

# ELASTICIDAD BIDIMENSIONAL CON MÍNIMOS CUADRADOS MÓVILES

ADRIANA GIACOPINI  
HERNÁN ARRIETA  
y  
ENRIQUE PARDO

*Departamento de Ingeniería Mecánica  
División Soldadura y Fractura  
(INTEMA) Facultad de Ingeniería  
Juan B. Justo 302, 7600 Mar del Plata, Argentina*

## RESUMEN

Se presenta un esquema para la resolución de las ecuaciones de elasticidad bidimensional empleando aproximaciones sin red, particularizándose para interpolantes mínimos cuadrados móviles (IMCM). Con este método no es necesario discretizar el recinto en elementos, sino sólo definir un conjunto de nodos, lo que lo torna atractivo para resolver problemas tridimensionales, fronteras libres etc. Se emplea un principio variacional débil que permite imponer las condiciones de Dirichlet, las cuales no pueden ser impuestas a posteriori como en elementos finitos. Las ecuaciones son discretizadas usando interpolantes mínimos cuadrados móviles. Se analizan ejemplos con solución analítica, discutiéndose los diversos aspectos de la aproximación numérica. Se discuten las ventajas de este interpolante frente a otros métodos sin red y se propone un esquema de integración óptimo.

## BIDIMENSIONAL ELASTICITY USING MOVING LEAST SQUARES INTERPOLANTS

### SUMMARY

A numerical scheme for bidimensional linear elasticity using moving least squares interpolants is presented. With this method it is not necessary to divide the domain into elements, but just to define a set of nodes, which turns it attractive for three dimensional problems, high gradient fields, free boundary problems etc. A variational principle is used to enforce Dirichlet boundary conditions, since they can not be imposed a posteriori as in the finite element method. The equations are then discretized using MLS interpolants. Some examples with analytical solution are analyzed, and several aspects of the numerical approximation are discussed.

Recibido: Febrero 1997

## INTRODUCCIÓN

Cuando se evalúa la Integridad Estructural, la simulación de la respuesta mecánica de componentes en zonas críticas puede realizarse mediante modelado matemático, generalmente aplicando métodos computacionales. Dentro de estos métodos, el procedimiento más extendido es el método de elementos finitos (MEF). A pesar de sus enormes virtudes, el MEF presenta inconvenientes para la resolución de problemas tridimensionales con geometrías complejas y altos gradientes. La principal dificultad reside en la generación de mallas adecuadas, lo cual puede demandar mucho esfuerzo y tiempo de ingeniería superando con creces el tiempo de cómputo. Para problemas tridimensionales lineales resulta más efectivo el método de elementos de contorno (MEC). El costo de ingeniería con MEC resulta inferior al de MEF ya que sólo requiere discretizar el contorno. A pesar de las ventajas del MEC, éste queda limitado a problemas que no requieran “integrales de volumen” excluyendo problemas ingenieriles, tales como no linealidades, campos térmicos transitorios con elevados gradientes etc.

Actualmente se están investigando métodos alternativos que no requieren dividir al cuerpo en “elementos” y que por ello reciben el nombre genérico de métodos sin red (meshless methods), existiendo gran variedad de candidatos. Uno especialmente promisorio se basa en el uso de interpolantes mínimos cuadrados móviles (IMCM) o ponderados, que sólo requiere una representación de contorno del dominio y un grupo de nodos interiores, sin requerir de ningún tipo de conectividad. Hasta el momento se han reportado al menos dos formas de este método. Nayroles<sup>1</sup> y otros, quienes fueron los primeros en emplear esta clase de métodos, usaron muy bajo orden de cuadratura y no hicieron cumplir las condiciones de borde esenciales con exactitud. Ellos llamaron a su método “elementos difusos” y no observaron que utilizaron interpolantes mínimos cuadrados móviles ya desarrollados por Shepard<sup>2</sup> y Lancaster y Salkauskas<sup>3</sup>.

Posteriormente, Belytschko<sup>4</sup> y otros desarrollaron una forma alternativa que acentúa la precisión. Para ello usaron multiplicadores de Lagrange para hacer cumplir las condiciones de borde esenciales y un esquema de integración de alto orden de cuadratura basado en una red de celdas regulares que se extendían más allá del dominio de cálculo. De esta forma, para problemas de elasticidad se logran altas velocidades de convergencia y buena resolución de gradientes excesivos localizados. Sin embargo, el uso de multiplicadores de Lagrange aumenta el costo de resolver las ecuaciones algebraicas lineales. Los mismos autores, Belytschko et al.<sup>5</sup> desarrollaron una nueva implementación basada en un principio variacional modificado, en el que los multiplicadores de Lagrange son reemplazados por su significado físico, la tracción. Así las ecuaciones resultantes son simétricas y banda. A esto agregaron la generación de funciones base ortogonales ponderadas, eliminándose la necesidad de invertir las matrices generadas por los IMCM en cada punto de cuadratura.

- Por su formulación, el uso de IMCM junto con criterio de Galerkin, puede ser imbuido de la generalidad del método de elementos finitos. Las principales ventajas del método de Galerkin difuso comparado con el método de elementos finitos, son que sólo se necesita una red de nodos y una descripción del contorno para desarrollar las ecuaciones discretas ( la red de elementos no es necesaria).

- La variable dependiente y su gradiente son continuos en todo el dominio y un post-procesamiento para obtener un campo uniforme de gradientes es innecesario.

En el presente trabajo se muestra una implementación de IMCM empleada para resolver problemas elásticos vía un principio variacional. El trabajo se organiza con el siguiente orden: el punto 2 desarrolla la formulación variacional para este método que puede ser usada con otros métodos, el punto 3 se discute la formulación discreta resultante, el punto 4 analiza el empleo de distintas bases para la generación de las funciones de forma, el punto 5 detalla las particularidades de la implementación numérica, el punto 6 muestra algunos ejemplos numéricos y punto 7 detalla algunas de las conclusiones obtenidas.

