

MODELO PROBABILÍSTICO DE OPTIMIZAÇÃO DE MATERIAIS COMPÓSITOS EM CONDIÇÕES DE SERVIÇO

C.A. CONCEIÇÃO ANTÓNIO,
A. TORRES MARQUES
e
J.F. GONÇALVES

DEMEGI
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Rua dos Bragas
4099 Porto Codex, Portugal

SUMÁRIO

Apresenta-se um modelo probabilístico visando o projecto óptimo de materiais compósitos baseado na análise de fiabilidade e na optimização de estruturas de acordo com as condições de serviço. Os estados limite de serviço podem ser atingidos como resultado de tensões e deslocamentos excessivos ou danos localizados. A segurança estrutural de acordo com os estados limite de serviço é definida por meio de um modelo flexível de cálculo baseado na análise da fiabilidade estrutural de Nível 2. Usando aproximações de segunda ordem e técnicas iterativas associadas ao método de Lind-Hasofer calcula-se o índice de fiabilidade do sistema e a respectiva sensibilidade no *failure point*.

Para integrar os princípios da teoria da fiabilidade estrutural na optimização de estruturas em materiais compósitos, desenvolve-se um método multinível tendo como objectivo o projecto óptimo de placas e cascas em compósitos laminados. Propõem-se uma estratégia de optimização em dois níveis tendo como objectivos a minimização do peso da estrutura e a maximização da eficiência estrutural e impondo restrições de tensão e deslocamento definidas em termos de fiabilidade. As variáveis de projecto são as espessuras dos laminados e as orientações das camadas. O método proposto é testado e os resultados analisados.

SUMMARY

The probabilistic optimal design of composite materials under service conditions based on reliability analysis and structural optimization theories is discussed. Service limit states can be reached as a result of excessive stresses, excessive deflections or local damages. A suitable calculation model based on Level 2 reliability analysis defines the structural safety under service limit states. Using second order approximation and the Lind-Hasofer iterative techniques the reliability system index and the respective sensitivity are evaluated at the failure point.

Recibido: Mayo 1995

To apply the reliability theory principles to composite materials optimization a multilevel method aiming at the optimal design of shells and plates made of laminated composites is developed. A bilevel optimization strategy is proposed where the structural weight minimization and efficiency maximization are the objectives with constraints on stresses and on displacements expressed in terms of reliability. The design variables considered are the laminate thicknesses and the layers angles. The proposed method was tested and the results analyzed.

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos a investigação no campo da optimização de materiais compósitos baseada na fiabilidade tem sido incrementada devido aos desvios nas propriedades físicas destes materiais. Vários investigadores¹⁻⁵ apresentaram estratégias baseadas na identificação dos modos de rotura e no estabelecimento de limites para a probabilidade de rotura afim de definir a fiabilidade estrutural. Estas estratégias baseiam-se no estado último de rotura. Todavia, a prática mostra que em estruturas fabricadas com compósitos de matriz polimérica, cujo grau de interacção dos diferentes modos é difícil de determinar, o uso do conceito da *First Ply Failure* (FPF) tem-se revelado de grande utilidade nomeadamente na análise das condições de serviço.

O conceito de *First Ply Failure*⁶ está necessariamente associado ao dano localizado porque se as tensões ou deformações aplicadas excedem o envelope correspondente à FPF, as camadas podem ser degradadas com fissuras na matriz ou na interface fibra/matriz. Por outro lado, se o envelope correspondente à FPF é excedido podemos impor condições limite aos campos de tensões ou de deformações aplicados sem que tenha ocorrido qualquer dano na estrutura. Ambas as situações estão relacionadas com as condições de serviço e um passo significativo na direcção da generalização da análise consiste em considerar o conceito de *estado limite* concebido como estado para além do qual a estrutura, ou parte dela, pode não realizar as funções ou satisfazer as condições para as quais foi projectada. Desta forma, todos os possíveis estados de comportamento de uma estrutura podem ser tomados em consideração. Este critério pode ser visto como uma generalização do conceito de falha.

Neste trabalho propõem-se um método de optimização baseado na análise probabilística da falha das estruturas fabricadas em materiais compósitos, de acordo com os estados limite de serviço que podem ser alcançados devido a deslocamentos excessivos, níveis excessivos de tensões ou danos localizados na estrutura.

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

A análise estrutural é efectuada pelo elemento de casca degenerado usando uma formulação de deslocamentos do Método dos Elementos Finitos⁷. O sistema estrutural é dividido em macroelementos. O número e a forma dos macroelementos é definida quando se elabora o modelo estrutural dependendo principalmente do grau de precisão da análise e das condições de projecto. Todos os membros de cada macroelemento têm as mesmas características, tais como a espessura e o número de camadas, e é imposta a continuidade das espessuras na fronteira entre macroelementos.

