

UN MÉTODO GENERAL PARA LA SÍNTESIS DE POSICIÓN DE MECANISMOS CON PARES INFERIORES Y SUPERIORES (II): SÍNTESIS DE POSICIÓN CON RESTRICCIONES CINEMÁTICAS

J.A. ALBA *,
M. DOBLARÉ **
y
L. GRACIA **

**Depto. de Ingeniería Mecánica, Universidad de la Rioja, (España)*

Tel.: + 34-41-299528 Fax: + 34-41 299478

E-mail: joseantonio.alba@dim.unirioja.es

***Depto. de Ingeniería Mecánica, Universidad de Zaragoza*

María de Luna 3, 50015 Zaragoza, (España)

Tel./Fax: + 34-76-761912 E-mail: mdoblare@posta.unizar.es

RESUMEN

En la primera parte de esta serie se presentó un método general para la síntesis óptima de mecanismos de topología conocida, cuyo objeto era la determinación de las dimensiones del mecanismo que do lugar a una trayectoria lo más próxima posible a unos puntos de precisión dados. El método considera como función objetivo la energía de deformación virtual asociada a los eslabones considerados como elementos flexibles, necesaria para deformar el mecanismo desde los puntos de paso reales del mismo a los propuestos. Las variables de diseño son las "coordenadas naturales" del mecanismo en cada punto de síntesis y las longitudes de los eslabones. Además de las restricciones topológicas, es posible incluir exigencias cinemáticas, todas ellas incluidas de forma general en el procedimiento de cálculo, que utiliza como método de solución una serie de problemas cuadráticos. El método es completamente general, habiéndose programado un conjunto importante de las restricciones más habituales en la cinemática de mecanismos.

En este segundo artículo se completa el método mediante la incorporación de restricciones de tipo cinemático sobre las velocidades y aceleraciones de los distintos puntos del mecanismo. Ello es particularmente importante para impedir la aparición de fuerzas de inercia excesivas o controlar impactos importantes con objetos que interaccionen con el mecanismo. El proceso de incorporación de estas nuevas restricciones es idéntico al mostrado en el primer artículo de la serie, ya que la consideración de las coordenadas de los puntos del mecanismo en cada punto de síntesis como variables de diseño permite el control total sobre el mismo y, en particular, de las componentes cinemáticas de su movimiento. Un conjunto de ejemplos permite comprobar el funcionamiento del método de forma suficiente. En ellos se comprueba que la excesiva rigidez sobre las restricciones geométricas dificulta el cumplimiento de las restricciones cinemáticas al constreñir demasiado el movimiento general del mecanismo y con ello circunscribir las variables de velocidad y aceleración a un rango de variación reducido que impide el cumplimiento de las restricciones adicionales, mientras que la relajación de las primeras permite el cumplimiento de las segundas como era previsible.

Recibido: Julio 1995

A GENERAL METHOD FOR THE SYNTHESIS OF MECHANISMS WITH LOWER AND HIGHER JOINTS (II): POSITION SYNTHESIS WITH KINEMATIC CONSTRAINTS

SUMMARY

In the first paper of this series, a general procedure for the optimal synthesis of mechanisms with known topology was presented. The main goal of this technique is the computation of the lengths of the different elements of the mechanism which minimize, from a global point of view, the error between the actual path of one of the points of the mechanism and another certain path predefined by a variable number of synthesis points. The proposed method considers as objective function the virtual strain energy associated to the elements of the mechanism considered as flexible, needed to deform the mechanism from the actual path points to the proposed synthesis ones. The design variables are all the "natural coordinates" of the mechanism together with the element lengths. Besides the constraints defining the mechanism topology, it is also possible to include in the formulation kinematical constraints. All of these constraints are included in the formulation and solved by an optimization method which uses a sequence of quadratical problems. The method is general in the sense that it is possible to include any other kind of constraint in a very easy way, allowing user routines to be incorporated, although the most usual constraints in planar mechanisms have been included in the resulting code.

In this second paper, the method is completed by formulating the kinematical constraints on the velocity, acceleration and jerk for the different points of the mechanism. This is particularly important to avoid big inertia forces or control the impacts with some other components that interact with the mechanism. The procedure to incorporate these new constraints is essentially the same than the one proposed in the first paper, due to the fact that the consideration of all the coordinates of the mechanism at each synthesis point allows the total control of it and, in particular, of its kinematical variables. An important number of examples is also included being remarkable that the excessive "stiffness" on the geometrical constraints may avoid the fulfillment of the kinematical constraints while the relaxing of the former allows a much better behaviour of the mechanism with respect the latter as was expected.

INTRODUCCIÓN

En los últimos años, el problema de síntesis óptima de mecanismos ha sufrido importantes avances motivados, en gran medida, por el desarrollo exponencial de las prestaciones computacionales, junto a mejoras sucesivas en las metodologías de optimización¹⁻⁴. Ello ha permitido aplicar distintas técnicas de programación matemática a esta síntesis, tanto en lo que se refiere a optimización dimensional como topológica^{5,6}.

En un artículo previo⁷ se presenta un procedimiento que aporta grandes ventajas al problema de síntesis óptima de mecanismos, pues permite incorporar de forma muy simple restricciones topológicas, geométricas o dimensionales. Asimismo, no distingue entre pares inferiores y superiores ni entre mecanismos planos o espaciales o de cadena abierta o cerrada, siendo por tanto un método completamente general.

Utiliza como coordenadas básicas las *coordenadas naturales* de García de Jalón et al^{8,9} que permiten un tratamiento inmediato de la mayoría de las restricciones, así como una representación geométrica directa de los movimientos y posiciones del mecanismo.

La *función objetivo* utilizada es la presentada anteriormente por Avilés et al¹⁰, Navalpotro¹¹ y Vallejo¹². Se define como la *energía potencial de deformación* de las barras del mecanismo, consideradas como elementos flexibles, necesaria para alcanzar desde la posición más cercana posible, compatible con las dimensiones del mismo, el punto de precisión considerado.

El proceso de cálculo se articula en dos etapas bien diferenciadas denominadas respectivamente *Síntesis Local (SL)* y *Síntesis Global (GL)*. En la primera se obtiene el vector inicial de iteración mediante la resolución de una serie de problemas auxiliares de optimización en cada punto de síntesis, de forma que manteniendo fijas las dimensiones del mecanismo y mediante la minimización de la función anterior permite obtener la posición del mecanismo que, partiendo de unas longitudes dadas, es más próxima al punto de síntesis considerado en el sentido de la energía potencial. La posición deformada del mecanismo resultante de la síntesis local que pasa, por tanto, por el punto de síntesis propuesto se utiliza como vector inicial de iteración, para dicho punto de síntesis, en el proceso de optimización posterior de síntesis global.

En el segundo proceso de síntesis global se realiza el proceso de síntesis propiamente dicho. La función objetivo se plantea ahora como suma de todas las energías de deformación para cada uno de los puntos de síntesis, de tal forma que, incorporando como variable de diseño todas las coordenadas naturales en todos los puntos de síntesis junto a las dimensiones del mecanismo, permite evaluar las dimensiones finales que dan lugar a una trayectoria lo más próxima posible a los puntos de precisión dados.

Es posible también considerar efectos de ponderación de la importancia del cambio de longitud de cada barra en el diseño a través de los parámetros elásticos ficticios del material de cada barra. Así, una barra más rígida supondrá una menor posibilidad de cambio de su longitud en el mecanismo, ponderándose más por tanto su deformación en la energía potencial total del mecanismo.

En cuanto a las restricciones, se han considerado las típicas que definen la estructura y topología de los mecanismos más comunes, siendo posible la inclusión de nuevas restricciones por parte del usuario mediante la incorporación de las subrutinas pertinentes.

