

ELEMENTO FINITO ISOPARAMÉTRICO DE INTERFACE PARA PROBLEMAS TRIDIMENSIONAIS

MARCELO F.S.F. DE MOURA
JOÃO P.M. GONÇALVES
ANTÓNIO T. MARQUES
e
PAULO M.S.T. DE CASTRO

*Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial
Rua dos Bragas, 4099 Porto, Portugal*

SUMÁRIO

A evolução dos meios computacionais tem originado um acréscimo acentuado do uso de elementos finitos tridimensionais. Neste contexto, o desenvolvimento de elementos de interface para o estudo de interfaces entre superfícies de sólidos com propriedades mecânicas diferentes reverte-se de particular importância. Baseado no método da função penalidade foi desenvolvido um elemento de interface de dezoito nós compatível com os elementos paralelepípedicos tridimensionais de vinte e sete nós. Para modelizar o aparecimento e o crescimento do dano nas interfaces foi desenvolvido um critério de propagação. A performance do elemento foi testada através de alguns exemplos simples.

SUMMARY

The evolution of the computational capacity produced significant increase of the use of three-dimensional finite element methods. In this context, the development of interface elements to study interfaces between surfaces of solids with different mechanical properties is very important. A interface finite element with eighteen nodes that matches with brick element with twenty-seven nodes, was developed based on the penalty function method. To model the initiation and growth of the damage at the interfaces a propagation criteria was developed. The performance of the element was tested using some simple examples.

INTRODUÇÃO

São inúmeras as situações onde a análise de sólidos através da utilização do método dos elementos finitos se depara com a existência dum comportamento descontínuo entre elementos contíguos. Dois exemplos típicos são a análise de juntas adesivas

Recibido: Mayo 1995

caracterizada pela descontinuidade material entre o adesivo e o substracto, ou o estudo de interfaces entre camadas diferentemente orientadas num material compósito.

Entre os métodos mais comuns para o desenvolvimento de elementos de interface, destacam-se o método dos multiplicadores de Lagrange^{1,2,3} e o método da função penalidade^{4,5,6}. O primeiro apresenta a vantagem de, através da utilização de multiplicadores de Lagrange, impôr condições de contacto exactas, como é o caso da impenetrabilidade. Em contrapartida, obriga ao recurso a parâmetros adicionais que provocam o avolumar do problema devido ao aumento do número de equações. O recurso a este método para a resolução de problemas tridimensionais é, por via disso, bastante restringido. O método da função penalidade apresenta como vantagens a simplicidade e a dispensa de utilização de variáveis adicionais. Contudo, existe uma grande sensibilidade à escolha do parâmetro de penalidade (ϵ). Assim, este valor deve ser tão elevado quanto possível, uma vez que para valores de $\epsilon \rightarrow \infty$, a solução tende para o valor exacto. No entanto, quanto maior for o valor de ϵ maiores são os problemas numéricos de mau condicionamento das matrizes intervenientes no cálculo, que levam ao aparecimento de problemas de convergência. Assim, o compromisso reside na escolha do maior valor possível que leva à convergência da solução.

O objectivo deste artigo é apresentar um elemento de interface de dezoito nós compatível com os elementos tridimensionais paralelepípedicos de vinte e sete nós, disponíveis no software ABAQUS⁷. Este elemento, desenvolvido segundo o método da função penalidade, possui uma formulação isoparamétrica e espessura nula. Adicionalmente foi prevista a possibilidade de se estudar a iniciação e propagação de defeitos existentes nas interfaces, através do desenvolvimento dum critério de propagação, baseado nas tensões normal e de corte presentes nestas zonas de descontinuidade.

FORMULAÇÃO TEÓRICA

Na análise de problemas estruturais onde os deslocamentos \mathbf{U} são usados como variáveis de estado * o funcional π correspondente à energia potencial total escreve-se

$$\pi(\mathbf{U}) = V - W \quad (1)$$

onde V é a energia de deformação e W energia potencial das forças aplicadas.

No contexto da teoria linear elástica, uma série de abordagens foi desenvolvida para a solução das equações relativas aos problemas de contacto. O método mais comum baseia-se na minimização da energia potencial sujeita a certas restrições cinemáticas.

Considerando o método variacional na obtenção das equações de equilíbrio dum problema estrutural com a condição de restrição relativa ao problema do contacto, e recorrendo ao método da função penalidade, teremos

$$\bar{\pi}(\mathbf{U}) = \pi(\mathbf{U}) + \frac{\epsilon}{2}[G(\mathbf{U})]^2 \quad (2)$$

* Conjunto de valores, para os quais o funcional $\pi(\mathbf{U})$ apresenta um máximo, mínimo ou ponto de sela.

em que

$$\pi(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \mathbf{F} \quad (3)$$

sendo $\pi(\mathbf{U})$ um funcional relativo a um problema estrutural sem restrições, $\bar{\pi}(\mathbf{U})$ funcional relativo a um problema com restrição devida ao contacto, \mathbf{U} vector do campo de deslocamentos, \mathbf{K} matriz de rigidez do sistema, \mathbf{F} vector de forças nodais aplicadas, $G(\mathbf{U}) = 0$ a condição restritiva e ϵ parâmetro de penalidade.

Mostra-se que, quando ϵ tende para infinito a minimização do funcional $\bar{\pi}(\mathbf{U})$ traduz com crescente aproximação a condição $G(\mathbf{U}) = 0$. No nosso caso, a condição restritiva para um par de pontos (k) em contacto, escreve-se^{5,8}

$$(\mathbf{U}_i^2 - \mathbf{U}_j^1) \cdot \mathbf{n} + \gamma_k = 0 \quad (4)$$

com \mathbf{U}_i^2 , \mathbf{U}_j^1 campo de deslocamentos de dois pontos homólogos (i e j), de dois sólidos em contacto (1 e 2), \mathbf{n} vector unitário normal à superfície de contacto, γ_k afastamento inicial de dois pontos homólogos (i e j), dos dois sólidos na direcção \mathbf{n} .