A formulação do elemento finito de casca degenerado usa o conceito de coordenada nodal de espessura⁷. Na formulação do problema de optimização, quando os macroelementos são discretizados, os pontos nodais interiores que pertencem a um macroelemento têm todos a mesma coordenada nodal de espessura que é a espessura do respectivo laminado. Os pontos nodais localizados sobre uma fronteira entre dois ou mais macroelementos têm uma coordenada nodal de espessura dada pela média das espessuras dos macroelementos adjacentes. Este facto garante a continuidade das espessuras dos laminados nas fronteiras dos macroelementos.

As variáveis de projecto são a espessura do laminado de cada macroelemento, t_k e os ângulos da camadas $\theta_{i,k}$, $i = 1, \dots, N_m$, onde N_m é número de camadas do laminado do macroelemento k . Todos os elementos que pertencem a um macroelemento têm as mesmas propriedades materiais.

Na optimização de estruturas em compósitos o peso é tomado como função objectivo de custo a ser minimizada

$$W(\mathbf{t}) = \sum_{k=1}^M \Omega_k \rho_k t_k \quad (1)$$

onde M é o número de macroelementos, Ω_k é a área do macroelemento, ρ_k é a massa específica do material do macroelemento k e t_k é a espessura do laminado do macroelemento k .

A restrição principal relaciona-se com o limite imposto à fiabilidade do sistema estrutural e exprime-se da seguinte forma

$$\beta_a - \beta_s \leq 0 \quad (2)$$

onde β_a é o índice de fiabilidade admissível para o sistema estrutural e β_s é o índice de fiabilidade do sistema estrutural. O valor de β_a é um valor considerado admissível, ainda que possa ser imposto através de vários códigos construtivos e refere-se a um estado limite de serviço.

Finalmente, a formulação de elementos finitos e a exequibilidade da solução de projecto determinam o estabelecimento de restrições à grandeza das variáveis espessuras dos laminados.

$$t^l \leq t_k \leq t^u \quad (3)$$

ANÁLISE DA FIABILIDADE

A fiabilidade do sistema estrutural β_s é definida como uma função das variáveis de projecto, que são as espessuras \mathbf{t} dos laminados e os ângulos θ das camadas, dependendo ainda, das variáveis aleatórias Π associadas ao carregamento e às propriedades físicas materiais

$$\beta_s = f(\theta, \mathbf{t}, \Pi) \quad (4)$$

As funções de estado limite de serviço, que têm uma natureza probabilística, dependem das mesmas variáveis presentes na equação (4).

A filosofia de projecto adoptada para as estruturas em compósitos laminados é baseada nos conceitos de estado limite de serviço e da *First Ply Failure*. Em laminados fabricados com matrizes poliméricas reforçadas com tecidos unidireccionais assume-se que após a *First Ply Failure* o sistema estrutural falha porque existe uma propagação incontrolada de fissuras e uma degradação irreversível das fibras e da matriz. Sob o ponto de vista do conceito de estado último de rotura não é verdade que após a FPF ocorra o colapso da estrutura. No entanto, no contexto de estado limite de serviço o início da fissuração está relacionado com o dano localizado na estrutura. Por outro lado, para um nível de carga mais baixo é possível considerar um estado limite correspondente a condições de serviço sem qualquer dano estrutural. Além disso, os deslocamentos são também limitados pelas condições de serviço.

Assim, o índice de fiabilidade do sistema estrutural é definido como

$$\beta_s = \text{MIN}(\bar{\beta}_{\text{dis}}, \bar{\beta}_{\text{str}}) \quad (5)$$

onde $\bar{\beta}_{\text{dis}}$ é o índice de fiabilidade parcial associado à função de estado limite para os deslocamentos, mais crítica

$$\bar{\varphi}_{\text{dis}} = \text{MIN}[(\log |u_0/u_i|), \quad i = 1, \dots, N_{\text{dis}}] \quad (6)$$

e $\bar{\beta}_{\text{str}}$ é o índice de fiabilidade parcial associado à função de estado limite para as tensões, mais crítica

$$\bar{\varphi}_{\text{str}} = \text{MIN}[(\log(R_k/R_0)), \quad k = 1, \dots, N_{\text{str}}] \quad (7)$$

O parâmetro u_0 é o nível máximo correspondente ao estado limite de serviço de deslocamento e R_0 é o nível mínimo de *número de Tsai*, R_k ⁶. Este *número de Tsai* é obtido para cada camada k no sistema estrutural e é uma solução da equação

$$[F_{ij}\sigma_i\sigma_j]R_k^2 + [F_i\sigma_i]R_k - 1 = 0, \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (8)$$

que é uma forma do critério de rotura interactivo de Tsai-Wu⁶ onde F_{ij} e F_i são parâmetros de resistência e σ_i representa a componente do vector das tensões aplicadas. Para $R_0 = 1$ o estado limite de serviço está relacionado com o dano localizado na estrutura e quando $R_0 > 1$ considera-se um estado limite de serviço relacionado com o nível das tensões aplicadas. Finalmente, a restrição de segurança é definida por funções de estado limite de tal forma que a probabilidade de falha não exceda um valor prescrito.