## FORMULACIÓN VARIACIONAL

En el método de elementos finitos los coeficientes  $u^h$  de la aproximación

$$u^h(x) = \sum N_i(x) \cdot u_i$$

coinciden con valores nodales de la incógnita. Por ello las condiciones de contorno de Dirichlet no requieren ser impuestas por el principio variacional utilizado. Basta con eliminar los valores conocidos (datos de Dirichlet) del sistema final de ecuaciones lineales, lo que puede lograrse con diversos artificios. Sin embargo, si se utilizan aproximaciones más generales, los coeficientes no representan valores del campo incógnita en posiciones fijas del espacio. En este caso las condiciones esenciales deben ser impuestas por el principio variacional. Un modo de lograrlo es agregar esas condiciones mediante un multiplicador de Lagrange, tal como lo hace Belyschko *et al.*<sup>5</sup>. Sin embargo, esto tiene el inconveniente de agregar incógnitas adicionales y conduce a sistemas de ecuaciones no simétricos. El problema elástico lineal puede expresarse en forma diferencial como hallar el campo de desplazamientos  $u(x)$  que satisfaga la ecuación de equilibrio

$$\operatorname{div} \sigma = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (1)$$

con  $\sigma = \mathbf{D} \cdot \varepsilon$ , donde  $\mathbf{D}$  es el tensor de elasticidad y la deformación viene dada por

$$\varepsilon = \underline{\nabla}^s \times \underline{u}$$

Las condiciones de contorno son

$$\underline{u} - \bar{u} = 0 \quad \text{en } \Gamma_u \quad (2)$$

$$\underline{t} - \bar{t} = 0 \quad \text{en } \Gamma_t \quad (3)$$

Un principio variacional adecuado puede obtenerse buscando el valor estacionario del funcional energía disipada, restringido por las condiciones de Dirichlet mediante un multiplicador de Lagrange

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \cdot dv - \int_{\Gamma_t} \bar{\boldsymbol{t}} \cdot \underline{\boldsymbol{u}} \cdot ds + \int_{\Gamma_u} \underline{\boldsymbol{\lambda}} \cdot (\underline{\boldsymbol{u}} - \bar{\underline{\boldsymbol{u}}}) \cdot ds \quad (4)$$

Como  $E$  depende de dos campos,  $\boldsymbol{u}$  y  $\boldsymbol{\lambda}$  la estacionariedad requiere

$$\delta E = \frac{\partial E}{\partial \boldsymbol{u}} \cdot \delta \boldsymbol{u} + \frac{\partial E}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \cdot \delta \boldsymbol{\lambda} = 0 \quad (5)$$

de donde resulta

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta \underline{\boldsymbol{u}} \cdot dv - \int_{\Gamma_t} \bar{\boldsymbol{t}} \cdot \delta \boldsymbol{s} + \int_{\Gamma_u} \underline{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \delta \boldsymbol{s} + \int_{\Gamma_u} \delta \underline{\boldsymbol{\lambda}} \cdot (\underline{\boldsymbol{u}} - \bar{\underline{\boldsymbol{u}}}) \cdot ds = 0 \quad (6)$$

Integrando por partes el primer término se tiene

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta \underline{\boldsymbol{u}} \cdot dv = \int_{\Gamma_t} \bar{\boldsymbol{t}} \cdot \delta \boldsymbol{s} - \int_{\Omega} \text{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \underline{\boldsymbol{u}} \cdot dv \quad (7)$$

Reemplazando (7) en (6) queda

$$- \int_{\Omega} \text{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \underline{\boldsymbol{u}} \cdot dv + \int_{\Gamma_t} (\bar{\boldsymbol{t}} - \underline{\boldsymbol{t}}) \cdot \delta \underline{\boldsymbol{u}} \cdot ds + \int_{\Gamma_u} (\underline{\boldsymbol{t}} + \underline{\boldsymbol{\lambda}}) \cdot \delta \underline{\boldsymbol{u}} \cdot ds + \int_{\Gamma_u} \delta \underline{\boldsymbol{\lambda}} \cdot (\underline{\boldsymbol{u}} - \bar{\underline{\boldsymbol{u}}}) \cdot ds = 0 \quad (8)$$

de donde se deduce que

$$\boldsymbol{\lambda} = -\boldsymbol{t} \quad (9)$$

Reemplazando (9) en (6) se obtiene, finalmente, una formulación débil general, que impone explícitamente las condiciones de Dirichlet

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \cdot \delta \underline{\boldsymbol{u}} \cdot dv - \int_{\Gamma_t} \bar{\boldsymbol{t}} \cdot \delta \boldsymbol{s} - \int_{\Gamma_u} \underline{\boldsymbol{t}} \cdot \delta \boldsymbol{s} - \int_{\Gamma_u} \delta \boldsymbol{t} \cdot (\underline{\boldsymbol{u}} - \bar{\underline{\boldsymbol{u}}}) = 0 \quad (10)$$

Antes de pasar a la formulación discreta, es interesante observar que la (8) puede escribirse; en virtud de (9) como

$$- \int_{\Omega} \text{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{u} \cdot dv + \int_{\Gamma_t} (\underline{\boldsymbol{t}} - \bar{\boldsymbol{t}}) \cdot \delta \boldsymbol{u} \cdot ds - \int_{\Gamma_u} (\underline{\boldsymbol{u}} - \bar{\underline{\boldsymbol{u}}}) \cdot \delta \boldsymbol{t} \cdot ds = 0 \quad (11)$$

La (11) es, simplemente, una identidad integral que expresa la ecuación (1) con las condiciones (2) y (3) en forma de residuos ponderados y que podría tomarse como punto de partida para obtener la ecuación (10).