Os vectores \mathbf{U}_i^2 e \mathbf{U}_j^1 podem-se escrever como

$$\mathbf{U}_i^2 = \mathbf{e}_i^T \mathbf{U} \quad (5)$$

$$\mathbf{U}_j^1 = \mathbf{e}_j^T \mathbf{U} \quad (6)$$

onde \mathbf{e}_i e \mathbf{e}_j são as três colunas respeitantes ao nó i e as três colunas relativas ao nó j da matriz de identidade. Reescrevendo (4), obtemos

$$(\mathbf{C}^T \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} + \gamma_k = 0 \quad (7)$$

sendo

$$\mathbf{C}_k^T = \mathbf{e}_i^T - \mathbf{e}_j^T \quad (8)$$

Considerando a matriz $\mathbf{C} = [\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_k, \dots, \mathbf{C}_d]$, onde d representa o número total de restrições, obtemos finalmente o funcional relativo ao nosso problema

$$\bar{\pi}(\mathbf{U}) = \pi(\mathbf{U}) + \frac{\epsilon}{2} [(\mathbf{C}^T \mathbf{U} + \gamma)^T (\mathbf{C}^T \mathbf{U} + \gamma)] \quad (9)$$

Fisicamente $\epsilon/2$ representa a rigidez duma mola fictícia, existente entre quaisquer dois pontos em contacto. Minimizando temos

$$\delta \bar{\pi}(\mathbf{U}) = \delta \pi(\mathbf{U}) + \epsilon [\mathbf{U}^T \mathbf{C} \mathbf{C}^T + \gamma^T \mathbf{C}^T] \delta \mathbf{U} = 0 \quad (10)$$

ou

$$[\mathbf{K} + \epsilon \mathbf{C} \mathbf{C}^T] \mathbf{U} = \mathbf{F} - \epsilon \mathbf{C} \gamma \quad (11)$$

Podemos então dizer, através da análise da equação (11) que, quer a matriz de rigidez, quer o vector de forças nodais vêm acrescentados de parcelas relativamente à

bem conhecida expressão da análise estrutural $\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{U}$. Estas traduzem o contributo da restrição imposta ao problema. Constate-se que o uso desta técnica se reflecte na adição de um valor muito grande a alguns elementos da diagonal da matriz de rigidez e uma força correspondente no segundo membro da equação (11), que traduz a condição de restrição (4). Teremos então

$$[\mathbf{K} + \mathbf{K}_p]\mathbf{U} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_p \tag{12}$$

sendo

$$\mathbf{K}_p = \epsilon \mathbf{C}\mathbf{C}^T \tag{13}$$

$$\mathbf{F}_p = -\epsilon \mathbf{C}\boldsymbol{\gamma} \tag{14}$$

Formulação do elemento^{4,6,9}

A formulação do elemento finito de interface consiste na determinação da sua contribuição (\mathbf{K}_p e \mathbf{F}_p), nas matrizes globais do problema em estudo.

Assim, e tendo em conta uma análise tridimensional, consideremos o campo de deslocamentos associado a cada uma das faces, superior e inferior do elemento (Figura 1)

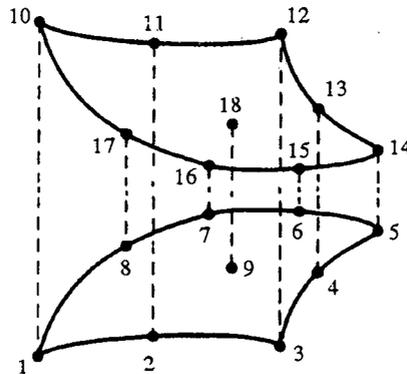


Figura 1. Sequência nodal nas faces

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}_{\text{sup}} = \mathbf{N}_{\text{sup}} \mathbf{U}_{\text{sup}} \tag{15}$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}_{\text{inf}} = \mathbf{N}_{\text{inf}} \mathbf{U}_{\text{inf}} \tag{16}$$

onde \mathbf{U} representa o vector de deslocamentos nodais

$$\mathbf{U}_{\text{sup, inf}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{u}_9 \end{Bmatrix}_{\text{sup, inf}} \quad (17)$$

$$\mathbf{u}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (18)$$

e \mathbf{N} a matriz das funções de forma

$$\mathbf{N}_{\text{sup, inf}} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \dots, \mathbf{N}_9]_{\text{sup, inf}} \quad (19)$$

em que

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (20)$$

As funções de forma deste elemento são as mesmas do elemento rectangular isoparamétrico lagrangeano quadrático de 9 nós (Tabela I), tendo-se considerado a integração de Gauss com nove pontos⁶.

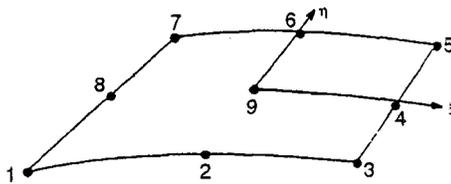


Figura 2. Referencial local

Nós	Funções de forma
1,3,5,7	$N_i = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi\xi_i)(\eta^2 + \eta\eta_i)$
2,4,6,8	$N_i = \frac{1}{2}\xi_i^2(\xi^2 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2) + \frac{1}{2}\eta_i^2(\eta^2 + \eta\eta_i)(1 - \xi^2)$
9	$N_i = (1 - \eta^2)(1 - \xi^2)$

Tabela I. Funções de forma utilizadas no elemento de interface¹⁰

ξ e η são conhecidas como coordenadas locais e variam entre -1 e 1.