Afim de se considerar a natureza aleatória da análise as cargas e as propriedades físicas materiais são tomadas como variáveis aleatórias representadas pelo vector Π . Estas variáveis seguem uma distribuição normal. Um estudo prévio⁸ mostra que as propriedades mecânicas da camada mais importantes e com maior influência na aleatoriedade da resistência do laminado são a resistência transversal Y , a resistência ao corte S , o módulo longitudinal de Young E_1 e o módulo transversal E_2 . Assim, apenas estas quatro propriedades físicas são consideradas como variáveis aleatórias sem

correlação estatística. No contexto da estrutura, as propriedades físicas consideradas como variáveis aleatórias são

$$Y_m, S_m, E_{1,m}, E_{2,m}; \quad m = 1, \dots, M \tag{9}$$

onde M representa o número de macroelementos. Observe-se que não existe perda de generalidade nesta investigação se forem consideradas mais variáveis aleatórias na análise probabilística.

As cargas pontuais aleatórias têm a direcção dos graus de liberdade do sistema estrutural e a carga distribuída aleatória é considerada uniforme em cada elemento onde está aplicada.

Os índices de fiabilidade são calculados usando o método de Lind-Hasofer^{9,11}. Neste método, uma solução de projecto é considerada aceitável se a hipersfera de raio β_a com centro na origem do referencial, obtido após projecção de função de estado limite no espaço das variáveis básicas normalizadas u_i , situa-se inteiramente na região de segurança obtida por transformação. Através da consideração formal de uma densidade de probabilidade normal no espaço normalizado, podemos definir de forma mais selectiva e generalizada um índice de fiabilidade β_s baseado em momentos de segunda ordem. Assim, de acordo com as regras canónicas e os princípios estabelecidos pela análise probabilística, temos

$$P(F) = \Phi(-\beta_s) \tag{10}$$

onde $P(F)$ é probabilidade de falha do sistema calculada com base na referida distribuição normal, Φ é a função distribuição de probabilidade normal e β_s foi definido na equação (5) como sendo o índice de fiabilidade do sistema estrutural.

Por outro lado o índice β é a distância mínima da superfície de falha ou rotura $\bar{\varphi}$ à origem do referencial do espaço normalizado. Devido à não linearidade da função de estado limite de serviço $\bar{\varphi}$, é necessário desenvolver um processo iterativo a fim de obter a distância mínima β verificando a equação $\bar{\varphi}(\beta) = 0$ ^{9,10}. Assim, para calcular os índices de fiabilidade $\bar{\beta}_{dis}$ e $\bar{\beta}_{str}$ na equação(5) é necessário resolver o seguinte problema matemático

$$\text{Minimizar } H, \text{ com } H = [\bar{\varphi}(\bar{\pi}_1 + a_1\beta\sigma_{\pi_1}, \dots, \bar{\pi}_i + a_i\beta\sigma_{\pi_i}, \dots, \bar{\pi}_n + a_n\beta\sigma_{\pi_n})]^2 \tag{11}$$

em relação a β e sem restrições

onde a_i com $i = 1, \dots, n$ são os co-senos directores do vector orientado na direcção da região de falha ou rotura e normal à superfície de estado limite, calculados a partir da seguinte expressão^{9,10}

$$a_i = - \frac{\left(\frac{d\bar{\varphi}}{d\pi_i}\right) \sigma_{\pi_i}}{\left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{d\bar{\varphi}}{d\pi_j}\right)^2 (\sigma_{\pi_j})^2\right]^{1/2}} \tag{12}$$

e os parâmetros $\bar{\pi}_i$ e σ_{π_i} são respectivamente a média e o desvio padrão das variáveis aleatórias.