Se permite, en general, imponer condiciones directas sobre las variables de diseño (coordenadas naturales del mecanismo en cada punto de síntesis y dimensiones de los elementos que lo componen) mediante bandas que definen los límites inferior y superior de variación de cada variable. Con ellas podemos acotar la precisión de la solución obtenida delimitando el espacio de trabajo de cada variable. Asimismo permiten "flexibilizar" en la medida que el diseñador considere necesaria, el cumplimiento de alguno o algunos de los puntos de precisión, trabajándose entonces, no tanto con puntos de síntesis sino con *regiones de síntesis*, consiguiéndose una mayor adaptabilidad de la solución, especialmente cuando se imponen restricciones cinemáticas. Por otra parte, esta circunstancia no sólo no entra en oposición con la precisión del diseño sino que, muy al contrario, lo más habitual en trabajar con trayectorias o puntos particulares con un cierto margen de precisión que, en este caso, es conveniente incluir en la definición del mecanismo para conseguir los efectos apuntados.

El procedimiento de solución utilizado para la resolución del problema de optimización, y que ha dado un buen índice de convergencia y una robustez suficiente,

es el de una *serie de problemas cuadráticos (SQP)*^{1,2,4} para el que hay que definir tanto la función objetivo y las restricciones como sus gradientes y hessianos. Para resolverlo se ha utilizado la subrutina EO4DVI de la librería NAG¹³, que determina el hessiano por diferencias finitas, mientras que hay que proveerle de las expresiones analíticas de las distintas funciones y sus gradientes.

El hecho de considerar todas las coordenadas naturales en cada punto de síntesis permite disponer de todas las variables del proceso, incluidas la velocidad y aceleración, en función de estas variables, por lo que es inmediato imponer restricciones u objetivos sobre estas variables de movimiento, tal como se muestra en los epígrafes posteriores. De cualquier forma, la excesiva rigidez sobre las restricciones geométricas dificulta el cumplimiento de las restricciones cinemáticas al constreñir demasiado el movimiento general del mecanismo, y, con ello, circunscribir las variables de velocidad y aceleración a un rango de variación reducido que impide el cumplimiento de las restricciones adicionales que sobre ellas se establecen. La relajación de estas restricciones geométricas mediante la ampliación de las bandas que las definen permite el cumplimiento de las otras restricciones sobre velocidad y aceleración como era previsible.

SÍNTESIS DE POSICIÓN EN EL PLANO

Se presenta en este epígrafe un breve resumen de los aspectos esenciales del método de síntesis de posición presentado en la referencia [7]. Para un mayor detalle el lector puede consultar esta referencia.

Variables de diseño

Siguiendo la referencia [14], para el caso de plano, las variables de diseño del problema son:

- *Síntesis Local*: Coordenadas de los nudos para el mecanismo activo correspondiente al punto de síntesis considerado, definiéndose como nudos los puntos del mecanismo que corresponden a uniones entre eslabones o definen la dirección de movimiento de un determinado par, mientras que como mecanismo activo entenderemos el mecanismo óptimo para un determinado punto de síntesis a partir del proceso de síntesis local.
- *Síntesis Global*: Coordenadas de todos los nudos para todos los mecanismos activos correspondientes a todos los puntos de síntesis más las longitudes de las barras del mecanismo.

Restricciones

El siguiente paso es la definición de las restricciones consideradas, que para la síntesis de posición de mecanismos planos y además de las correspondientes a puntos fijos, que suponen la constancia de sus coordenadas en cada punto de precisión. Se han considerado las siguientes: situación de triángulo constante, colinealidad de tres puntos, orientación constante entre dos barras, par superior engranaje-engranaje, par superior engranaje-cremallera, además de las restricciones sobre la velocidad y aceleración que se detallan en este artículo.

A modo de ejemplo, la *igualdad de las coordenadas de los puntos fijos* en el caso de que se permita una banda de variación de las coordenadas de los mismos, se ha de imponer que las coordenadas finales de éstos sean iguales para todos los mecanismos activos del problema. Ello se plantea con restricciones de la forma

$$x_j[PF_1(i)] = x_j[PF_1(k)] \quad j = 1, 2 \quad i = 1, \dots, PS \quad k = 1, \dots, PS \quad l = 1, \dots, PF \quad (1)$$

con *PS* el número de puntos de síntesis y *PF* el número de puntos fijos.

Asimismo, la restricción del *coseno del ángulo de signo constante* que aparece cuando se ha de controlar la ubicación relativa de tres puntos *A, B, C*, se impone mediante el producto escalar, transformándolo a coseno del ángulo que forman

$$h_3 = \frac{\vec{r}_{BA} \cdot \vec{r}_{CA}}{L_{AB}L_{AC}} \quad (2a)$$

o en términos de coordenadas

$$h_3 = \frac{x_{BA}x_{CA} + y_{BA}y_{CA}}{L_{AB}L_{AC}} \quad (2b)$$

con

$$\begin{aligned} x_{BA} &= x_B - x_A & y_{BA} &= y_B - y_A & x_{CA} &= x_C - x_A & y_{CA} &= y_C - y_A \\ L_{AB} &= \sqrt{x_{BA}^2 + y_{BA}^2} & L_{AC} &= \sqrt{x_{CA}^2 + y_{CA}^2} \end{aligned} \quad (2c)$$

Las bandas se impondrán según los casos entre 0 y 1 o entre -1 y 0. La expresión de los gradientes de esta función y del resto de restricciones se encuentran en la referencia [14].

Finalmente, una restricción de par superior como es la de *engranaje-engranaje* plantea que el arco descrito por el punto *A*₁ en el eslabón 1 desde la posición inicial *A*₁₀ ha de ser igual al descrito por el punto *A*₂ en el eslabón 2 desde el punto inicial *A*₂₀ (Figura 1). Por tanto, además de la ecuación que iguala ambos arcos, se ha de definir el punto de origen de referencia, es decir, la posición de ambos en un instante determinado. En síntesis (igual que en análisis) equivale a definir unos ángulos de origen, lo que presupone una posición de referencia conocida.

La ecuación de restricción correspondiente, haciendo siempre referencia a la Figura 1 es,

$$h_5 = [\theta_{A1} - (\theta_{A1})_0]L_1 + [\theta_{A2} - (\theta_{A2})_0]L_2 = 0 \quad (3a)$$

con

$$\begin{aligned} \theta_{A1} &= \arctg \frac{y_{A1} - y_{01}}{x_{A1} - x_{01}} & \theta_{A2} &= \arctg \frac{y_{A2} - y_{02}}{x_{A2} - x_{02}} \\ L_1 &= \sqrt{(x_{A1} - x_{01})^2 + (y_{A1} - y_{01})^2} & L_2 &= \sqrt{(x_{A2} - x_{02})^2 + (y_{A2} - y_{02})^2} \end{aligned} \quad (3b)$$

mientras que los correspondientes al segundo engranaje son similares.

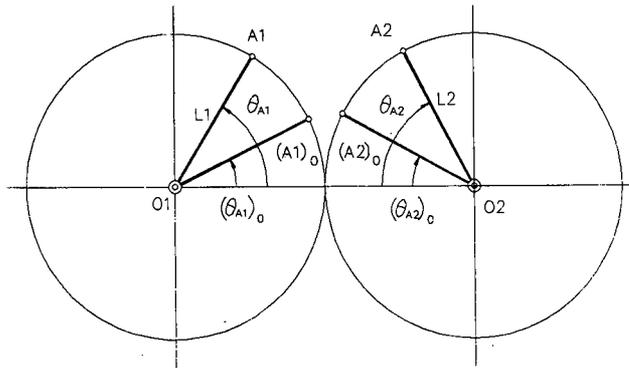


Figura 1. Restricción engranaje-engranaje

Función objetivo

En cuanto a la función objetivo, y como se explicó en la introducción, se define para el proceso de síntesis local la siguiente

$$V = \sum_{i=1}^m E_i (1_i - L_i)^2 \quad (4)$$

con E_i los módulos elásticos ficticios de cada barra i , 1_i la longitud final de la barra i para llegar al punto de síntesis, L_i la longitud de la barra i y m el número de barras del mecanismo susceptibles de deformarse (con longitud no impuesta "a priori").