As expressões (15) e (16) representam os deslocamentos em coordenadas globais, de um ponto genérico, em função dos deslocamentos nodais. Os deslocamentos nas direcções normal e tangencial à superfície de contacto são obtidos por

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\theta}^T \begin{Bmatrix} v \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (21)$$

sendo

$$\boldsymbol{\theta} = [\mathbf{V}_{1'}, \mathbf{V}_{2'}, \mathbf{V}_{3'}] \quad (22)$$

onde $\mathbf{V}_{1'}$, $\mathbf{V}_{2'}$ e $\mathbf{V}_{3'}$ representam os versores das direcções locais e são obtidos a partir de

$$\mathbf{V}_{\xi} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{V}_{\eta} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

da seguinte forma

$$\mathbf{V}_{1'} = \frac{\mathbf{V}_{\xi}}{|\mathbf{V}_{\xi}|} \quad (25)$$

$$\mathbf{V}_{3'} = \frac{\mathbf{V}_{\xi} \times \mathbf{V}_{\eta}}{|\mathbf{V}_{\xi}| |\mathbf{V}_{\eta}|} \quad (26)$$

$$\mathbf{V}_{2'} = \mathbf{V}_{3'} \times \mathbf{V}_{1'} \quad (27)$$

Os deslocamentos relativos na interface são então constituídos por

- escorregamento nas direcções 1' e 2' *
- aproximação/separação na direcção 3'

$$\begin{Bmatrix} \delta_{1'} \\ \delta_{2'} \\ \delta_{3'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix}_{\text{sup}} - \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix}_{\text{inf}} \quad (28)$$

Combinando as expressões (15), (16) (21) e (28) temos

* As direcções 1', 2' e 3' definem o referencial local associado ao ponto de contacto.

$$\begin{Bmatrix} \delta_{1'} \\ \delta_{2'} \\ \delta_{3'} \end{Bmatrix} = \theta^T \mathbf{N}_{\text{sup}} \mathbf{U}_{\text{sup}} - \theta^T \mathbf{N}_{\text{inf}} \mathbf{U}_{\text{inf}} \quad (29)$$

ou, de um modo mais simples

$$\delta = \mathbf{B} \mathbf{U}^e \quad (30)$$

onde

$$\mathbf{B} = \theta^T [\mathbf{N}_{\text{sup}}, -\mathbf{N}_{\text{inf}}] \quad (31)$$

e

$$\mathbf{U}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{\text{sup}} \\ \mathbf{U}_{\text{inf}} \end{Bmatrix} \quad (32)$$

As tensões resultantes dos deslocamentos relativos definidos em (28) são dadas por

$$\begin{aligned} \tau_{1'3'} &= d_{1'} \delta_{1'} \\ \tau_{2'3'} &= d_{2'} \delta_{2'} \\ \sigma_{3'3'} &= d_{3'} \delta_{3'} \end{aligned} \quad (33)$$

ou, em notação matricial

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\delta} \quad (34)$$

sendo

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{1'} & 0 & 0 \\ 0 & d_{2'} & 0 \\ 0 & 0 & d_{3'} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Note-se que os valores de $d_{i'}$ representam a penalidade introduzida no problema pelo utilizador. A relação entre $d_{i'}$ e o parâmetro de penalidade ε pode obter-se das equações (38), (39) e (13). Devido à natureza das matrizes \mathbf{B} e \mathbf{C} envolvidas (ver equações (31) e (8)), conclui-se que o valor de ε é, aproximadamente, uma ordem de grandeza inferior a $d_{i'}$.

A matriz de rigidez (\mathbf{K}_p) é obtida recorrendo, mais uma vez, ao processo de minimização da energia potencial total. Recordando a equação (1), podemos escrever o seguinte funcional

$$\pi(\mathbf{U}^e) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{A}} \delta^T \boldsymbol{\sigma} dA - \mathbf{U}^{eT} \mathbf{F}_p \quad (36)$$

Minimizando temos

$$\delta\pi(\mathbf{U}^e) = \delta\mathbf{U}^{eT} \left(\int_{\mathbf{A}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dA \right) \mathbf{U}^e - \delta\mathbf{U}^{eT} \mathbf{F}_p = 0 \quad (37)$$

ou

$$\mathbf{F}_p = \left(\int_{\mathbf{A}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dA \right) \mathbf{U}^e \quad (38)$$

ou

$$\mathbf{F}_p = \mathbf{K}_p \mathbf{U}^e \quad (39)$$

Implementação do critério de propagação

O critério adoptado para os testes iniciais foi o critério quadrático de delaminação baseado no critério de Hill¹¹, que considera como principais responsáveis pela propagação da delaminação as tensões normais ($\sigma_{3'3'}$) e as tensões de corte existentes na interface ($\tau_{1'3'}$ e $\tau_{2'3'}$). Temos então para cada ponto e tendo em conta um referencial local do contacto

$$\frac{\sigma_{3'3'}^2}{\sigma_{3'3' \text{ lim}}^2} + \frac{\tau_{1'3'}^2 + \tau_{2'3'}^2}{\tau_{\text{lim}}^2} \geq 1 \quad (40)$$

sendo $\sigma_{3'3'}$ tensão normal, $\sigma_{3'3' \text{ lim}}$ tensão normal limite, $\tau_{1'3'}$, $\tau_{2'3'}$ tensões de corte e τ_{lim} tensão de corte limite.

A rotura dum determinado ponto dá-se, quando as tensões de corte e a tensão normal atingem, durante o processo incremental, valores susceptíveis de satisfazer a inequação (40). Quando tal acontece, o processo de descoesão do ponto em questão faz-se numa forma gradual, uma vez que a passagem abrupta a zero das tensões transmitidas na interface implica o aparecimento de problemas numéricos relacionados com dificuldades de convergência. Os aspectos fundamentais deste processo são:

- possibilidade de existência de quatro mudanças de estado num ponto:
 - i) descoesão em tracção, o que implica a anulação das tensões de corte e da tensão normal,
 - ii) descoesão em compressão, o que implica a anulação das tensões de corte, sendo mantida a tensão normal, que neste caso é compressiva,
 - iii) passagem de uma situação de abertura sem contacto para uma de contacto, o que implica o aparecimento da tensão normal compressiva,
 - iv) situação inversa da anterior com a consequente necessidade de anular a tensão normal compressiva;
- sempre que surja um ponto em rotura o tamanho do incremento é reduzido a um valor muito pequeno, que se mantém constante desde que exista pelo menos um ponto nessas condições;

- o tamanho muito pequeno do incremento nesta fase de abertura deve-se ao facto de se pretender que ela seja o mais instantânea possível, de modo a reflectir com maior precisão a realidade física;
- descoesão em quatro incrementos sendo a carga reduzida linearmente a zero, o que serve para amortecer o efeito nefasto, em termos numéricos, causado por uma anulação abrupta.

Saliente-se que a inserção do elemento no cálculo dum componente estrutural tridimensional modelado com o elemento de vinte e sete nós (C3D27R do ABAQUS), se faz através duma ferramenta disponibilizada pelo ABAQUS, que se denomina de *USER SUBROUTINES⁷.