A partir do desenvolvimento em série de Taylor da função H em torno do ponto $\bar{\Pi} + \mathbf{a} \beta \sigma_{\pi}$ e usando a respectiva aproximação de segunda ordem, efectua-se uma minimização univariável obtendo-se uma fórmula recursiva explícita do índice de fiabilidade β na iteração de ordem k , para resolução do problema de minimização formulado em (11)

$$\beta^k = - \frac{\bar{\varphi}^k S_1^k + \frac{1}{2} S_2^k}{S_3^k} \quad (13)$$

com

$$\begin{aligned} S_1^k &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{d\bar{\varphi}}{d\pi_i} \right) a_i \sigma_{\pi_i} \\ S_2^k &= \sum_{i,j=1}^n \left(\bar{\varphi} \frac{d^2\bar{\varphi}}{d\pi_i d\pi_j} + \frac{d\bar{\varphi}}{d\pi_i} \frac{d\bar{\varphi}}{d\pi_j} \right) [a_i \sigma_{\pi_i} (\bar{\pi}_j - \pi_j) + a_j \sigma_{\pi_j} (\bar{\pi}_i - \pi_i)] \\ S_3^k &= \sum_{i,j=1}^n \left(\bar{\varphi} \frac{d^2\bar{\varphi}}{d\pi_i d\pi_j} + \frac{d\bar{\varphi}}{d\pi_i} \frac{d\bar{\varphi}}{d\pi_j} \right) (a_i a_j \sigma_{\pi_i} \sigma_{\pi_j}) \end{aligned} \quad (14)$$

onde n é o número de variáveis aleatórias. Esta fórmula é usada no processo de minimização para calcular os índices de fiabilidade β_{dis} e β_{str} da equação (5) no designado *failure point* (*), conforme estabelece o método de Lind-Hasofer.

As sensibilidades das funções de estado limite de serviço em ordem às variáveis aleatórias são calculadas pelo Método da Estrutura Adjunta^{12,13}. As derivadas de segunda ordem são obtidas usando o Método das Diferenças Finitas a partir das primeiras derivadas.

DECOMPOSIÇÃO DO PROBLEMA

Considerando as equações (6) e (7) verifica-se que a distância mínima β_s depende da solução de projecto tomada para os ângulos das camadas θ . Obtém-se uma solução melhor para β_s se a fronteira da região de segurança, correspondente à situação mais crítica, é deslocada através do espaço das variáveis normalizadas (observe-se Figura 1 para o caso bidimensional). Este facto corresponde a maximizar a eficiência material usando apenas os ângulos das camadas como variáveis de projecto.

Assim a estratégia adoptada consistiu na decomposição do problema em dois níveis¹⁴. No primeiro nível efectua-se a maximização da eficiência material usando apenas os ângulos das camadas como variáveis de projecto e o objectivo é obter um valor melhor para β_s . O laminado é considerado na melhor eficiência atendendo às suas características anisotrópicas. O segundo nível consiste na minimização do peso baseada na fiabilidade do sistema e considerando as espessuras dos laminados dos macroelementos como variáveis.

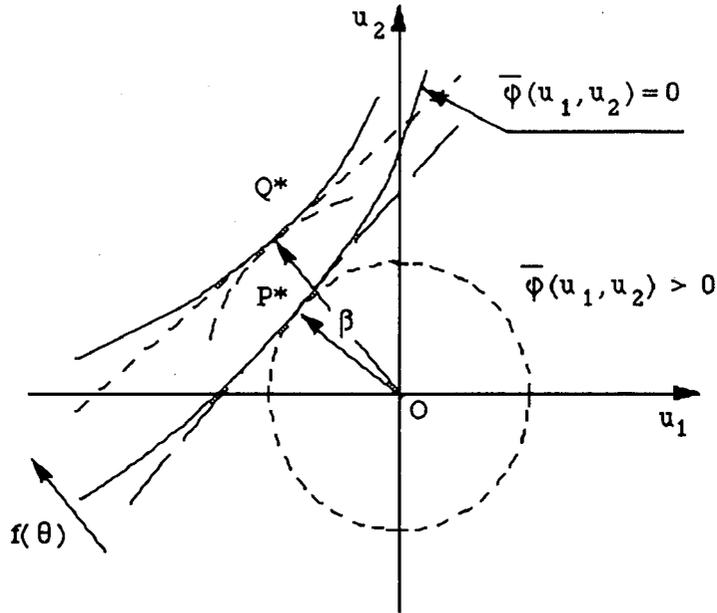


Figura 1. Índice de fiabilidade de acordo com o Método de Lind-Hasofer. Índice de fiabilidade como uma função da eficiência estrutural

O problema global de optimização formulado nas expressões (1) a (3) é decomposto nos seguintes níveis:

Primeiro Nível

A formulação do subproblema de optimização para o primeiro Nível é

$$\text{Maximizar } F(\theta, \mathbf{t}_0) = \text{Maximizar } [\text{MIN}(\bar{\varphi}_{\text{dis}}, \bar{\varphi}_{\text{str}})] \tag{15}$$

onde a maximização de $F(\theta)$ é um problema sem restrições e \mathbf{t}_0 é o vector das espessuras considerado constante durante este nível de optimização. Neste nível as alterações efectuadas nos ângulos das camadas modificam os campos de deslocamentos e de tensões e no final obtém-se uma solução melhor para o índice de fiabilidade do sistema β_s . Trata-se de uma aproximação para o problema da maximização da fiabilidade estrutural como uma função das variáveis de projecto θ que são os ângulos das camadas.