## FORMULACIÓN DISCRETA

Para obtener un sistema discreto de ecuaciones algebraicas es conveniente primero reescribir la (10) utilizando la notación habitual en mecánica computacional. Sea

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \mathbf{L} \cdot \underline{u} \quad \text{donde} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \mathbf{D} \cdot \varepsilon \quad \text{donde} \quad \mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{t} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad \text{donde} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}$$

siendo  $\hat{n} = (n_x \ n_y)$  el versor normal exterior. Con esta notación la (10) se escribe

$$\int_{\Omega} \delta \underline{\varepsilon}^t \cdot \mathbf{D} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot dv - \int_{\Gamma_t} \underline{t} \cdot \delta \underline{u} \cdot ds - \int_{\Gamma_u} \underline{\varepsilon}^t \cdot \mathbf{D}^t \cdot \mathbf{N}^t \cdot \delta \underline{u} \cdot ds - \int_{\Gamma_u} \delta \underline{\varepsilon}^t \cdot \mathbf{D}^t \cdot \mathbf{N}^t \cdot (\underline{u} - \bar{u}) \cdot ds = 0 \quad (12)$$

Proponiendo una aproximación de la forma

$$\underline{u} = \sum \varphi_i \cdot \underline{u}_i \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \end{pmatrix}$$

y llamando, como es habitual

$$\mathbf{B} = \mathbf{L} \cdot \varphi_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$

se tiene finalmente

$$\sum_i^N \delta u_j^t \left\{ \sum_j^N \left[ \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_j \cdot dv - \int_{\Gamma_u} \varphi_i \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_j \cdot ds - \int_{\Gamma_u} \mathbf{B}_i^t \cdot \mathbf{D}^t \cdot \mathbf{N}^t \cdot \varphi_j \right] \cdot \underline{u}_i - \int_{\Gamma_t} \varphi_i \cdot \underline{t} \cdot ds + \int_{\Gamma_u} \mathbf{B}_i^t \cdot \mathbf{D}^t \cdot \mathbf{N}^t \cdot \bar{u} \cdot ds \right\} = 0 \quad (13)$$

que es el sistema de ecuaciones algebraicas buscado. Es evidente, por simple inspección, que la matriz del sistema es simétrica cualquiera sea la base elegida. Asimismo esta matriz será banda si los  $\varphi_i$  tienen soporte local y están juiciosamente ordenados.

### Tratamiento de las condiciones de contorno esenciales

La ecuación (13) sólo es estrictamente correcta si se imponen ambas componentes del desplazamiento en la frontera de Dirichlet. Lo más frecuente es, sin embargo, que sólo una componente (normal o tangente) está impuesta en un punto dado. Para imponer esto, consideremos un segmento de  $\Gamma_u$  y llamemos  $\hat{n}$  y  $\hat{b}$  a los versores normal y tangente, como se indica en la Figura 1.

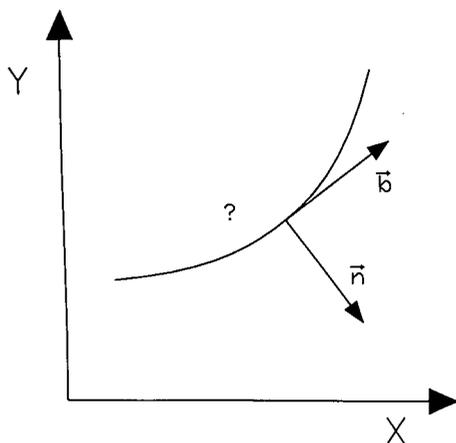


Figura 1

En componentes se tiene

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} \quad \hat{b} = \begin{pmatrix} -n_y \\ n_x \end{pmatrix}$$

El vector desplazamiento se puede descomponer como

$$\underline{u} = (\underline{u} \cdot \hat{n}) \cdot \hat{n} + (\underline{u} \cdot \hat{b}) \cdot \hat{b} \quad (14)$$

que puede escribirse como

$$\underline{u} = S_n \cdot \underline{u} + S_b \cdot \underline{u}$$

donde

$$\begin{aligned} S_n &= \begin{pmatrix} n_x^2 & n_x \cdot n_y \\ n_x \cdot n_y & n_y^2 \end{pmatrix} \\ S_b &= \begin{pmatrix} n_y^2 & -n_x \cdot n_y \\ -n_x \cdot n_y & n_x^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

Finalmente, el desplazamiento impuesto puede representarse como

$$\underline{\bar{u}} = u_n \cdot \hat{n} + u_b \hat{b}$$

Es conveniente definir

$$\mathbf{S} = \begin{cases} \mathbf{S}_n & \text{si } \bar{u} \text{ es normal} \\ \mathbf{S}_b & \text{si } \bar{u} \text{ el tangente} \end{cases} \quad (16)$$

Evidentemente, si  $u$  tiene tanto componente normal como tangente, se tiene

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_n + \mathbf{S}_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \quad (17)$$

Con esta definición, las contribuciones de las dos integrales sobre la frontera de Dirichlet a la matriz  $\mathbf{K}$ , para un par de nodos  $i, j$  dados puede escribirse

$$\mathbf{K}_{ij}^{\Gamma u} = - \int_{\Gamma u} \varphi_i \cdot \mathbf{S}^t \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_j \cdot ds - \int_{\Gamma u} \mathbf{B}_i^t \cdot \mathbf{D}^t \cdot \mathbf{N}^t \cdot \mathbf{S} \cdot \varphi_j \cdot ds \quad (18)$$

Y la contribución correspondiente al vector de carga será

$$f_i^{\Gamma u} = - \int_{\Gamma u} \mathbf{B}_i^t \cdot \mathbf{D}^t \cdot \mathbf{N}^t \cdot (u_n \cdot \hat{n} + u_b \cdot \hat{b}) \cdot ds \quad (19)$$

Es evidente que la frontera de Dirichlet debe representarse adecuadamente para poder efectuar las operaciones citadas. En este trabajo se utilizaron para ello elementos de línea cuadráticos de tres nodos, como los usados habitualmente en el método de elementos de contorno. Las integrales (17) y (18) se realizan con cuadratura gaussiana de 8 puntos.