Escolha da função penalidade

A escolha adequada do parâmetro de penalidade (ϵ) é um factor importante neste método. Assim, quando este parâmetro é muito grande surgem problemas numéricos na resolução do sistema de equações. Por outro lado, um valor pequeno resulta em interpenetrações, fisicamente inaceitáveis, entre os dois corpos em contacto. Com o intuito de escolher um valor optimizado recorre-se a uma análise de erro que se apresenta em seguida.

Análise do erro no método da função penalidade³

Existem duas fontes de erro que afectam a precisão dos resultados numa análise baseada no método da função penalidade. Ambas dependem fortemente do parâmetro de penalidade. O primeiro erro fornece-nos o limite inferior do valor de ϵ e pode ser encontrado da forma que a seguir se descreve:

- 1) Invertendo a equação (11), recorrendo à fórmula de Sherman e Morrison¹², obtém-se uma relação entre a solução aproximada \mathbf{U} e o parâmetro ϵ

$$\mathbf{U} = [\mathbf{K}^{-1} - \epsilon \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{I} + \mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1} \epsilon \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1}] \mathbf{F} \quad (41)$$

- 2) Fazendo $\epsilon \rightarrow \infty$ e calculando o respectivo limite determina-se a solução exacta.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \mathbf{U} = \mathbf{U}_e = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} [\mathbf{K}^{-1} - \epsilon \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{I} + \mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1} \epsilon \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1}] \mathbf{F} \quad (42)$$

$$\mathbf{U}_e = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} - \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \left[\mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} \left(\frac{1}{\epsilon} \mathbf{I} + \mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} \right)^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1} \right] \mathbf{F} \quad (43)$$

$$\mathbf{U}_e = [\mathbf{K}^{-1} - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1}] \mathbf{F} \quad (44)$$

- 3) Cálculo de erro

$$\mathbf{U} - \mathbf{U}_e = [\mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1} - \epsilon \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{I} + \mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1} \epsilon \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1}] \mathbf{F} \quad (45)$$

$$\mathbf{U} - \mathbf{U}_e = \left[\mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C})^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1} \varepsilon \mathbf{C}) \mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1} - \varepsilon \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1} \right] (\mathbf{I} + \mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1} \varepsilon \mathbf{C})^{-1} \mathbf{F} \quad (46)$$

Simplificando temos

$$\mathbf{U} - \mathbf{U}_e = \left[\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{I} + \mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} \right)^{-1} \right] \mathbf{F} \quad (47)$$

Desprezando o termo $\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{I}$ obtemos

$$\mathbf{U} - \mathbf{U}_e \approx \left[\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C})^{-2} \mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1} \right] \mathbf{F} \quad (48)$$

4) Norma do erro

$$\|\mathbf{U} - \mathbf{U}_e\| \approx \frac{1}{\varepsilon} \left\| \left[\mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C})^{-2} \mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1} \right] \mathbf{F} \right\| \quad (49)$$

$$\|\mathbf{U} - \mathbf{U}_e\| \leq \frac{\|(\mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C})^{-1}\|}{\varepsilon} \left\| \left[\mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1} \right] \mathbf{F} \right\| \quad (50)$$

5) Erro relativo

O termo entre parêntesis recto na expressão anterior representa a contribuição das forças de contacto na expressão (41). Assume-se como sendo igual a $c\|\mathbf{U}_e\|$, sendo c uma constante que, na maioria dos casos (para valores finitos de ε), se aproxima de 1. Temos então

$$\frac{\|\mathbf{U} - \mathbf{U}_e\|}{\|\mathbf{U}_e\|} \leq c \frac{\|(\mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C})^{-1}\|}{\varepsilon} \quad (51)$$

A segunda fonte de erro dá-nos o limite superior de ε e é devida à perda de informação que se verifica sempre que uma grande quantidade é adicionada a uma pequena, num computador. Considere-se, por exemplo, uma máquina com uma precisão de 8 dígitos ($e_c = 10^{-8}$). Neste caso um coeficiente da matriz de rigidez $k = 1/3$ é representado por 0,33333333. Se adicionarmos um $\varepsilon = 10^3$ o resultado vem 0.10003333×10^3 , sendo perdidos metade dos dígitos de k . Assim, o erro relativo devido a esta situação é

$$\frac{\|\mathbf{U} - \mathbf{U}_e\|}{\|\mathbf{U}_e\|} \leq ne_c \frac{\varepsilon}{k_{\min}} \quad (52)$$

sendo n número de variáveis do problema global afectadas pelas restrições, e_c número mínimo que no computador satisfaz a inequação $1 + e_c > 1$ (no VAX 4200 é 10^{-16} em dupla precisão), k_{\min} menor termo da matriz de rigidez dos elementos em contacto e que vai ser modificado por ε .

Adicionando as contribuições de (51) e (52) obtém-se

$$\rho = ne_c \frac{\varepsilon}{k_{\min}} + \frac{c \|(\mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C})^{-1}\|}{\varepsilon} \quad (53)$$

onde ρ é um majorante do erro relativo para a solução \mathbf{U} e representa a precisão que pode ser obtida para um dado ε . Minimizando ρ temos

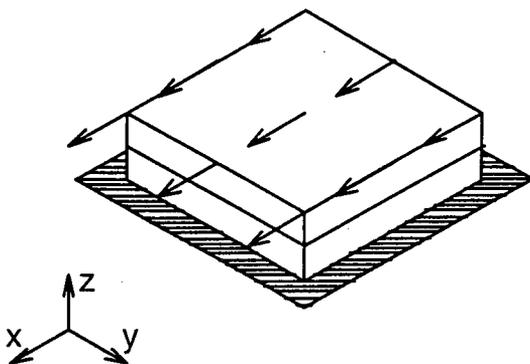
$$\varepsilon_{op} = \sqrt{\frac{ck_{\min} \|(\mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C})^{-1}\|}{ne_c}} \quad (54)$$

onde $\|\mathbf{C}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C}\|$ é uma medida da flexibilidade dos corpos na superfície de contacto e pode ser aproximada a $1/k_{\min}$. Assumindo $c = 1$ temos finalmente

$$\varepsilon_{op} \approx \frac{k_{\min}}{\sqrt{ne_c}} \quad (55)$$

Exemplo de aplicação

No exemplo que se segue pretende-se mostrar a variação da tensão $\sigma_{3'}$ e do deslocamento relativo $\delta_{3'}$ de um par de pontos em contacto em função do valor da penalidade escolhida. Saliente-se que, no nosso caso, a penalidade intervém via matriz \mathbf{D} (ver expressão 35), o que significa que o valor obtido para ε através da equação (55) corresponderá, grosso modo, a um $d_{3'}$ superior numa ordem grandeza.