Segundo Nível

No segundo Nível a formulação pode ser estabelecida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } W(\mathbf{t}), \text{ sujeito a: } & \beta_a - \beta_s(\theta_0, \mathbf{t}) \leq 0 \\ & \text{e as restrições de grandeza } t^l \leq t_k \leq t^u \end{aligned} \tag{16}$$

onde as variáveis são apenas as espessuras dos macroelementos e os ângulos das camadas mantêm-se constantes, i.e $\theta = \theta_0$.

ALGORITMO DE OPTIMIZAÇÃO

Primeiro Nível: Maximização da eficiência estrutural

- 1) Escolha de uma solução inicial admissível ou não.
- 2) Supondo constantes as espessuras dos macroelementos, a função objectivo é maximizada modificando os ângulos das camadas e a sequência de empilhamento. Efectua-se uma maximização sem restrições.
- 3) Verificação da condição de paragem global C_1 , para $N \neq 1$.

A este nível, a técnica de optimização usada é o Método do Gradiente Conjugado na versão de Polak e Ribiere^{12,15} e a análise de sensibilidades é efectuada através do Método da Estrutura Adjunta. A função $F(\theta)$ na expressão (15) é definida como um estimador da eficiência estrutural tal como na referência [14]. A condição de paragem global C_1 é baseada no facto de que a variação absoluta da eficiência estrutural entre os valores inicial e final deste nível deverá ser inferior a um valor prescrito.

Segundo Nível: Minimização do peso da estrutura

- 4) Admita-se como solução inicial a solução final do nível anterior.
- 5) Se a solução é admissível o peso da estrutura é minimizado usando as espessuras dos macroelementos como variáveis de projecto, considerando as restrições de segurança da estrutura.
- 6) Se a solução inicial não é admissível a pesquisa da solução óptima é dirigida no sentido do incremento das espessuras dos macroelementos, afim de satisfazer as restrições de segurança impostas.
- 7) Verificação da condição de paragem global C_2 , para $N \neq 1$.
- 8) Retorno ao passo 1).

A este nível a técnica de optimização usada é baseada num Critério de Optimalidade.

O Critério de Optimalidade foi desenvolvido com base na *condição de optimalidade* de que a restrição principal em (16), torna-se activa quando o óptimo é alcançado

$$\bar{g} = \beta_a - \beta_s = 0 \quad (17)$$

Com efeito, considera-se que o valor absoluto da restrição principal é reduzido durante o processo iterativo. Este facto é traduzido pelas seguintes condições

$$\bar{g}^{k+1} = \alpha^k \bar{g}^k \quad \wedge \quad \alpha^k < 1 \quad (18)$$

onde α^k é o factor de redução que estabelece o passo necessário para reduzir em módulo o valor da restrição principal. Usando uma aproximação de primeira ordem da função \bar{g} juntamente com a *condição de optimalidade* (17) e ainda as condições em (18), obtemos

$$t_j^{k+1} = \lambda_j^k t_j^k \quad (19)$$

com

$$\lambda_j^k = 1 + \frac{\bar{g}^k}{\frac{d\bar{g}^k}{dt_j^k} t_j^k} (\alpha^k - 1) \quad j = 1, \dots, M \quad (20)$$

onde \bar{g}^k é o valor da restrição principal na iteração de ordem k , $\frac{d\bar{g}^k}{dt_j^k}$ é o gradiente da restrição principal relativamente à variável de espessura t_j e M é o número de macroelementos.

O *factor de redução* α^k é obtido por pesquisa univariável através de minimização da função quadrática $Q = [\bar{g}(\theta_0, \mathbf{t})]^2$. Desenvolvendo a função Q em série de Taylor e usando a aproximação de segunda ordem obtém-se após minimização

$$\alpha^k = 1 - \left(M + \frac{\bar{g}^k}{M} \sum_{i,j=1}^M \frac{\frac{d^2\bar{g}^k}{dt_i dt_j}}{\frac{d\bar{g}^k}{dt_i} \frac{d\bar{g}^k}{dt_j}} \right)^{-1} \quad (21)$$

onde $\frac{d^2\bar{g}^k}{dt_i dt_j}$ são as componentes da matriz hessiana calculadas pelo Método das Diferenças Finitas a partir das derivadas de primeira ordem.