Es interesante recordar que los puntos fijos no se consideran como variables de diseño en la síntesis local y que no son activas las restricciones cinemáticas.

Como solución se obtiene la parte del vector inicial del proceso de síntesis global relativa a la posición de cada nudo en cada mecanismo activo asociado a cada punto de síntesis, siendo obvio que esta solución depende de las longitudes iniciales que se le da a cada una de las barras y de la posición inicial que se adopte para el mecanismo en la iteración inicial. De cualquier forma, y tal como se ha comprobado, salvo valores muy lejanos a los óptimos, el resultado final obtenido es bastante independiente de estos valores, si bien los vectores obtenidos en la síntesis local afectan de forma importante a la rapidez de convergencia.

El verdadero problema de síntesis se resuelve en la síntesis global, con variables de diseño las coordenadas de cada nudo en cada punto de síntesis más las longitudes de cada una de las barras.

La función objetivo que se plantea en la síntesis global es la anterior, expandida a todos los puntos de síntesis, incorporando ahora como variables de diseño también las longitudes L_i

$$V = \sum_{k=1}^{PS} w_k \sum_{i=1}^m E_i (l_{i,k} - L_i)^2 \quad (5)$$

con w_k los coeficientes de ponderación de cada punto de síntesis k .

Al contener el vector de diseño todas las coordenadas de los puntos en todos los puntos de síntesis, poseemos información implícita del comportamiento cinemático de la configuración geométrica que definen los nudos del mecanismo para cada posición de síntesis en cada punto del proceso de optimización.

SÍNTESIS CON RESTRICCIONES DE VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

Según lo anterior, para cada punto de síntesis se genera un *mecanismo activo I* que cumple la síntesis de tipo, pero cuyas dimensiones no coinciden con la solución del problema (salvo que estemos en la solución exacta). Como de los *mecanismos activos I* que se van formando en la síntesis global se conoce la relación analítica que determina la velocidad, aceleración, etc. de todos los puntos en función de la posición de sus nudos y del valor de las variables cinemáticas del GDL del mecanismo, se dispone de todos los valores cinemáticos y de sus gradientes en función de las variables de diseño y por tanto, se pueden establecer funciones de restricción sobre los valores cinemáticos de los *mecanismos activos I* lo que permite controlar estas variables cinemáticas en fase de diseño, incorporando a las restricciones no lineales que impone la geometría del sistema, las restricciones cinemáticas deseadas.

Formulación de los problemas de velocidad y aceleración

El problema de velocidad se plantea desde el de posición, resultando ser solución del siguiente sistema lineal, obtenido al derivar con respecto al tiempo las restricciones geométricas a imponer

$$[E] \{\dot{x}\} = \{\dot{b}\} \quad (6)$$

Los gradientes de las velocidades con respecto a cada una de las coordenadas del mecanismo se obtienen como solución de otro sistema lineal para cada una de ellas

$$[E] \left\{ \frac{\partial \dot{x}}{\partial x_j(i)} \right\} = \left\{ \frac{\partial \dot{b}}{\partial x_j(i)} \right\} - \left[\frac{\partial E}{\partial x_j(i)} \right] \{\dot{x}\} \quad j = 1, 2 \quad i = 1, \dots \text{NUDOS} \quad (7)$$

El procedimiento de optimización por SQP implementado en las rutinas NAG¹³ precisa del conocimiento del valor de la función restricción en el punto en que nos encontremos en la iteración, y de los gradientes respecto a las variables de diseño*.

Si derivamos con respecto al tiempo las restricciones necesarias para resolver el problema cinemático en cada punto de síntesis, obtendremos una ecuación similar a la anterior en la que sólo intervendrán las coordenadas de los nudos del mecanismo en ese punto de síntesis. Dicho de otra manera, estaremos resolviendo los valores cinemáticos del mecanismo que actúa en ese punto, que cumplirá la síntesis de tipo, pero cuyas

* Recordemos que en síntesis global, la función objetivo incluye todas las coordenadas de los nudos en todos los puntos de síntesis y las longitudes de las barras como variables de diseño.

longitudes diferirán en general de la solución definitiva. A éste mecanismo lo hemos llamado *mecanismo activo I*.

Al derivar éstas ecuaciones con respecto al tiempo para obtener el sistema de ecuaciones en velocidad, tendremos en cuenta:

- Que la derivada con respecto al tiempo de las variables de diseño longitudes, es igual a cero ya que las longitudes son variables no dependientes del tiempo.
- Que en cualquier posición de síntesis, la velocidad del GDL del mecanismo es, o debe ser, una expresión analítica (y por tanto derivable) de un parámetro cinemático externo (p.e. la velocidad angular constante de un motor) y de las coordenadas del grado de libertad.

Por tanto para cada punto de precisión tendremos una ecuación idéntica a (6) pero particularizada para cada punto de síntesis

$$[E]_{ps}\{\dot{x}\}_{ps} = \{\dot{b}\}_{ps} \quad (8)$$

ecuación que expandida a todos los puntos de síntesis y a todas las variables de diseño queda

$$\begin{bmatrix} [E_1] & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & [E_2] & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & [E_3] & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [E_4] & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [E_5] & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & [L] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{x}_1\} \\ \{\dot{x}_2\} \\ \{\dot{x}_3\} \\ \{\dot{x}_4\} \\ \{\dot{x}_5\} \\ \cdot \\ \{\dot{x}_L\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\dot{b}_1\} \\ \{\dot{b}_2\} \\ \{\dot{b}_3\} \\ \{\dot{b}_4\} \\ \{\dot{b}_5\} \\ \cdot \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Al ser independientes las funciones cinemáticas para cada punto de síntesis, se pueden resolver sólo en las variables de diseño sobre las que se desee establecer restricciones.

Los gradientes de las velocidades con respecto a cada una de las coordenadas del mecanismo en los puntos de síntesis deseados se obtienen como solución del sistema lineal (7) para cada uno de los puntos de síntesis.

Una vez resueltos los problemas de posición y de velocidad, el problema de aceleración es la solución del siguiente sistema lineal, obtenido al derivar con respecto al tiempo el de velocidad.

$$[E]\{\ddot{x}\} = \{\ddot{b}\} - [\dot{E}]\{\dot{x}\} \quad (10)$$

Y los gradientes de las aceleraciones con respecto a cada una de las coordenadas del mecanismo se obtienen como solución del siguiente sistema lineal para cada una de ellas

$$[E] \left\{ \frac{\partial \ddot{x}}{\partial x_j(i)} \right\} = \left\{ \frac{\partial \ddot{b}}{\partial x_j(i)} \right\} - \left[\frac{\partial \dot{E}}{\partial x_j(i)} \right] \{\dot{x}\} - [\dot{E}] \left\{ \frac{\partial \dot{x}}{\partial x_j(i)} \right\} - \left[\frac{\partial E}{\partial x_j(i)} \right] \{\ddot{x}\}$$

$$j = 1, 2 \quad i = 1, \text{NUDOS} \quad (11)$$

Al que igual que razonábamos en velocidad, es evidente que obtendremos ecuaciones similares en los *mecanismos activos I* que actúan en cada punto de síntesis para cada iteración, involucrándose en ellas las coordenadas de los puntos del mecanismo en ese punto de síntesis. Es decir, obtendremos ecuaciones del tipo

$$[E]_{ps} \{\ddot{x}\}_{ps} = \{\ddot{b}\}_{ps} - [\dot{E}]_{ps} \{\dot{x}\}_{ps} \quad (12)$$

que expandida a todos los puntos de síntesis y a todas las variables de diseño queda como (10) con

$$[E] = \begin{bmatrix} [E_1] & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & [E_2] & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & [E_3] & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [E_4] & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [E_5] & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & [L] \end{bmatrix} \{\ddot{x}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \\ \ddot{x}_5 \\ \cdot \\ \ddot{x}_L \end{Bmatrix}$$

$$[\dot{E}] = \begin{bmatrix} [\dot{E}_1] & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & [\dot{E}_2] & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & [\dot{E}_3] & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [\dot{E}_4] & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [\dot{E}_5] & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & [0] \end{bmatrix} \quad (13)$$

Nuevamente, al ser independientes las funciones cinemáticas para cada punto de síntesis, se pueden resolver sólo en las variables de diseño sobre las que se desee establecer restricciones.