Dimensões (m) = $0,02 \times 0,02 \times 0,02$
 $E(\text{Pa}) = 2,1 \times 10^{11}$
 $\nu = 0,3$
 Força aplicada (N) = 9×3000

Figura 3. Solicitação aplicada

Penalidade	$\tau_{1'3'}$	$\sigma_{3'}$	$\delta_{3'}$
$d_{i'}$ - (N/m ³)	(Pa)	(Pa)	(m)
10 ¹⁴	0,53E+08	-0,16E+09	-0,161E-05
10 ¹⁵	0,51E+08	-0,16E+09	-0,162E-06
10 ¹⁶	0,5E+08	-0,16E+09	-0,162E-07
10 ¹⁹	0,5E+08	-0,16E+09	-0,162E-10
10 ²²	0,5E+08	-0,16E+09	-0,162E-13
10 ²⁴	0,5E+08	-0,16E+09	-0,162E-15
10 ²⁵	0,5E+08	-0,16E+09	-0,162E-16
10 ²⁶	0,5E+08	-0,16E+09	-0,162E-17
10 ²⁷	0,5E+08	-0,16E+09	-0,162E-18

Tabela II. Valores de tensões e deslocamento relativo no ponto de Gauss N° 6 do elemento de interface, situado nas proximidades do nó 4 (Figura 2)

Várias conclusões se podem tirar da observação da Tabela II.

- 1) O deslocamento relativo decresce com o aumento do valor da penalidade, verificando-se que para valores baixos desta, a interpenetração ($\delta_{3'}$) apresenta valores assinaláveis.
- 2) Existe uma banda de valores da penalidade (10¹⁶ a 10²⁷ N/m³) que não altera os resultados ao nível das tensões.
- 3) O limiar superior da penalidade é neste caso 10²⁷ N/m³ que corresponde ao valor que fornece resultados correctos com um mínimo de interpenetração.
- 4) Os valores iguais ou superiores a 10²⁵ N/m³ correspondem a situações onde, apesar dos bons resultados, se evidenciaram alguns problemas numéricos relacionados com dificuldades de convergência.
- 5) O valor de ε_{op} obtido pela equação (55) é de $7,1 \times 10^{21}$ N/m³. Isto implica um valor de $d_{i'}$ da ordem de 1×10^{23} N/m³, o que corresponde a um valor próximo do máximo admissível (sem problemas numéricos), que é de 1×10^{24} N/m³. Daqui se conclui que o método atrás descrito é um excelente indicador na escolha dum valor adequado para a penalidade.

TESTES

Com o intuito de testar os resultados obtidos com este elemento foram analisados alguns exemplos simples, onde para além de um verificação tensorial se procedeu também à avaliação do bom funcionamento do critério de propagação. Refira-se que os valores usados para a função penalidade foram escolhidos tendo em conta o método

referido anteriormente e que os deslocamentos apresentados nas figuras correspondentes às deformadas, se encontram multiplicados por um factor de ampliação (FA), o que permite uma melhor visualização.

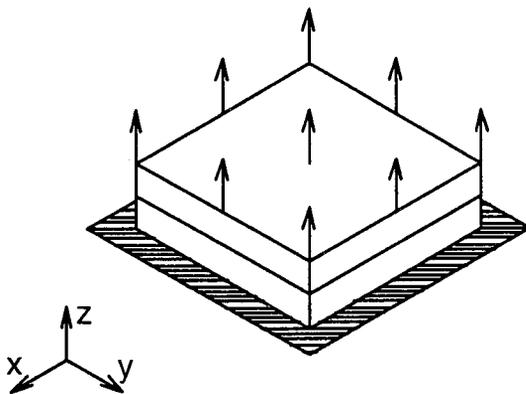
Análise tensorial

Com o objectivo de mostrar que o elemento transmite as tensões de um modo correcto, foram estudados três casos simples.

Prisma paralelepipedico

Neste exemplo consideram-se dois elementos tridimensionais separados por um elemento de interface (elemento 1). A face inferior do elemento tridimensional inferior (elemento 2) está encastrada e a face superior do elemento tridimensional superior (elemento 3) é solicitada em tracção na direcção z , caso 1, e em corte nas direcções x e y , caso 2 (ver Figuras 4 e 5 e Tabelas III, IV e V).

Caso 1: Solicitação de tracção (aplicação dum deslocamento)



Dimensões (m) = $0,2 \times 0,2 \times 0,01$
 $E(\text{Pa}) = 2,1 \times 10^{11}$
 $\nu = 0,3$
 Desl. aplicado (m) = $1,25 \times 10^{-5}$

Figura 4. Representação esquemática da solicitação de tracção

Constata-se que o elemento de interface (elemento 1) apresenta em todos os seus pontos tensões semelhantes às existentes no seio dos elementos tridimensionais (elementos 2 e 3). O valor da penalidade usada foi $d_{ij} = 1 \times 10^{25} \text{ N/m}^3$.