O *factor de redução* α^k dado pela expressão (21) está relacionado com a *condição de optimalidade* (17). Quando a *condição de optimalidade* é satisfeita e o processo é convergente verifica-se a seguinte igualdade

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha^k = 1 - \frac{1}{M} \quad (22)$$

onde M é o número de variáveis de espessura no segundo Nível do método de optimização. Em geral a igualdade (22) é alcançada após um número finito de iterações. Este facto mostra a convergência do processo de optimização.

A condição de paragem global C_2 testada após o segundo Nível do método de optimização, é baseada no facto de que a variação absoluta entre os valores inicial e final do índice de fiabilidade do sistema estrutural para este nível, deverá ser menor que de um valor prescrito.

ANÁLISE DE SENSIBILIDADES

A sensibilidade da função restrição \bar{g} em ordem às variáveis de projecto na iteração k do segundo Nível do método de optimização é

$$\frac{d\bar{g}^k}{dt_j} = - \frac{d\beta_s^k}{dt_j} \quad (23)$$

e a sensibilidade do índice de fiabilidade do sistema estrutural é calculado no *failure point* (*) pela expressão

$$\frac{d\beta_s^k}{dt_i} = - \frac{\left(S_1^k + \frac{1}{2} S_4^k \right) S_3^k - \left(\bar{\varphi}^k * S_1^k + \frac{1}{2} S_2^k \right) S_5^k}{(S_3^k)^2} \left(\frac{d\bar{\varphi}^k}{dt_i} \right)_{\bar{\Pi}} \quad (24)$$

onde os parâmetros S_1 , S_2 e S_3 são os mesmos que foram definidos pelas equações (14) e S_4 , S_5 são calculados no *failure point* a partir das seguintes expressões

$$\begin{aligned} S_4^k &= \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{d^2 \bar{\varphi}}{d\pi_i d\pi_j} \right)_* [a_i \sigma_{\pi_i} (\bar{\pi}_j - \pi_j) + a_j \sigma_{\pi_j} (\bar{\pi}_i - \pi_i)]_* \\ S_5^k &= \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{d^2 \bar{\varphi}}{d\pi_i d\pi_j} \right)_* (a_i a_j \sigma_{\pi_i} \sigma_{\pi_j})_* \end{aligned} \quad (25)$$

A expressão (24) foi obtida por derivação da igualdade (13) desprezando o efeito das derivadas mistas de ordem superior a um envolvendo ambas as variáveis \mathbf{t} e Π . Esta aproximação é aceitável devido à fraca correlação das sensibilidades de $\bar{\varphi}$ em relação aos dois tipos de variáveis e ainda se a variação em \mathbf{t} não é muito grande.

A sensibilidade da função de estado limite de serviço em ordem às variáveis de projecto $\frac{d\bar{\varphi}}{dt_j}$ é calculada para os valores médios das variáveis aleatórias e obtida pelo Método da Estrutura Adjunta.

Neste trabalho, as sensibilidades da função de estado limite $\bar{\varphi}$ em ordem às variáveis de projecto e às variáveis aleatórias são obtidas pelo Método da Estrutura Adjunta^{12,13}. Numa breve abordagem para o caso de estruturas com comportamento linear, a formulação discreta do problema é dada pelas seguintes equações de equilíbrio estático do sistema estrutural

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (26)$$

sendo \mathbf{K} a matriz de rigidez do sistema, \mathbf{F} o vector das forças externas aplicadas, \mathbf{u} o vector das variáveis de estado do sistema cujas componentes são os deslocamentos nodais. O sistema adjunto de equações é estabelecido por

$$\mathbf{K}\phi = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \mathbf{u}} \quad (27)$$

onde ϕ é o vector de deslocamentos adjuntos do sistema estrutural e $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \mathbf{u}}$ é o vector das forças adjuntas. Designando genericamente por x_i as variáveis de projecto θ_i , t_i ou as variáveis aleatórias π_i , a sensibilidade da função de estado limite de serviço $\bar{\varphi}$ é dada pela seguinte equação

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dx_i} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i} + \phi^T \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} \right) \quad (28)$$

No presente trabalho as derivadas parciais na equação (28) são obtidas por derivação a partir da formulação do Método dos Elementos Finitos.