## BASES

### Bases sencillas

La formulación descrita es completamente general, de modo que, en principio, cualquier base que sea capaz de representar satisfactoriamente la solución puede ser utilizada. La elección más popular es la de elementos finitos, que tiene la enorme ventaja de no requerir las integrales de contorno (17) y (18) por ser los coeficientes valores de campo, como se apuntara más arriba. Asimismo, la subdivisión del dominio  $\Omega$  en elementos, con fines de interpolación, puede también utilizarse para evaluar las integrales de volumen. Estas ventajas evidentes tienen no obstante sus inconvenientes intrínsecos. El más conspicuo de éstos es que la bondad de la solución, por depender de la discretización, puede tornarse muy onerosa en problemas tridimensionales o en presencia de elevados gradientes de campo. Por supuesto, esto puede subsanarse a través de un aumento del orden de interpolación (refinamiento  $p$ ), pero la tarea es aún compleja. Una alternativa promisoría a ese método es el uso de bases que no estn atadas a la discretización utilizada para evaluar las integrales, que por esta razón se suelen llamar métodos "difusos". Posiblemente la elección más sencilla es tomar como base funciones "sombbrero", como por ejemplo

$$\varphi_i = \left( 1 - \left( \frac{x - x_i}{R} \right)^2 \right)^2 \quad (20)$$

Es conveniente normalizar la base, poniendo

$$\Psi_i = \frac{\varphi_i}{\sum \varphi_j} \quad (21)$$

de modo que reproduzca exactamente campos constantes. Utilizando esta base se simuló una tracción simple en un cuadrado unitario. La solución depende de dos parámetros: número de nodos y radio de acción. Fueron necesarios 16 nodos y radios superiores a 50 para obtener soluciones razonables.

Esto indica que para problemas de mayor complejidad sería necesario un número muy elevado de nodos y enormes anchos de banda. En efecto para calcular la viga empotrada, descrita más adelante con un error evaluado sobre la norma  $L_2$  menor del 10 % es necesario emplear 120 nodos y radios de acción de por lo menos 100 veces el espaciado nodal.

Es posible obtener pequeñas mejoras tomando funciones base más elaboradas. Por ejemplo, la siguiente función tiene porciones negativas. Con ella el problema anterior puede ser resuelto con 100 nodos y radios de 80

$$\varphi_i = \alpha^2 + \left[ \left( \left( \frac{x - x_i}{R} \right)^2 - \alpha^2 \right) \circ \left( \left( \frac{x - x_i}{R} \right)^2 - 1 \right)^2 \right] \quad (22)$$

### Mínimos cuadrados móviles

Los ejemplos del apartado anterior indican que el uso de bases "difusas" sencillas trae aparejado un enorme costo en virtud del número de nodos requeridos y elevados anchos de banda. Por ello, para obtener buenas aproximaciones a un costo razonable es preciso construir bases que satisfagan algún criterio de optimalidad, es decir, óptimo ajuste para un número dado de puntos. Un método especialmente promisorio y que satisface ese criterio es el llamado "mínimos cuadrados móviles" (Moving least squares) o también mínimos cuadrados ponderados. Este método es analizado con detalle por Lancaster y Salkauskas<sup>6</sup>. En el ajuste por mínimos cuadrados ordinario se buscan los coeficientes de una aproximación polinómica. Para un polinomio de grado 2 en dos dimensiones se tiene

$$u(x, y) = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y + a_4 \cdot x^2 + a_5 \cdot y^2 + a_6 \cdot xy$$

Resulta conveniente definir vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^t &= (a_1, \dots, a_6) \\ \mathbf{p}^t &= (1, x, y, x^2, y^2, xy) \end{aligned} \quad (23)$$

y escribir

$$u(x, y) = \mathbf{a}^t \cdot \mathbf{p} \quad (24)$$

Dado un conjunto de  $N$  datos, asociados a puntos del plano, el ajuste por mínimos cuadrados consiste en minimizar el error cuadrático medio

$$E^2 = \sum_i^N (u(x_i, y_i) - f_i)^2 \quad (25)$$

La solución es un conjunto de coeficientes numéricos  $a$ . Este método es poco flexible y da una interpolación global poco adecuada en mecánica computacional. Con el objeto de obtener aproximaciones locales, más versátiles, es conveniente minimizar una norma ponderada del tipo

$$J(x) = \sum_i^N W_i(x, y) \cdot [u(x_i, y_i) - f_i]^2 \quad (26)$$

De este modo, el valor de  $u$  en el punto  $(x_i, y_i)$  será más fuertemente influido por los datos cercanos al punto, si los pesos se eligen adecuadamente como funciones decrecientes con la distancia, es decir

$$W_j(\underline{x}) = W(|\underline{x} - \underline{x}_j|) \quad (27)$$

Más aún, dado que los pesos son funciones, también lo será la norma de (25) y por ende lo serán los coeficientes  $a$  de (23), es decir

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(x)$$

De este modo la función aproximante no será ya un simple polinomio sino una función que produce el mejor ajuste con los datos en la norma (25), lo cual depende de las funciones de ponderación elegidas. Por ello el método se denomina mínimos cuadrados ponderados o móviles. Derivando (25) respecto de los coeficientes  $a$  se obtienen las "ecuaciones normales"

$$\mathbf{A}(x) \cdot \underline{a}(x) = \mathbf{B}(x) \cdot u \quad (28)$$

donde

$$A(x) = \sum W_i(x) \cdot \underline{P}(x_i) \cdot \underline{P}^t(x_i) \quad (28a)$$

$$\mathbf{B}(x) = [W_1(x) \cdot \underline{P}(x_1), W_2(x) \cdot \underline{P}(x_2), \dots, W_N(x) \cdot \underline{P}(x_N)] \quad (28b)$$

$$\underline{u}^t = [u_1, u_2, \dots, u_n] \quad (28c)$$

de donde se obtiene

$$u^h(x) = \underline{P}^t(x) \cdot \underline{a}(x) = \underline{P}^t(x) \cdot \mathbf{A}^{-1}(x) \cdot \mathbf{B}(x) \cdot \underline{u} = \sum \varphi_i(x) \cdot u_i \quad (29)$$

donde las funciones de forma vienen dadas por

$$\varphi_i(x) = \underline{P}^t \cdot \left( \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \right)_{\text{columna } i} \quad (30)$$