PONTO DE GAUSS	$\sigma_{3'3'}$	PONTO DE GAUSS	$\sigma_{3'3'}$	
	EL. 1		EL. 2	EL. 3
1	$3,5 \times 10^8$	1	$3,5 \times 10^8$	$3,5 \times 10^8$
2	$3,5 \times 10^8$	2	$3,5 \times 10^8$	$3,5 \times 10^8$
3	$3,5 \times 10^8$	3	$3,5 \times 10^8$	$3,5 \times 10^8$
4	$3,5 \times 10^8$	4	$3,5 \times 10^8$	$3,5 \times 10^8$
5	$3,5 \times 10^8$	5	$3,5 \times 10^8$	$3,5 \times 10^8$
6	$3,5 \times 10^8$	6	$3,5 \times 10^8$	$3,5 \times 10^8$
7	$3,5 \times 10^8$	7	$3,5 \times 10^8$	$3,5 \times 10^8$
8	$3,5 \times 10^8$	8	$3,5 \times 10^8$	$3,5 \times 10^8$
9	$3,5 \times 10^8$	9	$3,5 \times 10^8$	$3,5 \times 10^8$
		10	$3,5 \times 10^8$	$3,5 \times 10^8$
		11	$3,5 \times 10^8$	$3,5 \times 10^8$
		12	$3,5 \times 10^8$	$3,5 \times 10^8$
		13	$3,5 \times 10^8$	$3,5 \times 10^8$
		14	$3,5 \times 10^8$	$3,5 \times 10^8$

Tabela III. Tensões $\sigma_{3'3'}$ (Pa) nos três elementos

Caso 2: Solicitações de corte (aplicação dum deslocamento)

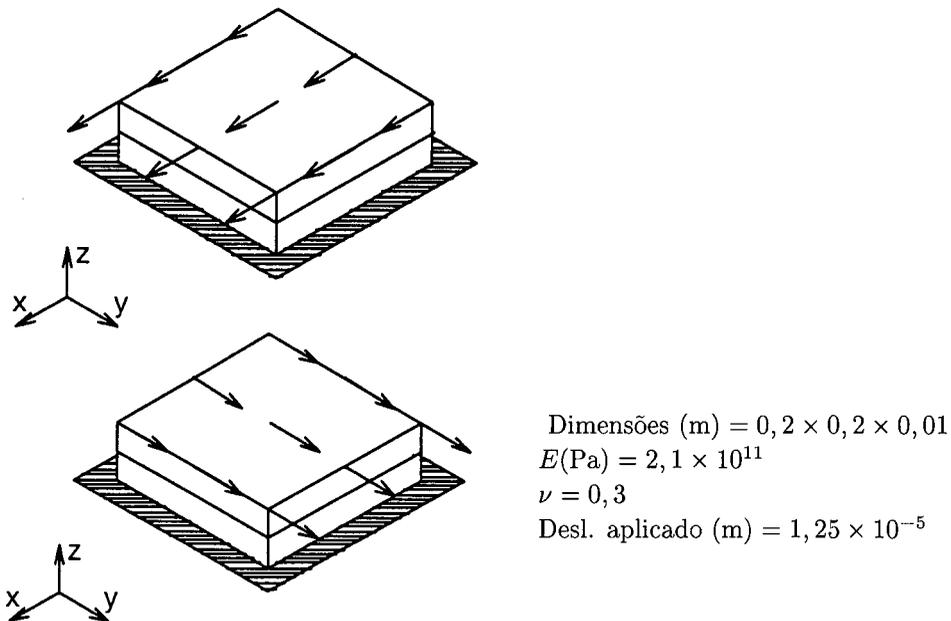


Figura 5. Representação esquemática das solicitações de corte

Verifica-se que as tensões de corte se mantêm constantes para os três elementos em qualquer das solicitações. A penalidade utilizada foi de $d_{ij} = 1 \times 10^{25} \text{ N/m}^3$.

PONTO DE GAUSS	$\tau_{1'3'}$		PONTO DE GAUSS	$\tau_{1'3'}$	
	EL. 1			EL. 2	EL. 3
1	$1,01 \times 10^8$		1	$1,01 \times 10^8$	$1,01 \times 10^8$
2	$1,01 \times 10^8$		2	$1,01 \times 10^8$	$1,01 \times 10^8$
3	$1,01 \times 10^8$		3	$1,01 \times 10^8$	$1,01 \times 10^8$
4	$1,01 \times 10^8$		4	$1,01 \times 10^8$	$1,01 \times 10^8$
5	$1,01 \times 10^8$		5	$1,01 \times 10^8$	$1,01 \times 10^8$
6	$1,01 \times 10^8$		6	$1,01 \times 10^8$	$1,01 \times 10^8$
7	$1,01 \times 10^8$		7	$1,01 \times 10^8$	$1,01 \times 10^8$
8	$1,01 \times 10^8$		8	$1,01 \times 10^8$	$1,01 \times 10^8$
9	$1,01 \times 10^8$		9	$1,01 \times 10^8$	$1,01 \times 10^8$
			10	$1,01 \times 10^8$	$1,01 \times 10^8$
			11	$1,01 \times 10^8$	$1,01 \times 10^8$
			12	$1,01 \times 10^8$	$1,01 \times 10^8$
			13	$1,01 \times 10^8$	$1,01 \times 10^8$
			14	$1,01 \times 10^8$	$1,01 \times 10^8$

Tabela IV. Tensões $\tau_{1'3'}$ (Pa) nos três elementos

PONTO DE GAUSS	$\tau_{2'3'}$		PONTO DE GAUSS	$\tau_{2'3'}$	
	EL. 1			EL. 2	EL. 3
1	$1,01 \times 10^8$		1	$1,01 \times 10^8$	$1,01 \times 10^8$
2	$1,01 \times 10^8$		2	$1,01 \times 10^8$	$1,01 \times 10^8$
3	$1,01 \times 10^8$		3	$1,01 \times 10^8$	$1,01 \times 10^8$
4	$1,01 \times 10^8$		4	$1,01 \times 10^8$	$1,01 \times 10^8$
5	$1,01 \times 10^8$		5	$1,01 \times 10^8$	$1,01 \times 10^8$
6	$1,01 \times 10^8$		6	$1,01 \times 10^8$	$1,01 \times 10^8$
7	$1,01 \times 10^8$		7	$1,01 \times 10^8$	$1,01 \times 10^8$
8	$1,01 \times 10^8$		8	$1,01 \times 10^8$	$1,01 \times 10^8$
9	$1,01 \times 10^8$		9	$1,01 \times 10^8$	$1,01 \times 10^8$
			10	$1,01 \times 10^8$	$1,01 \times 10^8$
			11	$1,01 \times 10^8$	$1,01 \times 10^8$
			12	$1,01 \times 10^8$	$1,01 \times 10^8$
			13	$1,01 \times 10^8$	$1,01 \times 10^8$
			14	$1,01 \times 10^8$	$1,01 \times 10^8$