ALGORITMO APROXIMADO DO MÉTODO DE OPTIMIZAÇÃO

A determinação da fiabilidade dos sistema β_s é efectuada em cada iteração do 2º Nível do algoritmo de optimização, através de um processo de minimização tendente a resolver o problema formulado em (11). No entanto, após a maximização da eficiência do sistema estrutural obtida no primeiro Nível, a função $\bar{\varphi}$ pode assumir um valor absoluto elevado o que torna difícil e morosa a minimização associada ao Método de Lind-Hasofer. Para evitar este problema, propõem-se a seguinte metodologia aplicável no segundo nível do algoritmo do optimização.

1ª Fase: Em cada iteração, o índice de fiabilidade do sistema estrutural β_s e o respectivo gradiente $\nabla\beta_s$, são calculados sem recurso a qualquer processo iterativo de minimização, através das seguintes aproximações

$$\beta_s^k \approx - \left(\frac{\bar{\varphi}^k}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{d\bar{\varphi}^k}{d\pi_i} \right) a_i \sigma_{\pi_i}} \right)_{\bar{\Pi}} \quad (29)$$

$$\frac{d\beta_s^k}{dt_i} \approx + \left[\sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{d\bar{\varphi}^k}{d\pi_j} \right)_{\bar{\Pi}} \sigma_{\pi_j} \right)^2 \right]^{-1/2} \left(\frac{d\bar{\varphi}^k}{dt_i} \right)_{\bar{\Pi}} \quad (30)$$

O índice de fiabilidade do sistema em (29) é um valor aproximado, aceitável em problemas de engenharia porque não existe grande diferença quando comparado com valor obtido no *failure point* utilizando as técnicas de minimização associadas ao Método de Lind-Hasofer. Neste trabalho, o índice de fiabilidade obtido a partir da expressão (29) é considerado um valor intermédio que é posteriormente corrigido.

A expressão (30) foi obtida por derivação da igualdade (29) usando a aproximação de que a correlação entre as variáveis \mathbf{t} e $\bar{\Pi}$ é muito pequena e por isso pode ser desprezada.

2ª Fase: Após a convergência do processo de minimização do peso baseado na variação relativa da função $W(\mathbf{t})$, a *condição de optimalidade* (17) é verificada. Este processo é então reiniciado procedendo-se à actualização dos valores de β_s e $\frac{d\beta_s}{dt_i}$ através das expressões (13), (14), (23), (24) e (25) calculadas no *failure point* através do esquema de minimização associado ao Método de Lind-Hasofer, em cada iteração do algoritmo de optimização. Esta fase decorre até se verificar a convergência baseada na variação absoluta do índice de fiabilidade.

A Figura 2 mostra o diagrama de sequência do algoritmo de optimização aproximado. O parâmetro I3 representa o número máximo admissível de iterações a efectuar durante a optimização.

A Tabela II mostra a evolução do processo iterativo de optimização. O problema do projecto óptimo baseado na fiabilidade estrutural foi resolvido em duas iterações do algoritmo de optimização da Figura 2. Os resultados são apresentados na coluna (1) para a primeira iteração ($N=1$) e na coluna (2) para a segunda iteração ($N=2$). A convergência global do método de optimização proposto pode ser observada quando se comparam as soluções inicial, intermédia (1) e final (2).

A solução óptima baseada na análise da fiabilidade é comparada com a solução obtida usando conceitos determinísticos que é apresentada na coluna (3). Esta solução determinística foi obtida através do método de optimização proposto na referência [14], com $R_0 = 1$ para as restrições de tensão e $u_0 = 0.075$ m para as restrições de deslocamentos. A comparação é feita apenas no sentido qualitativo pois a solução determinística depende do coeficiente de segurança imposto.

Macro	Variável	Solução inicial	Solução intermédia	Solução final	
			(1)	(2)	(3)
1	t_1 (mm)	20.000	12.534	12.077	9.043
	θ_1	-75°	-79.1°	-89.1°	-83.6°
	θ_2	75°	73.8°	73.1°	74.1°
	θ_3	-75°	-74.2°	-69.2°	-73.8°
	θ_4	75°	75.7°	83.5°	77.5°
	θ_5	-75°	-79.8°	-92.2°	-85.2°
2	t_2 (mm)	20.000	15.774	15.447	16.488
	θ_6	25°	65.9°	70.8°	67.4°
	θ_7	-25°	-45.3°	-48.3°	-43.1°
	θ_8	25°	21.2°	61.5°	25.0°
	θ_9	-25°	-25.0°	-3.6°	-18.5°
	θ_{10}	25°	86.5°	91.5°	95.8°
PESO (Kg)		235.738	166.754	162.112	150.088
$\bar{\beta}_{dis}$		-	3.000	3.000	
$\bar{\beta}_{str}$		-	3.308	5.578	
$\bar{\varphi}_{dis}$		-0.817	0.222	0.225	
$\bar{\varphi}_{str}$		-1.089	-8.702 E-07	-2.726 E-03	