En las fórmulas (27) a (29) hemos utilizado la notación de Belytschko *et al.*<sup>4,5</sup>. Cuando la matriz  $\mathbf{A}$  no es bien condicionada, la ecuación (27) no puede resolverse con la precisión deseada. Es por lo tanto adecuado buscar un base ortogonal que permita que la matriz  $\mathbf{A}$  sea diagonal. Con estas consideraciones se obtiene ahora una nueva base similar a la expresada en<sup>4</sup>, que cumple este requisito

$$q_k(\underline{x}, \bar{x}) = p_k(\underline{x}) - \sum_j^{k-1} \alpha_{kj}(\underline{x}) \cdot q_j(\underline{x}, \bar{x}) \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (31)$$

siendo

$$\alpha_{kj}(\bar{x}) = \frac{\sum_i^n W_i(\bar{x}) \cdot p_k(\underline{x}_i) \cdot q_j(\underline{x}_i, \bar{x})}{\sum_i^n W_i(\bar{x}) \cdot q_j(\underline{x}_i, \bar{x})} \quad (32)$$

En (31) y (32)  $\bar{x}$  representa el punto en donde es evaluado el polinomio. La matriz  $\mathbf{A}$  es ahora diagonal y la (27) lleva a

$$\alpha_j(\bar{x}) = \frac{\sum_i^n W_i(\bar{x}) \cdot q_j(\underline{x}_i, \bar{x}) \cdot u_i}{b_j} \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (33)$$

donde

$$b_j = \sum_j^n W_j(\bar{x}) \cdot q_j^2(\underline{x}_j, \bar{x}) \quad (34)$$

La aproximación resulta entonces

$$u^h(x) = \sum_i^n \varphi_i(\underline{x}) \cdot u_i \quad (35)$$

con lo cual las funciones de forma quedan definidas por

$$\varphi_i(\underline{x}) = W_i(\underline{x}) \cdot \sum_j^m C_{ji}(\underline{x}) \quad (36)$$

$$C_{ji}(\underline{x}) = \frac{q_j(\underline{x}, \underline{x}) \cdot q_j(\underline{x}_i, \underline{x})}{b_j(\underline{x})} \quad (37)$$

Es importante destacar que la ortogonalización conduce a relaciones de recurrencia, lo que resulta muy oneroso en tiempo de cómputo.

### Función de peso

Siguiendo las recomendaciones de Lancaster *et al.*<sup>3</sup>, nosotros adoptamos para los pesos  $W_i(\underline{x} - \bar{x}_i)$  en (25) funciones exponenciales cuadráticas decrecientes con soporte local de modo que se anulan más allá de cierto radio crítico.

$$W_i = \frac{e^{-(d_l/C)} - e^{-(d_{ml}/C)^{2k}}}{(1 - e^{-(d_{ml}/C)^{2k}})} \quad \text{si } d_l \leq d_{ml} \quad (38)$$

$$W_i = 0 \quad \text{si } d_l > d_{ml}$$

con

$$d_l = \|x - x_l\|$$

Aquí  $C$  es una constante que controla el peso relativo y  $d_{ml}$  es el dominio de soporte para la función de peso  $W_i(\underline{x})$ . Este dominio donde la función de peso no es nula suele llamarse dominio de influencia del nodo  $x_i$ . Fue demostrado por Lancaster y Salkauskas<sup>3</sup> que la función definida por (36) tiene derivadas de cualquier orden respecto de  $x$  e  $y$  si  $k$  es un entero positivo. De esta forma la función de peso, que es esencialmente una distribución de Gauss truncada a  $d_{ml}$ , se comporta bastante mejor que las funciones de peso cónicas. Como contrapartida, los resultados de la aproximación son más sensibles al valor de  $d_{ml}$ . Se puede notar que la definición de  $C$  es más o menos arbitraria. Nosotros empleamos

$$C = \alpha \cdot \sqrt{2} \cdot C_1$$

donde  $C_i$  es la mínima distancia entre nodos vecinos y llamamos a  $\alpha$  "factor de atenuación". En base a los trabajos de Belyschko *et al.* nosotros empleamos  $1 \leq \alpha \leq 2$  para redes regulares con  $\alpha$  cercano a 1 para problemas con singularidades y altos gradientes y  $\alpha$  igual a 2 para problemas de baja singularidad. La Figura 2 muestra la forma de las funciones de peso empleadas. Este esquema no es muy satisfactorio para redes irregulares, donde la atenuación debe elegirse de modo que el disco de radio  $C$  en cada nodo englobe nodos en todas direcciones. Sin embargo el esquema anterior, donde las funciones de peso tienen simetría circular, puede generalizarse a funciones no simétricas que sean más largas en la dirección con mayor espaciamiento nodal.