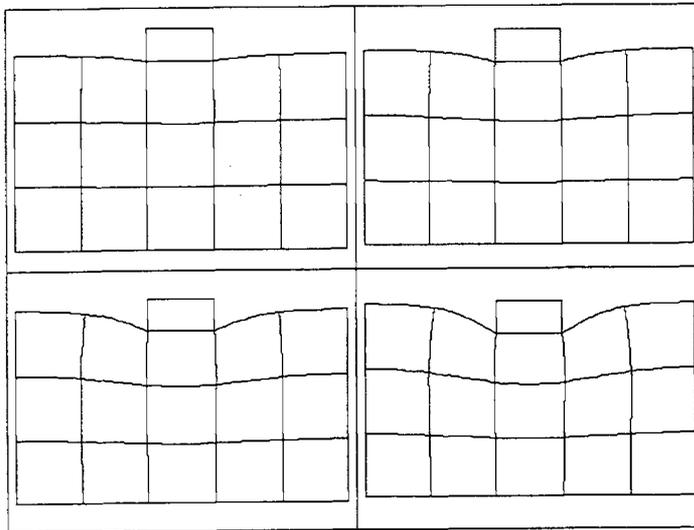
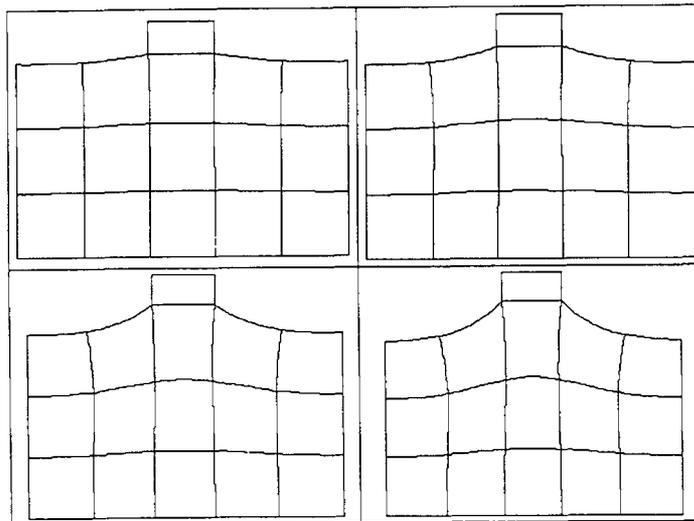
Tabela V. Tensões $\tau_{2'3'}$ (Pa) nos três elementos

Punção em fundação elástica

Este exemplo evidencia duma forma clara a transmissão de tensões normais, quer à tracção quer à compressão. A Figura 6 mostra a deformação progressiva da fundação elástica quando solicitada por um punção com um módulo de elasticidade muito superior (Tabela VI). Na Figura 7 admite-se a existência duma colagem entre os dois corpos com o intuito de mostrar a transmissão de tensões de tracção. A penalidade utilizada em ambos os casos foi de $d_{ij} = 1 \times 10^{17} \text{ N/m}^3$.

	Punção	Fundação elástica
Dimensões (m)	$0,1 \times 0,05 \times 0,1$	$0,5 \times 0,3 \times 0,1$
E (Pa)	1×10^{13}	1×10^6
ν	0,3	0,3

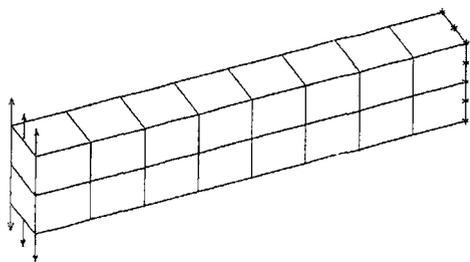
Tabela VI. Características gerais do problema

Figura 6. Quatro estágios da solicitação de compressão correspondentes a 25 %, 50 %, 75 % e 100 % do deslocamento imposto ao punção ($2,5 \times 10^{-4}$ m). $FA = 30$ Figura 7. Quatro estágios da solicitação de tracção correspondentes a 25 %, 50 %, 75 % e 100 % do deslocamento imposto ao punção ($2,5 \times 10^{-4}$ m). $FA = 30$

Avaliação do critério de propagação

Para mostrar o bom comportamento em propagação do critério implementado, foram analisados dois casos correspondentes a uma viga encastrada submetida a dois tipos de solicitações diferentes. A introdução de valores das tensões limite ($\sigma_{33'} \text{ lim} = 2,0 \times 10^6 \text{ Pa}$ e $\tau_{\text{lim}} = 4,0 \times 10^6 \text{ Pa}$) permitem uma rotura progressiva na junção entre as duas camadas de elementos tridimensionais unidas por elementos de interface.

Caso 1



Dimensões (m) = $0,2 \times 0,025 \times 0,04$
 $E(\text{Pa}) = 2,1 \times 10^{11}$
 $\nu = 0,3$
 Força aplicada (N) = 6×1000

Figura 8. Representação esquemática da solicitação imposta

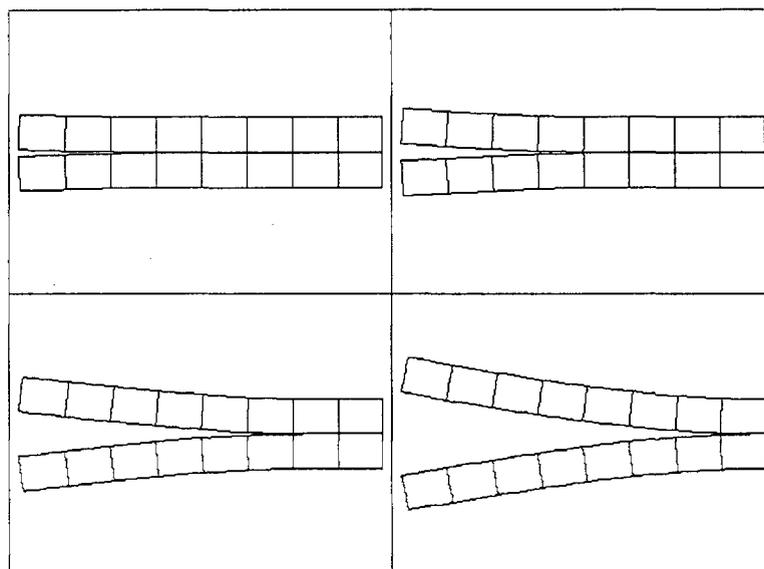
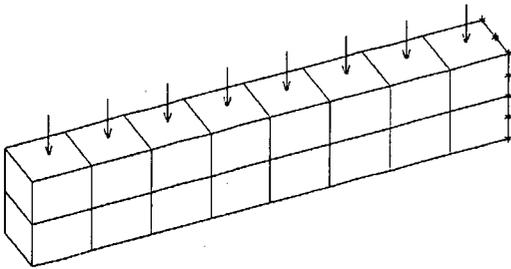