Los gradientes de las aceleraciones con respecto a cada una de las coordenadas del mecanismo en los puntos de síntesis deseados se obtienen como solución del sistema lineal (11) para cada uno de los puntos de síntesis.

El resultado de los cálculos en cada punto de síntesis nos lleva al conocimiento del valor de las funciones de velocidad y aceleración de todos los puntos del mecanismo que actúa en esa iteración, *mecanismo activo I*, así como de sus gradientes respecto

a las variables de diseño. Estos datos son suficientes para incorporar estas funciones al proceso de optimización, siendo posible, en consecuencia, imponer restricciones de velocidad en la síntesis.

Dado que al comenzar el proceso de síntesis no se conocen valores cinemáticos, una norma de funcionamiento puede ser:

- Resolver la síntesis sólo en posición.
- Obtener los valores finales de las variables cinemáticas que queremos restringir. De éstos valores se dispone de forma automática, ya que en el software desarrollado se resuelven los sistemas para los *mecanismos activos I* que resultan en cada punto de síntesis.
- A la vista de los valores obtenidos imponer restricciones cinemáticas y recomenzar el proceso.

Tratamiento de las restricciones geométricas en el problema de velocidad y aceleración

En el problema cinemático, no todas las restricciones utilizadas en el problema de posición han de formar parte del sistema de ecuaciones que determina el comportamiento cinemático, ya que algunas sólo se utilizan para elegir la adecuada entre varias (p.e. impedir que el triángulo dé la vuelta).

El cálculo analítico de las velocidades y aceleraciones, así como de sus gradientes respectivos, exige el conocimiento hasta las derivadas terceras de las restricciones que intervienen en la matriz $[E]$. Veamos a continuación algunos ejemplos. Para un desarrollo más detallado y general de todas las restricciones puede consultarse en la referencia [14].

-Restricción de seno constante - producto vectorial

El producto vectorial interviene en el sistema a través de la condición de seno del ángulo que forman tres nudos A, B, C, constante.

En la resolución del problema de velocidad se utiliza directamente el producto vectorial, no la ecuación de seno constante. La condición geométrica es la misma. En posición es más adecuado la función de seno (por los valores extremos conocidos de las bandas), pero en el problema cinemático la expresión que intervendrá en la matriz geométrica es la del producto vectorial.

Recordemos que la ecuación de restricción correspondiente era

$$h_4 = [x(B) - x(A)][y(C) - y(A)] - [x(C) - x(A)][y(B) - y(A)] \quad (14)$$

y su derivada con respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \frac{dh_4}{dt} &= [\dot{x}(B) - \dot{x}(A)][y(C) - y(A)] + [x(B) - x(A)][\dot{y}(C) - \dot{y}(A)] - \\ &- [\dot{x}(C) - \dot{x}(A)][y(B) - y(A)] - [x(C) - x(A)][\dot{y}(B) - \dot{y}(A)] = \quad (15a) \\ &= [y(B) - y(C)]\dot{x}(A) - [x(B) - x(C)]\dot{y}(A) + [y(C) - y(A)]\dot{x}(B) - \\ &- [x(C) - x(A)]\dot{y}(B) - [y(B) - y(A)]\dot{x}(C) + [x(B) - x(A)]\dot{y}(C) \end{aligned}$$

o de otra forma

$$\frac{dh_4}{dt} = [E]\{\dot{x}\} = [E_1 E_2 E_3 E_4 E_5 E_6] \begin{Bmatrix} \dot{x}(A) \\ \dot{y}(A) \\ \dot{x}(B) \\ \dot{y}(B) \\ \dot{x}(C) \\ \dot{y}(C) \end{Bmatrix} \begin{matrix} E_1 = y(B) - y(C) \\ E_2 = -[x(B) - x(C)] \\ E_3 = y(C) - y(A) \\ E_4 = -[x(C) - x(A)] \\ E_5 = -[y(B) - y(A)] \\ E_6 = x(B) - x(A) \end{matrix} \quad (15b)$$

Por otra parte, es preciso conocer los gradientes de la velocidad con respecto a las variables de diseño para aplicar el procedimiento de optimización. Ello nos obliga a calcular las derivadas de dh_4/dt con respecto a las variables de diseño, en la forma

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{dh_4}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} [E]\{\dot{x}\} + [E] \left\{ \frac{\partial \dot{x}}{\partial x_i} \right\} \quad (16)$$

siendo necesario calcular las derivadas de todos los términos de la matriz $[E]$ con respecto a las variables afectadas. Su cálculo es muy sencillo, ya que se trata de derivadas directas. Los resultados, debidamente expandidos nos permiten completar las matrices que intervienen en la ecuación (7) que resuelve los gradientes de la velocidad con respecto a las variables de diseño.

Para el tratamiento de restricciones en aceleración es preciso realizar una segunda y tercera derivadas de cada una de las funciones restricción que intervienen en la matriz $[E]$ para calcular las aceleraciones y sus gradientes, siendo necesario tener en cuenta cómo está montada la matriz $[E]$ en sus filas correspondientes a las restricciones, para calcular las filas de $[dE/dt]$ y las de $[\partial E/\partial x_j]$. En el caso de la presente restricción puede escribirse

$$\frac{d^2 h_4}{dt^2} = \frac{d}{dt} [E]\{\dot{x}\} = \frac{d}{dt} [E_1 E_2 E_3 E_4 E_5 E_6] \begin{Bmatrix} \dot{x}(A) \\ \dot{y}(A) \\ \dot{x}(B) \\ \dot{y}(B) \\ \dot{x}(C) \\ \dot{y}(C) \end{Bmatrix} + [E_1 E_2 E_3 E_4 E_5 E_6] \begin{Bmatrix} \ddot{x}(A) \\ \ddot{y}(A) \\ \ddot{x}(B) \\ \ddot{y}(B) \\ \ddot{x}(C) \\ \ddot{y}(C) \end{Bmatrix} \quad (17a)$$

con

$$\begin{matrix} \frac{d}{dt} E_1 = \dot{y}(B) - \dot{y}(C) & \frac{d}{dt} E_2 = -[\dot{x}(B) - \dot{x}(C)] & \frac{d}{dt} E_3 = \dot{y}(C) - \dot{y}(A) \\ \frac{d}{dt} E_4 = -[\dot{x}(C) - \dot{x}(A)] & \frac{d}{dt} E_5 = -[\dot{y}(B) - \dot{y}(A)] & \frac{d}{dt} E_6 = \dot{x}(B) - \dot{x}(A) \end{matrix} \quad (17b)$$

Por otra parte, nos es preciso conocer los gradientes de la aceleración con respecto a las variables de diseño para aplicar el procedimiento de optimización, ello nos obliga a calcular las derivadas de d^2h_4/dt^2 con respecto a las variables de diseño, teniéndose

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{d^2h_4}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{d}{dt}[E] \right\} \{ \dot{x} \} + [E] \left\{ \frac{\partial \dot{x}}{\partial x_i} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} [E] \{ \ddot{x} \} + [E] \left\{ \frac{\partial \ddot{x}}{\partial x_i} \right\} \quad (18)$$

En esta ecuación sólo desconocemos las derivadas con respecto a las variables de diseño de los términos dE/dt . Sus valores son

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{dE_1}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x_i} [\dot{y}(B) - \dot{y}(C)] & \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{dE_2}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial x_i} [\dot{x}(B) - \dot{x}(C)] & \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{dE_3}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x_i} [\dot{y}(C) - \dot{y}(A)] \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{dE_4}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial x_i} [\dot{x}(C) - \dot{x}(A)] & \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{dE_5}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial x_i} [\dot{y}(B) - \dot{y}(A)] & \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{dE_6}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x_i} [\dot{x}(B) - \dot{x}(A)] \end{aligned} \quad (19)$$

Todos los términos que aparecen en las ecuaciones anteriores se han obtenido como solución del problema de gradientes en velocidad. La resolución del problema global planteado en aceleraciones nos da los gradientes de las derivadas segundas con respecto al tiempo. Por tanto, cuando deseemos imponer restricciones de aceleración, hemos de resolver también el problema de velocidad.