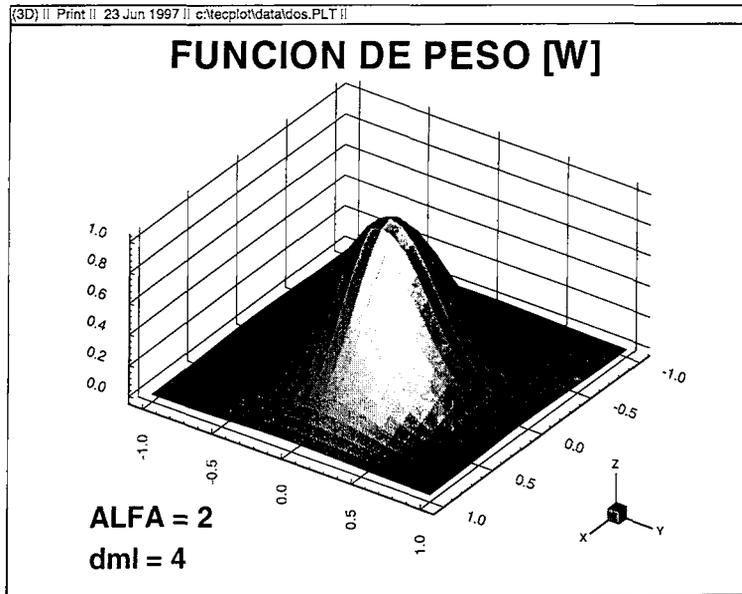


Figura 2

## IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

El esquema descrito fue implementado con las siguientes particularidades:

- Los contornos del cuerpo fueron definidos por medio de elementos de línea en dos dimensiones. Se emplearon elementos cuadráticos de tres nodos, lo que facilita la aproximación de bordes curvos.
- Para evaluar la contribución de los elementos del contorno se empleó cuadratura de Gauss de ocho puntos. Nótese que a diferencia del método de elementos de contorno (MEC), no hay aquí singularidades. De modo que el uso de integración de tan alto orden sólo obedece al propósito de disminuir el número de elementos necesarios.
- En una primera implementación, siguiendo a Belytschko, para el cálculo de las integrales de volumen se divide al dominio en celdas rectangulares de cuadratura variable según el número de nodos (puntos de cálculo) contenidos en ella. En cada punto de cuadratura se evalúa primero el ángulo subtendido por los elementos de borde para distinguir si es un punto exterior al dominio, en cuyo caso se lo elimina.
- Al evaluar la función de forma  $W_i$  en cada punto, se tiene en cuenta si el segmento  $(\underline{x} - \underline{x}_i)$  atraviesa la frontera del recinto de cálculo. En ese caso la contribución correspondiente, se elimina, como sugiere Belytschko. Esto no dio buenos resultados, como se discute más adelante. Los factores que definen la función de peso y la atenuación ( $C$  y  $d_{ml}$ ) fueron definidos localmente como una fracción de la mínima distancia entre los nodos vecinos.

## RESULTADOS NUMÉRICOS

### Test de lámina

El primer ejemplo numérico es un test lámina standard. En este test se imponen desplazamientos unitarios en la dirección  $Y$  sobre  $y = 2$ , se restringen los desplazamientos en ambas direcciones en  $y = 0$ . Para satisfacer este test es necesario que los desplazamientos en cualquier nodo interior sean una función lineal de las condiciones de contorno y que las deformaciones y tensiones sean constantes sobre el lámina. Para este caso empleamos  $C = 2$  y  $d_{ml} = 4$  y un arreglo de arreglo cuatro celdas de iguales dimensiones para la integración. El código implementado pasó satisfactoriamente la serie de tests representados en la Figura 3a,b,c. Durante este test pudo validarse lo expresado por Lu *et al.*<sup>5</sup>, la disposición de los nodos no afecta significativamente los resultados, según lo muestra la Tabla I.

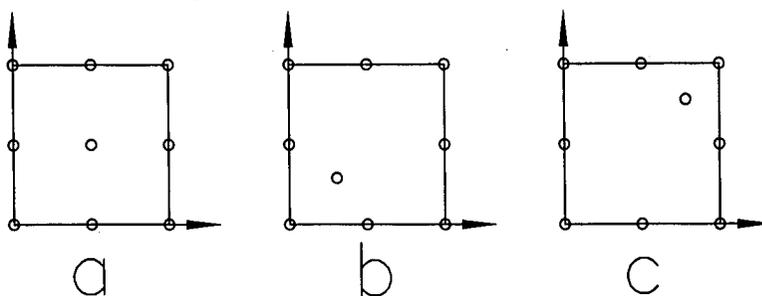


Figura 3. Nodos usados para el test de lámina

Coord. del nodo 9 ( $x, y$ )	Error rel. de $u_x$	Error rel. de $u_y$	Error rel. de $\sigma_x$	Error rel. de $\sigma_y$	Error rel. de $\sigma_{xy}$
(1.0,1.0)	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
(0.1,1.8)	0,0075 %	0,0066 %	0,0091 %	0,0042 %	0,02 %
(1.9,1.8)	0,0059 %	0,0085 %	0,009 %	0,0050 %	0,06 %
(1.9,0.1)	0,01 %	0,009 %	0,008 %	0,005 %	0,075 %

Tabla I. Errores norma  $L_2 = \|u^* - u\| / \|u\|$  en el nodo 9 cuando éste es desplazado dentro del lámina

**Test de viga**

El comportamiento de código desarrollado fue evaluado con una prueba sobre una viga cantilever, cuya solución exacta es dada en<sup>7</sup> y es

$$\begin{aligned}
 u_x &= \frac{P}{6EI} \cdot \left(y - \frac{D}{2}\right) [(6l - 3x) \cdot x + (2 + \nu) \cdot (y_2 - 2 \cdot D \cdot y)] \\
 u_y &= \frac{P}{6EI} \cdot \left[ 3\nu \cdot \left(y^2 - 2Dy + \frac{D^2}{2}\right) \cdot (L - x) + \frac{1}{4} \cdot (4 + 5\nu) \cdot D^2 \cdot x + \left(L - \frac{x}{3}\right) \cdot 3x^2 \right]
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