Figura 9. Fases de propagação do dano até à separação final em duas vigas (rotura por tracção). $FA = 30$

Caso 2

Dimensões (m) = $0,2 \times 0,025 \times 0,04$

$E(\text{Pa}) = 2,1 \times 10^{11}$

$\nu = 0,3$

Tensão aplicada (Pa) = $1,0 \times 10^6$

Figura 10. Representação esquemática da solicitação imposta

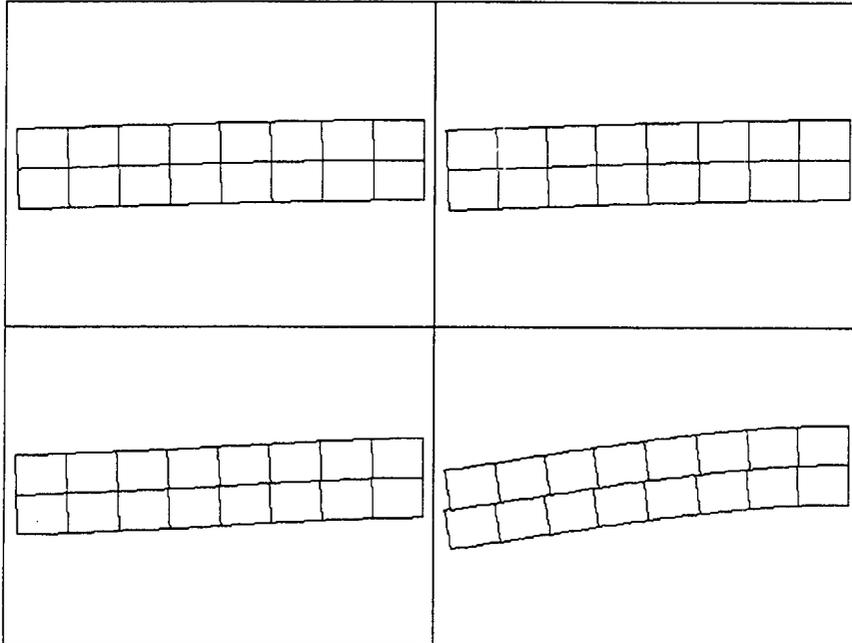


Figura 11. Fases de propagação do dano até à separação final em duas vigas (rotura por corte). $FA = 30$

CONCLUSÕES

Com a evolução dos meios informáticos à disposição dos investigadores, as ferramentas numéricas têm-se tornado cada vez mais sofisticadas. A análise de problemas do tipo "propagação de defeitos em zonas de descontinuidade" tem evoluído no sentido da utilização de elementos tridimensionais. A associação deste tipo de elementos aos elementos de interface, que pretendem modelizar com rigor o comportamento mecânico destas zonas de importância vital no colapso duma estrutura, traz novas perspectivas ao estudo destes problemas. Esta abordagem permite não só estudar a iniciação, mas também a propagação de defeitos preexistentes. Neste último caso, realce-se o interesse associado à determinação da resistência residual duma estrutura na presença de um defeito conhecido.

Os exemplos apresentados evidenciam o bom comportamento deste elemento de interface perante os objectivos atrás referidos. Saliente-se no entanto, que existem grandes perspectivas de evolução deste elemento de interface. A sua reformulação com o objetivo de impôr uma restrição ponto-superfície em vez de uma restrição ponto-ponto (ver expressão (4)), permitirá analisar com maior precisão estruturas sujeitas a grandes deformações. Por outro lado, a possibilidade de utilização de outros critérios permite diferentes aplicações, nomeadamente a consideração de comportamento elasto-plástico da interface.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica (JNICT) o suporte financeiro concedido.

REFERÊNCIAS

1. A. Francavilla e O.C. Zienkiewicz, "A Note on Numerical Computation of Elastic Contact Problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 9, pp. 913-924, (1975).
2. J.R. Hughes, R.L. Taylor, J.L. Sackman, A. Curnier e W. Kanoknukulchai, "A Finite Element Method for a Class of Contact-Impact Problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 8, pp. 249-276, (1976).
3. P. Wriggers e B. Nour-Omid, "Solution Methods for Contact Problems", Report N° UCB/SESM-84/09, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, (1984).
4. G. Beer, "An Isoparametric Joint/Interface Element for Finite Element Analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, pp. 585-600, (1985).
5. P. Papadopoulos e R.L. Taylor, "A Mixed Formulation for the Finite Element Solution of Contact Problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 94, pp. 373-389, North-Holland, (1992).

6. J.C.J. Schellekens e R. De Borst, "On the Numerical Integration of Interface Elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **36**, pp. 43–66, (1993).
7. ABAQUS, "User's Manual -version 5.3.", Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., (1993).
8. B. Nour-Omid e P. Wriggers, "A Two-level Iteration Method for Solution of Contact Problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **54**, pp. 131–144, North-Holland, (1986).
9. D.N. Buragohain e V.L. Shah, "Curved Isoparametric Interface Surface Element", *Journal of the Structural Division*, Vol. **104**, ST1, pp. 205–209, January (1978).
10. E. Oñate, "Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos", Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, (1992).
11. P.A. Lagace e N.V. Bhat, "On the Prediction of Delamination Initiation", *Advanced Composites '93, International Conference on Advanced Composite Materials*, T. Chandra e A.K. Dhingra (eds.), The Minerals Metal & Materials Society, (1993).
12. G. Strang, "Introduction to Applied Mathematics", Wellesley-Cambridge Press, Cambridge, (1986).