- *Par superior engranaje-engranaje*

La ecuación de la restricción correspondiente era (Figura 2)

$$h_5 = [\theta_{A1} - (\theta_{A1})_0]L_1 + [\theta_{A2} - (\theta_{A2})_0]L_2 \quad (20a)$$

con

$$\theta_{A1} = \arctg \frac{y_{A1} - y_{01}}{x_{A1} - x_{01}} \quad \theta_{A2} = \arctg \frac{y_{A2} - y_{02}}{x_{A2} - x_{02}}$$

$$L_1 = \sqrt{(x_{A1} - x_{01})^2 + (y_{A1} - y_{01})^2} \quad L_2 = \sqrt{(x_{A2} - x_{02})^2 + (y_{A2} - y_{02})^2} \quad (20b)$$

La ecuación correspondiente al cálculo de la velocidad es

$$\frac{dh_5}{dt} = [\nabla h_5]^T \{ \dot{x} \} = 0 \quad (21)$$

siendo ∇h_5 el gradiente de la función restricción y $\{ \dot{x} \}$ el vector velocidad. Sus valores deben expandirse para situarlos de forma adecuada en la matriz que representa el mecanismo. Sus gradientes se obtendrán mediante la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{dh_5}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} [\nabla h_5]^T \{ \dot{x} \} + [\nabla h_5]^T \left\{ \frac{\partial \dot{x}}{\partial x_i} \right\} \quad (22)$$

que nos permite calcular, en la expresión general, los gradientes de la velocidad de los nudos del mecanismo.

Para imponer restricciones de velocidad precisamos las derivadas primeras (velocidad) y las derivadas segundas (gradientes de la velocidad). Y por fin, para imponer restricciones de aceleración hemos de calcular las derivadas segundas (aceleración) y las derivadas terceras (gradientes de la aceleración).

Así, la derivada con respecto al tiempo es

$$\frac{d^2 h_5}{dt^2} = \frac{d}{dt} [\nabla h_5]^T \{\dot{x}\} + [\nabla h_5]^T \left\{ \frac{d\dot{x}}{dt} \right\} = 0 \quad (23)$$

La derivada con respecto al tiempo del gradiente se obtendrá a través de las derivadas parciales de las que depende, es decir

$$\begin{aligned} \frac{d^2 h_5}{dt^2} = & \left[\frac{\partial}{\partial x_{01}} \{\nabla h_5\}^T + \frac{\partial}{\partial y_{01}} \{\nabla h_5\}^T + \frac{\partial}{\partial x_{A1}} \{\nabla h_5\}^T + \frac{\partial}{\partial y_{A1}} \{\nabla h_5\}^T \right] \begin{Bmatrix} \dot{x}_{01} \\ \dot{y}_{01} \\ \dot{x}_{A1} \\ \dot{y}_{A1} \end{Bmatrix} + \\ & + \left[\frac{\partial h_5}{\partial x_{01}}, \frac{\partial h_5}{\partial y_{01}}, \frac{\partial h_5}{\partial x_{A1}}, \frac{\partial h_5}{\partial y_{A1}} \right] \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{01} \\ \ddot{y}_{01} \\ \ddot{x}_{A1} \\ \ddot{y}_{A1} \end{Bmatrix} = [H(h_5)] \{\dot{x}\} + [\nabla h_5]^T \{\ddot{x}\} \end{aligned} \quad (24)$$

donde $[H(h_5)]$ es la matriz Hessiana de la función restricción y $\{\ddot{x}\}$ es el vector de aceleraciones. Nuevamente deben expandirse para situar los términos de forma adecuada en la expresión general del mecanismo.

Respecto al primer engranaje

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{d^2 h_5}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} [H(h_5)] \{\dot{x}\} + [H(h_5)] \frac{\partial}{\partial x_i} \{\dot{x}\} + \frac{\partial}{\partial x_i} [\nabla h_5]^T \{\ddot{x}\} + [\nabla h_5]^T \frac{\partial}{\partial x_i} \{\ddot{x}\} \quad (25)$$

En esta ecuación todos los términos son conocidos excepto los gradientes de las aceleraciones que se obtienen precisamente a partir de la ecuación (11).

Con respecto al segundo engranaje el razonamiento es idéntico.

Imposición de restricciones sobre la velocidad y aceleración

La imposición de restricciones de velocidad puede realizarse sobre sus componentes \dot{x} , \dot{y} de forma inmediata, ya que sus valores se obtienen de la resolución anterior, o bien en los referentes al módulo v de la velocidad.

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (26)$$

siendo posible obtener los gradientes de la restricción de forma asimismo inmediata mediante la expresión

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-1/2} \left(\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x_i} + \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial x_i} \right) \quad (27)$$

siendo x_i cada una de las coordenadas del *mecanismo activo I*.

En forma totalmente análoga para la aceleración se imponen restricciones sobre las componentes \ddot{x} , \ddot{y} o bien sobre el módulo

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} \quad (28)$$

con gradiente

$$\frac{\partial a}{\partial x_i} = (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2)^{-1/2} \left(\ddot{x} \frac{\partial \ddot{x}}{\partial x_i} + \ddot{y} \frac{\partial \ddot{y}}{\partial x_i} \right) \quad (29)$$

EJEMPLOS

En los siguientes apartados se recogen algunos ejemplos que presentan los resultados obtenidos mediante la formulación presentada en éste artículo.

Ejemplo 1. Mecanismo de cuatro barras

En la referencia [7], se planteó este mismo problema de síntesis exacta, relativo al problema de posición, mientras que en este artículo se incorporan restricciones cinemáticas.

El mecanismo en estudio es el mecanismo de cuatro barras + díada de la Figura 2.

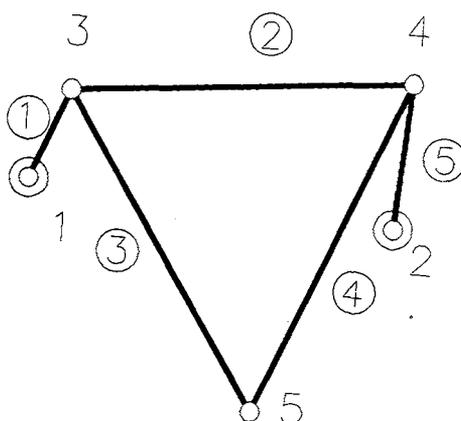


Figura 2. Mecanismo de cuatro barras + díada

La síntesis de posición planteada era la recogida en la Tabla I.

DEFINICIÓN DE LA SÍNTESIS		
PS	X	Y
1	13.2657790	- 10.019700
2	9.628700	- 8.930700
3	7.757700	- 8.838100
4	4.283400	- 11.171100
5	6.413600	- 12.612500
6	11.026300	- 11.900400
7	14.978300	- 10.341000

Tabla I. Puntos de síntesis

La solución se recoge en la Tabla II.

LONGITUDES	
BARRA	LONGITUD
1	4.000000
2	14.000000
3	15.000000
4	15.000000
5	6.000000

Tabla II. Longitudes solución

En las soluciones de posición ya resueltas, obtenemos los valores cinemáticos de los nudos de los "mecanismos activos I" en todos los puntos de precisión. Así, por ejemplo, la velocidad $\dot{x}(5)_3$ que obtenemos para el nudo 5 en el punto de síntesis 3 es $\dot{x}(5)_3 = +0.462977745D + 03$.