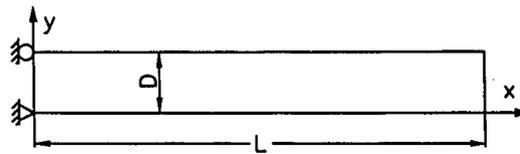
donde  $I = \frac{D^2}{12}$

$$\bar{E} = \begin{cases} E & \text{para tensión plana} \\ E/(1 - \nu^2) & \text{para deformación plana} \end{cases}$$

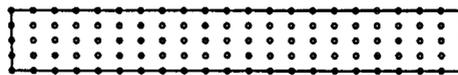
$$\bar{\nu} = \begin{cases} \nu & \text{para tensión plana} \\ \nu/(1 - \nu^2) & \text{para deformación plana} \end{cases}$$

Las tensiones correspondientes a (31) son

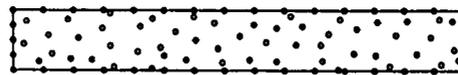
$$\begin{aligned}
 \sigma_x(x, y) &= -\frac{P}{I} \cdot (L - x) \cdot \left(y - \frac{D}{2}\right) \quad \sigma_y(x, y) = 0 \\
 \sigma_{xy}(x, y) &= -\frac{P \cdot y}{2 \cdot I} \cdot (y - D)
 \end{aligned}
 \tag{40}$$



Viga Cantilever



a) Disposición Regular de Puntos



b) Disposición Irregular de Puntos

Figura 4. Viga cantilever: a) disposición regular de puntos, b) disposición irregular de puntos

Una carga unitaria fue aplicada en el elemento central de uno de los extremos de la viga ( $x = L$ ) y los desplazamientos se restringieron el otro ( $x = 0$ ). El problema fue resuelto para deformación plana con  $E = 1,5e^6$  kg/cm<sup>2</sup>,  $D = 10$  y  $L = 80$  (Figura 4). El arreglo de celdas consistió en 5 celdas en la dirección  $x$  y 2 celdas en la dirección  $y$ . Se resolvieron dos casos con una disposición regular de puntos (Figura 4a) y una disposición irregular (Figura 4b).

En ambos casos la solución numérica  $W^{num}$ . no mostró mayores diferencias con la solución exacta  $W^{exacta}$  como puede apreciarse en la Tabla II. A fin de comparar se grafican las tensiones por el presente método, por MEF y la solución exacta para una viga en deformación plana. La continuidad de las funciones de aproximación arroja resultados suaves, tanto en el campo de desplazamientos como en el campo de tensiones.

$W^{num}/W^{exacta}$ en el punto A		
Método de cálculo	Arreglo regular	Arreglo irregular
FEM	0,996	0,745
MGD	1,000	0,999

Tabla II. Relación entre los desplazamientos de la solución exacta y la solución numérica en el problema de la viga

En la Figura 5a puede apreciarse este hecho. Para obtener buenos resultados fue necesario ajustar los factores que definen la forma de las funciones de peso  $C$  y de  $d_{ml}$ .

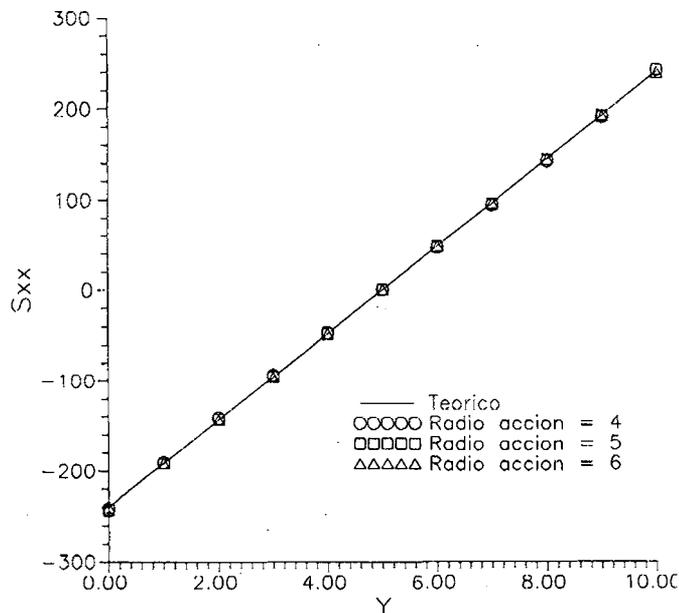


Figura 5a). Tensiones en  $x = L/2$ : para una viga con  $m = 0,3$

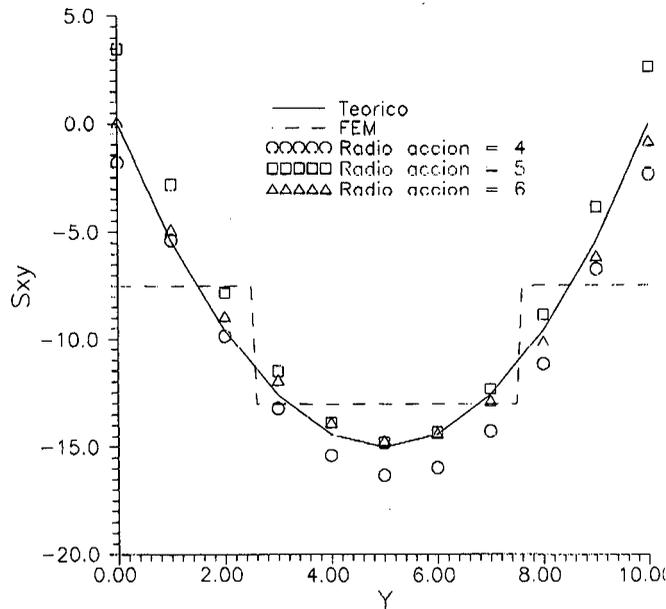


Figura 5b). Tensiones en  $x = L/2$ : bajo condiciones de deformación plana

Tal como puede apreciarse en la Figura 5b un pequeño cambio en estos parámetros afecta sensiblemente a  $\sigma_{xy}$ .

