi para "alf" = 2 e "bet" = 2 *)
Q1[0] = Q2[0] = Q3[0] = Q[0] = 0;
Q1[1] = Q2[1] = Q3[1] = Q[1] = 1;
Do[
  i = j - 1; u = i - 1; g = alf + 2 + i; s = g + u;
  h = s + 1; t = s - 1; b = 2 i g t; c = h s t;
  e = s (alf^2 - 4); f = 2 (alf + u)(2 + u) h;
  Q[j] = ((c y + e) / b) Q[j-1] - (f/b) Q[j-2];
  Q1[j] = ((c y1 + e) / b) Q1[j-1] - (f/b) Q1[j-2];
  Q2[j] = ((c y2 + e) / b) Q2[j-1] - (f/b) Q2[j-2];
  Q3[j] = ((c y3 + e) / b) Q3[j-1] - (f/b) Q3[j-2];
  , {j,2,p}
]

(* Vertice *)
Psi[1] = z1; Psi[2] = z2; Psi[3] = z3;

Do[
  aa = ip (ip + 1) / 2;
  (* Aresta *)
  y1 = z2 - z1;
  Psi[aa+1] = z1 z2 Q1[ip-1];
  y2 = z3 - z2;
  Psi[aa+2] = z2 z3 Q2[ip-1];
  y3 = z1 - z3;
  Psi[aa+3] = z3 z1 Q3[ip-1];
  Do[
    ni = ip - 3 - i;
    x = 1 - 2 z3;
    y = (z2 - z1)/(1 - z3);
    (* Face *)
    Psi[aa+4+i] = (z1 z2 z3 (1-z3)^ni) P[i+1,2 ni+5] Q[ni+1]
    , {i,0,ip-3}
  ]
, {ip,2,p}
]

```

```

(* Imprime Funcoes de Interpolacao e Derivadas *)
Do[
  Print["Psi[" , j , "]" = (", Numerator[Simplify[CForm[Psi[j]]]],")/",
    Denominator[Simplify[CForm[Psi[j]]]]
    , {j, 1, NumPsi}
  ]

(* Avalia em csi e eta para derivacao *)
z1 = 1-csi-eta;
z2 = csi;
z3 = eta;

(* Avalia Derivadas em Relacao a csi *)
Do[
  dCsiPsi[i] = D[Psi[i], csi];
  Print["dCsiPsi[" , i-1 , "]" = (", Numerator[Simplify[CForm[dCsiPsi[i]]]],")/",
    Denominator[Simplify[CForm[dCsiPsi[i]]]]
    , {j, 1, NumPsi}
  ]

(* Avalia Derivadas em Relação a eta *)
Do[
  dEtaPsi[i] = D[Psi[i], eta];
  Print["dEtaPsi[" , i-1 , "]" = (", Numerator[Simplify[CForm[dEtaPsi[i]]]],")/",
    Denominator[Simplify[CForm[dEtaPsi[i]]]]
    , {j, 1, NumPsi}
  ]

```