Se han tratado los siguientes casos de síntesis manteniendo los puntos de precisión indicados en la Tabla I:

Caso 1: Se impone una restricción de velocidad muy severa, que limita su valor a $\dot{x}(5)_3 = -0.10000000D + 03$.

Caso 2: Se impone una restricción de velocidad menos severa, que limita su valor a $\dot{x}(5)_3 = -0.40000000D + 03$.

Caso 3: Se impone, además de la restricción de velocidad indicada en el Caso 2, una restricción de aceleración en el mismo punto de síntesis 3. En concreto, sabiendo que el valor de la componente y de la aceleración en el punto 5 es de $\ddot{y}(5)_3 = -0.29895105D + 05$ se restringe el valor $\ddot{y}(5)_3 = -0.25000000D + 05$.

Caso 4: Idéntico al Caso 3 pero ahora se permite a los puntos fijos la posibilidad de moverse dentro de una banda. Esto permitirá al mecanismo adaptarse mucho mejor a las condiciones impuestas y en consecuencia bajar el valor de la función objetivo resultante. En concreto, se utilizan las siguientes bandas para los puntos fijos

$$-1.00 < x(1) < 1.00 \quad -1.00 < y(1) < 1.00 \quad 14.00 < x(2) < 16.00 \quad -2.10 < y(2) < -0.10$$

que inicialmente tienen las coordenadas en la Tabla III.

COORDENADAS DE LOS PUNTOS FIJOS		
NUDO	X-INICIAL	Y-INICIAL
1	0.000000	0.000000
2	15.000000	- 1.100000

Tabla III. Coordenadas de los puntos fijos

Caso 5: A las restricciones cinemáticas del Caso 4, se añaden otras dos en otro punto de precisión. Así, en el punto 5 se imponen límites al módulo de la velocidad y la aceleración en propio nudo 5, Así, si los valores exactos son

$$v(5)_5 = 0.50941870D + 03 \quad a(5)_5 = 0.45979694D + 05$$

se restringen a los siguientes valores máximos

$$v(5)_5 = 0.40000000D + 03 \quad a(5)_5 = 0.42000000D + 5$$

Los resultados obtenidos en cada uno de los casos anteriores se explicitan en la Tabla IV.

	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5
L_1	3.028555	3.72808	3.64680	3.31491	3.73988
L_2	14.59707	14.01445	13.84843	13.56089	16.50489
L_3	15.05072	14.94996	14.57200	14.3975	14.29121
L_4	12.27295	14.16153	15.74827	15.91603	18.63774
L_5	3.55401	5.16000	6.67614	5.70355	8.44462
x_1				1.000000	-0.74363
y_1				0.674266	-1.00000
x_2				16.00000	16.00000
y_2				-0.10000	-0.10000
F. Obj.	$0.1173D + 01$	$0.6754D - 01$	$0.1283D + 00$	$0.4066D - 01$	$0.1703D + 00$

Tabla IV. Resultados para cada caso

Se observa cómo la imposición de restricciones cinemáticas ocasiona una variación de las longitudes de las barras y un incremento, lógico por otra parte, de la función objetivo. La movilidad de los puntos fijos permite mejorar la precisión. De cualquier forma, las restricciones cinemáticas impuestas se cumplen en los mecanismos activos I correspondientes.

Ejemplo 2. Mecanismo transportador de cajas

En este ejemplo, se pretende conseguir un determinado proceso industrial: situada una caja en un punto inicial, se trata de recogerla en él y entregarla en una zona definida por bandas.

Se define de esta forma la síntesis de posición mediante regiones útiles. Como se verá, esta manera de plantear el problema es muy eficaz para la síntesis cinemática. El mecanismo elegido es la Figura 3.

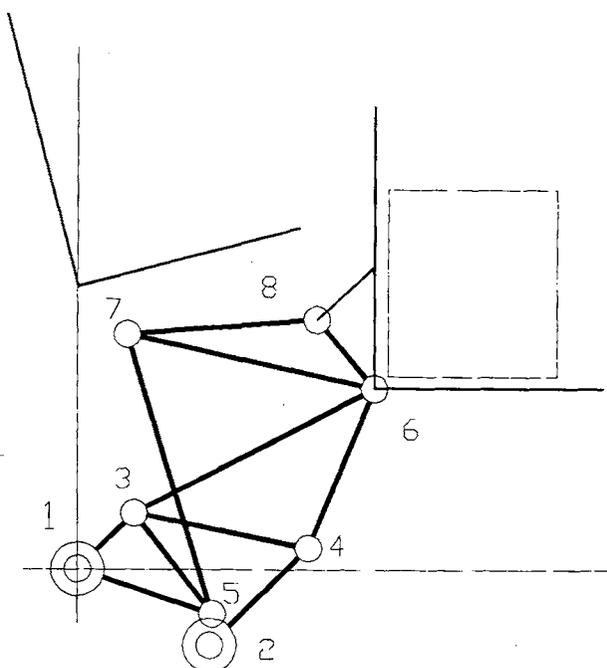


Figura 3. Mecanismo transportador de cajas

En la referencia [7], relativo a la síntesis de posición exclusivamente, se obtenía el resultado mostrado en la Figura 4.

A las restricciones impuestas en el caso anterior, añadimos ahora la siguiente: la velocidad relativa al eje y del punto 6 en la posición de recogida de la caja y en su posición de entrega ha de ser nula. Es esta una condición funcional que puede ser importante. Se parte de los mismos valores del caso anterior y se llega a las longitudes reflejadas en la Tabla V.

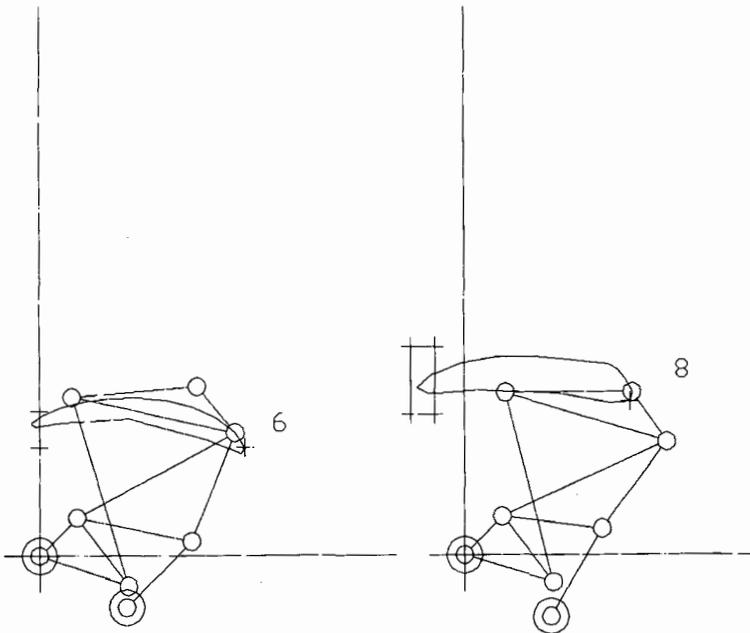


Figura 4. Trayectoria de los puntos 6 y 8 en el ejemplo 2. Síntesis de posición

LONGITUDES		
BARRA	LONGITUD INICIAL	LONGITUD FINAL
1	9.000000	9.000000
2	16.000000	15.659176
3	14.000000	13.864767
4	36.000000	30.396816
5	19.000000	17.019403
6	22.000000	17.991286
7	18.000000	16.822431
8	33.000000	32.147923
9	28.000000	28.421768
10	22.000000	21.421182
11	10.000000	10.000000

Tabla V. Resultados obtenidos

El resultado cumple perfectamente las restricciones de posición y cinemáticas impuestas.