### Viga empotrada dispuesta en forma oblicua a las coordenadas naturales

Al intentar resolver este caso con el esquema de integración propuesto por Belyschko *et al.*<sup>4,5</sup>, un trasfondo regular de celdas, encontramos que es necesario emplear un alto número de celdas para obtener resultados comparables con los del caso anterior. Esto genera un aumento sustancial del tiempo de cálculo. La razón del problema reside en el esquema de celdas propuesto. Este esquema genera un arreglo regular de puntos de Gauss, luego el código debe detectar los contornos del recinto y saltar los puntos de Gauss que están fuera de éste para construir las ecuaciones. De esta forma, si el recinto no coincide medianamente con las celdas de integración, el número de puntos de Gauss es bajo y se subintegra.

Al emplear elementos que contengan exactamente el recinto, dado que la integración y la generación de las funciones de aproximación son dos operaciones independientes, la forma de los elementos sólo está determinada por el máximo número de puntos que pueden contener y esté por el orden de cuadratura adoptado para el elemento. De esta forma se gana robustez sin pérdida de aplicabilidad del método.

En la Tabla III se muestra el ahorro de tiempo de cálculo logrado usando elementos de integración en lugar de celdas para obtener igual precisión (evaluada según la norma  $L_2$  de desplazamientos) para el caso de la viga empotrada en voladizo rotada 30 grados respecto de sus coordenadas naturales (Figura 6).

Método de integración	Cantidad de unidades	Tiempo de cálculo (min:seg)	Error % según norma $L_2$
Celdas	30 celdas	5:57	14,98 %
Elementos	3 elementos	2:27	0,99 %

Tabla III. Reducciones en el tiempo de cálculo al cambiar el esquema de integración

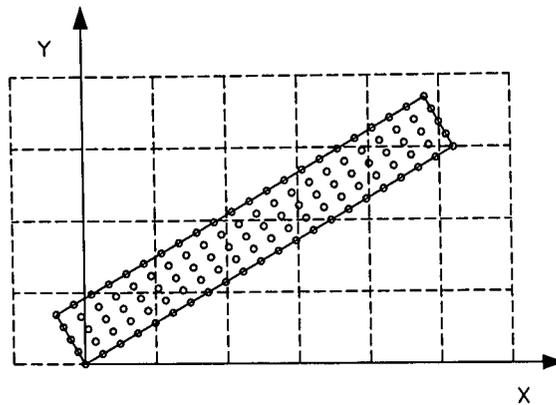


Figura 6. Viga fuera de sus coordenadas naturales y esquema de integración por celdas de fondo

## CONCLUSIONES

El esquema presentado muestra ser apropiado para problemas elásticos. El uso de bases sencillas requiere de un enorme número de nodos, por lo cual el uso de IMCM es más conveniente. No obstante esto el tiempo de cálculo requerido es mucho mayor al requerido por el método de elementos finitos. La mayor parte de este tiempo proviene del cálculo de las integrales de volumen, por ello su optimización es relevante. En particular se observa que el esquema de sumergir el recinto de cálculo en un arreglo de celdas regulares es muy ineficiente. El uso de elementos que contengan exactamente al recinto de cálculo es mucho más eficiente y no impone mayores penalidades geométricas, ya que no hay requisitos de continuidad que satisfacer. Sin embargo, este último esquema puede aún simplificarse usando por ejemplo un quadtree u otras técnicas automatizables de generación de celdas.

Asimismo se observa que el método es altamente sensible a los parámetros que definen las funciones de peso ( $C$ ,  $d_{ml}$ ). Para problemas de bajo orden de singularidad en los campos a interpolar  $d_{ml}$  es el parámetro más importante. Un pequeño cambio puede mejorar sustancialmente la convergencia de una dada red. En cuanto a  $C$ , su valor está relacionado con el orden de la singularidad de los campos a tratar.

El número de nodos también es determinante en la calidad de la solución. Cuando la solución no mejora al cambiar los parámetros de las funciones de peso, es necesario aumentar el número de nodos.

Por otra parte cabe puntualizar que en el esquema de MCM utilizado, el grueso del tiempo de cómputo insumido proviene de la ortogonalización de las funciones base, que impone definir las en forma recurrente.

Si bien el costo computacional de los métodos difusos es alto, la facilidad en la confección de datos y la posibilidad de extender la formulación a problemas anisótropos e inhomogéneos abre un campo promisorio para el empleo de esta técnica.

### REFERENCIAS

1. B. Nayroles, G. Touzot y Villon, "Generalizing the Finite Element Method: Diffuse Approximation and Diffuse Elements", *Computational Mechanics*, Vol. **10**, pp. 307-318, (1992).
2. D. Shepard, "A Two Dimensional Interpolation Function for Irregularly Spaced Points", *Proc. A.C.M. Natl. Conf.*, (1968).
3. P. Lancaster y K. Salkauskas, "Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods", *Mathematics Computational*, Vol. **37**, pp. 141-158.
4. T. Belytschko, Y.Y. Lu y L. Gu, "Element Free Galerkin Methods", *Int. J. Num. Methods Engng*, Vol. **37**, pp. 229-256, (1994).
5. Y.Y. Lu, T. Belytschko y L. Gu, "A New Implementation of the Element Free Galerkin Method", *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. **113**, 2, pp. 397-414, (1994).
6. P. Lancaster y K. Salkauskas, "Curve and Fitting", *Academic Press*, 225-245, (1986).
7. S.P. Timoshenko y J.N. Goodier, "*Theory of Elasticity*", 3rd Edition, McGraw-Hill, New York (1970).
8. P.W. Partridge, C.A. Brebbia y L.C. Wrobel, "The Dual Reciprocity Boundary Element Method", Elsevier Applied Sciences, London, (1992).
9. P.W. Partridge, C.A. Brebbia y L.C. Wrobel, "*Boundary Element Techniques*", Springer-Verlag, London, (1984).