En la Figura 5 se recoge la trayectoria del punto al que se ha impuesto la restricción cinemática. La evolución de la función objetivo se presenta en la Figura 6.

Es interesante comparar las trayectorias en los dos casos planteados en este ejemplo. Se observa, en la solución al ejemplo 2 con síntesis cinemática, la aparición de dos cúspides como consecuencia de la restricción de velocidad impuesta.

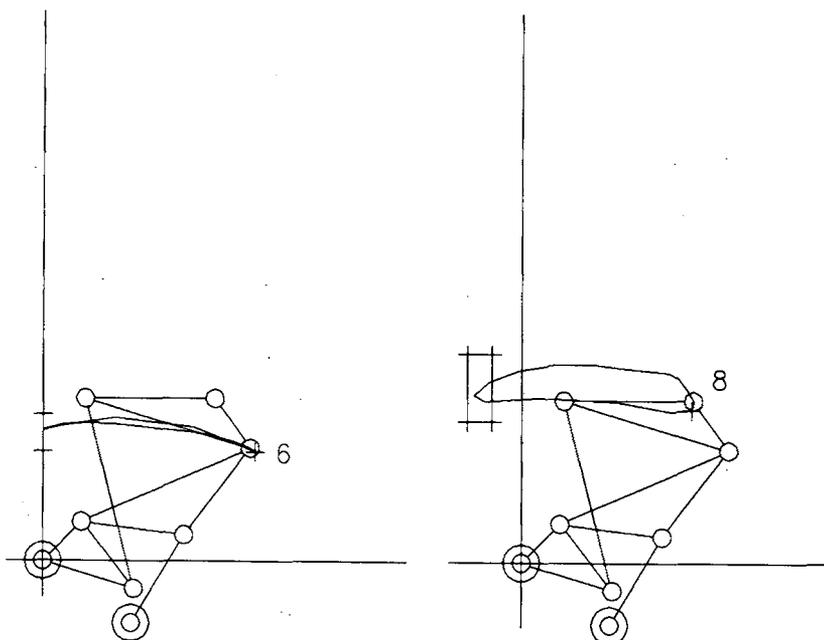


Figura 5. Trayectoria de los puntos 6 y 8

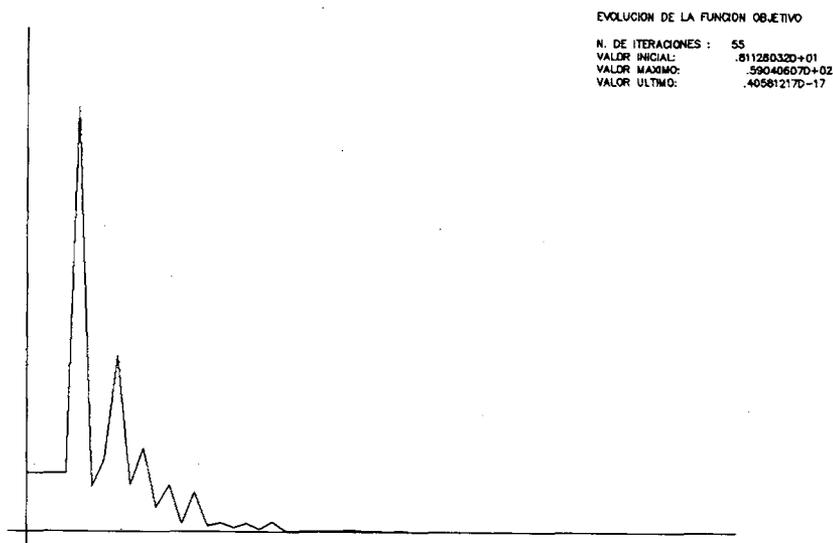


Figura 6. Evolución de la función objetivo

Ejemplo de síntesis en mecanismos con par superior engranaje-engranaje.

En este ejemplo se selecciona un mecanismo que involucra todas las restricciones estudiadas en el desarrollo de este trabajo. Su esquema se representa en la Figura 7.

La síntesis planteada en la referencia [7] era una síntesis de generación de función entre los puntos 3 y 9, definida por los valores incluidos en la Tabla IV.

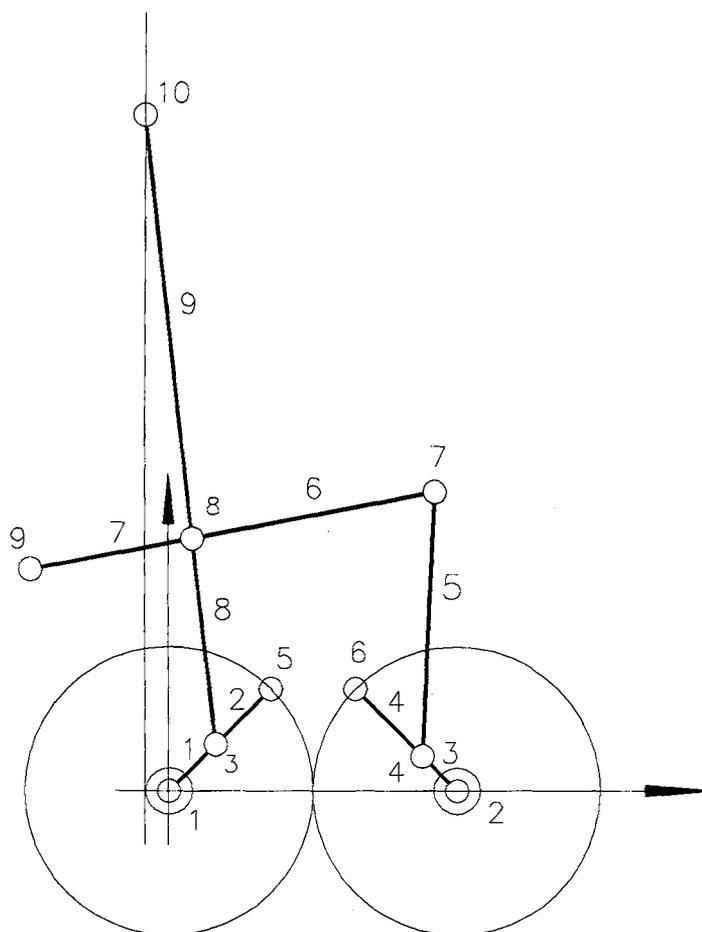


Figura 7. Síntesis de mecanismo con par superior engranaje-engranaje

DEFINICIÓN DE LA SÍNTESIS				
PS	X (3)	Y (3)	X (9)	Y (9)
1	3.695520	1.530730	-28.50000	3.000000
2	1.530730	3.695520	-29.50000	4.900000
3	-1.530730	3.695520	-31.70000	8.100000
4	-4.000000	0.001000	-33.50000	11.200000
5	-2.828430	-2.828430	-33.00000	6.400000
6	0.001000	-4.000000	-31.10000	1.600000
7	3.695520	-1.530730	-29.00000	1.200000

Tabla VI. Puntos de síntesis

Se trata ahora de conseguir la generación de función anteriormente definida pero cambiando los puntos de precisión del nudo 9 por regiones de precisión. Así, la posición

DEFINICIÓN DE LA SÍNTESIS				
PS	X (9) INF.	X (9) SUP.	Y (9) INF.	Y (9) SUP.
1	-28.60000	-28.40000	2.900000	3.100000
2	-29.60000	-29.40000	4.800000	5.000000
3	-31.80000	-31.60000	8.000000	8.200000
4	-33.60000	-33.40000	11.100000	11.300000
5	-33.10000	-32.90000	6.300000	6.500000
6	-31.20000	-31.00000	1.500000	1.700000
7	-29.10000	-28.90000	1.100000	1.300000

Tabla VII. Bandas de variación de los puntos de síntesis

del punto 9 se define ahora en la Tabla VII.

Si no se incluyen restricciones cinemáticas la solución es la dada en la Tabla VIII.

LONGITUDES		
BARRA	LONGITUD INICIAL	LONGITUD FINAL
1	4.000000	4.000000
2	6.000000	5.985318
3	2.000000	4.980715
4	8.000000	5.033967
5	22.000000	14.686802
6	24.000000	17.738732
7	14.000000	30.051118
8	20.000000	10.462367
9	15.000000	10.189555

Tabla VIII. Solución sin restricciones cinemáticas

En las condiciones anteriores se estudian los siguientes casos en los que se incluyen restricciones cinemáticas:

Caso 1: Se impone la restricción de velocidad siguiente $\dot{x}(9)_4 = 0.1 \cdot 10^1$

Caso 2: Se impone la restricción de aceleración $\ddot{y}(9)_3 = 0.25 \cdot 10^4$

Caso 3: Se impone la restricción de aceleración $\ddot{x}(9)_3 = 0.75 \cdot 10^4$

Caso 4: Se imponen simultáneamente las restricciones de velocidad y aceleración $v(9)_4 = 0.35 \cdot 10^3$, $a(9)_3 = 0.6 \cdot 10^4$

Caso 5: Idéntico al caso 4, pero se aumenta el peso del punto de síntesis 3 pasándolo a 5.00, quedando los restantes en 1.00.

Caso 6: Se aumentan las exigencias cinemáticas, introduciendo síntesis de velocidad y aceleración en un nudo que no interviene en la síntesis de posición

$$\dot{x}(9)_3 = -0.20 \cdot 10^3 \quad \dot{y}(10)_4 = -0.38 \cdot 10^3 \quad \ddot{x}(9)_3 = 0.75 \cdot 10^4 \quad \ddot{y}(10)_4 = 0.18 \cdot 10^4$$

Caso 7: Se modifican las exigencias cinemáticas, relajándolas mediante la imposición de las siguientes bandas de variación.

$$\begin{aligned} \dot{x}(9)_3 &= -0.20 \cdot 10^3 & \dot{y}(10)_6 &= [-0.65 \cdot 10^2, -0.55 \cdot 10^2] \\ \ddot{x}(9)_3 &= 0.75 \cdot 10^4 & \ddot{y}(10)_6 &= [0.30 \cdot 10^5, 0.32 \cdot 10^5] \end{aligned}$$

Los resultados obtenidos en cada planteamiento se presentan en la Tabla IX.

	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
L_1	4.00000	4.00000	4.00000	4.00000
L_2	6.00425	5.99451	5.97130	6.12413
L_3	5.01846	5.05275	5.06605	5.16573
L_4	4.97729	4.95273	4.96265	4.71014
L_5	15.34750	14.56018	15.35399	15.22337
L_6	17.65937	17.85362	17.86493	18.64378
L_7	30.10148	30.04307	30.01498	30.02815
L_8	10.91440	10.36011	10.96530	10.89495
L_9	10.31390	10.21663	9.15978	9.54994
F. Obj.	0.1085D - 02	0.1677D - 10	0.3599D - 01	0.1783D + 00

	Caso 5	Caso 6	Caso 7
L_1	4.00000	4.00000	4.00000
L_2	6.04618	5.98532	5.55492
L_3	5.23969	4.98071	4.15610
L_4	4.71334	5.03397	6.28898
L_5	15.17334	14.68680	17.58223
L_6	18.91315	17.73873	15.36328
L_7	30.03041	30.05103	29.99511
L_8	10.93462	10.46237	12.37788
L_9	9.53201	10.18955	6.75044
F. Obj.	0.3571D + 00	0.1356D + 05	0.6538D + 00

Tabla IX. Solución con restricciones cinemáticas

Nuevamente se observa cómo la imposición de restricciones cinemáticas, ocasional variación de las longitudes y pérdida de precisión en aras de conseguir el cumplimiento de las restricciones cinemáticas en el mecanismo activo I correspondiente. En el caso 6, una restricción cinemática excesivamente fuerte provoca longitudes muy distintas entre la solución de la síntesis global y las longitudes del mecanismo activo involucrado en la restricción cinemática (mecanismo activo 4 resultante del proceso de síntesis local) y por tanto un muy elevado valor de la función objetivo.

CONCLUSIONES

En este artículo se demuestra que el planteamiento que se hizo de la síntesis en [7] permite incorporar sin ninguna dificultad restricciones cinemáticas y con ello la resolución de problemas de síntesis en los que aparezcan situaciones muy habituales como son la restricción de valores en velocidades o aceleraciones en determinados puntos del mecanismo que ha de cumplir una cierta trayectoria. Ello es debido a la incorporación al vector de diseño de todos los parámetros geométricos que definen el comportamiento del mecanismo, y su expansión a tantos "mecanismos activos" como puntos de síntesis de posición existan, lo que permite determinar el valor de funciones cinemáticas en cualquier instante definido por una posición dada (punto de síntesis) que puede ser tan preciso o relajado como se desee de acuerdo a las bandas de precisión establecidas e incorporarlas al proceso de optimización adoptado, que es resuelto mediante una serie de problemas cuadráticos.

Un juego adecuado, y por otra parte habitual en el diseño, con los requerimientos exigibles al mecanismo permite ponderar, tanto matemáticamente incorporándolo a la función objetivo, como heurísticamente mediante la imposición de bandas de precisión adecuadas, las distintas restricciones de diseño consiguiéndose de forma simple, rápida y efectiva la mayoría de los problemas habituales del diseño de mecanismos.

La presente herramienta permite además detectar de forma simple, incongruencias o interferencias en el mecanismo propuesto así como la invalidez de la topología del mismo para la resolución del problema propuesto sin más que observar el valor de la función objetivo resultante de la solución del mismo.

REFERENCIAS

1. J.S. Arora, *Introduction to Optimum Design*, McGraw Hill, Inc. (1989).
2. Vanderplaats, *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design with Applications*, McGraw Hill, (1984).
3. S. Hernández, *Métodos de Diseño Óptimo de Estructuras*, C.I.C.C. y P. de Aragón, (1990).
4. D.G. Luenberger, D.G. *Linear and Nonlinear Programming*, Stanford University, USA (1973).
5. M. Ceccarelli, "Optimal Design and Location of Manipulators", *Proc. of the NATO-Advanced Study Inst. on Computer Aided Design of Rigid and Flexible Mechanical Systems*, Vol. II, pp. 299-310, (1993).
6. J.R. McGarva, "Rapid Research and Selection of Path Generation Mechanisms from a Library", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 29, pp. 223-235, (1994).

7. J.A. Alba, M. Doblaré, L. Gracia, "Un método general para la síntesis de posición de mecanismos con pares inferiores y superiores I. Síntesis de posición de mecanismos planos", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **12**, No. 4, pp. 467-496, 1996.
8. J. García de Jalón, M.A. Serna, R. Avilés, "Computer Method for Kinematic Analysis of Lower Pair Mechanisms-I: Velocity and Accelerations", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. **16**, No. 5, pp. 543-556, (1981).
9. J. García de Jalón, M.A. Serna, R. Avilés, "Computer Method for Kinematic Analysis of Lower Pair Mechanisms-II: Position Problems", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. **16**, No. 5, pp. 557-566, (1981).
10. R. Avilés, M.B. Ajhuria, J. García de Jalón, "A Fairly General Method for Optimum Synthesis of Planar Mechanisms", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. **20**, No. 4, pp. 321-328, (1985).
11. S. Navalpotro, *Un método de síntesis óptima de mecanismos mediante elementos finitos*, Tesis Doctoral, Universidad del País Vasco, (1989).
12. S. Vallejo, *Optimización de mecanismos planos con cualquier configuración y tipo de síntesis*, Tesis Doctoral, Universidad del País Vasco, (1993).
13. The Numerical Algorithm Group Limited, NAG Fortran Library, Oxford, (1992).
14. J.A. Alba, *Método de síntesis óptima de mecanismos planos y espaciales dotados de pares inferiores y superiores con restricciones de posición y cinemáticas*, Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza, (1994).