Tabela II. Resultados: 1) análise da fiabilidade, após a 1ª iteração do algoritmo de optimização (Nível 1 + Nível 2); 2) análise da fiabilidade, após a 2ª iteração do algoritmo de optimização (Nível 1 + Nível 2); 3) análise determinística ($R_0 = 1$, $u_0 = 0.075$ m)

Usando o método de optimização proposto neste trabalho a economia no peso da estrutura ronda os 31 %, com ambos os valores das funções de estado limite de serviço $\bar{\varphi}_{dis}$ e $\bar{\varphi}_{str}$ a situarem-se dentro da região de falha ou de rotura no início do processo iterativo, conforme se mostra na Tabela II. Observe-se que por redistribuição

dos ângulos das camadas não só as funções de estado limite ficam do lado da segurança, como se consegue uma efectiva economia do peso.

Na Figura 4 representa-se o comportamento do estimador da eficiência do sistema, $F(\theta)$ durante o primeiro Nível da primeira iteração do algoritmo de optimização e mostra-se a convergência local neste nível.

Na Figura 4 constata-se também que o valor final da função $F(\theta)$ é relativamente elevado. Assim, no segundo Nível achou-se conveniente usar o esquema aproximado do método de optimização proposto. A evolução do respectivo processo iterativo é mostrada na Figura 5.

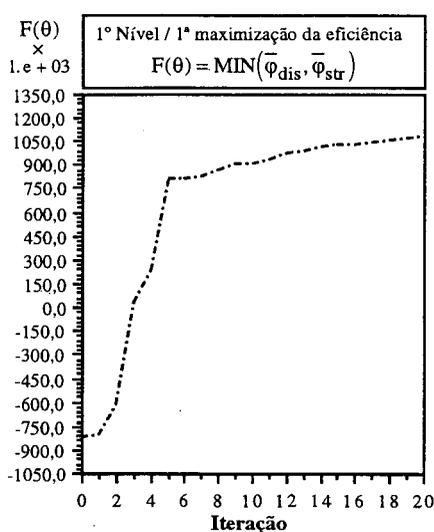


Figura 4. Evolução do estimador da eficiência do sistema $F(\theta)$, 1º Nível, 1ª iteração ($N = 1$) do algoritmo de optimização

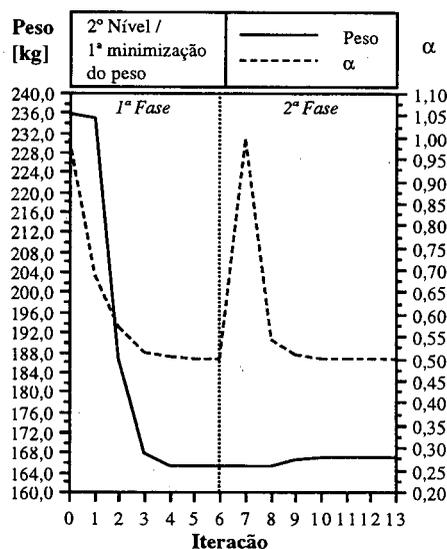


Figura 5. Evolução da função objectivo $W(t)$ e do factor de redução α , 2º Nível, 1ª iteração ($N = 1$) do algoritmo de optimização

A convergência local no segundo Nível da primeira iteração do algoritmo de optimização pode ser observada a partir dos comportamentos da função objectivo $W(t)$ e do factor de redução α . O factor de redução α , dado pela expressão (21), está relacionado com a condição de optimalidade (17). Observe-se pela Figura 5, que o valor limite de α dado pela expressão (22) é alcançado no fim do segundo Nível, o que demonstra a convergência do processo.

As Figuras 6 e 7 mostram o comportamento das funções de estado limite de serviço $\bar{\varphi}_{\text{dis}}$ e $\bar{\varphi}_{\text{str}}$ bem como dos índices de fiabilidade associados $\bar{\beta}_{\text{dis}}$ e $\bar{\beta}_{\text{str}}$, durante o segundo Nível na primeira iteração ($N = 1$) do algoritmo aproximado de optimização. São de assinalar a estabilidade numérica e a velocidade de convergência do processo.

A obtenção dos índices de fiabilidade $\bar{\beta}_{\text{dis}}$ e $\bar{\beta}_{\text{str}}$, em particular a resolução do problema de minimização (11) associado ao método de Lind-Hasofer, é um aspecto relevante com grande influência na robustez do método de optimização proposto. As Figuras 8 e 9 descrevem a resolução do problema (11) na sétima iteração do 2º Nível

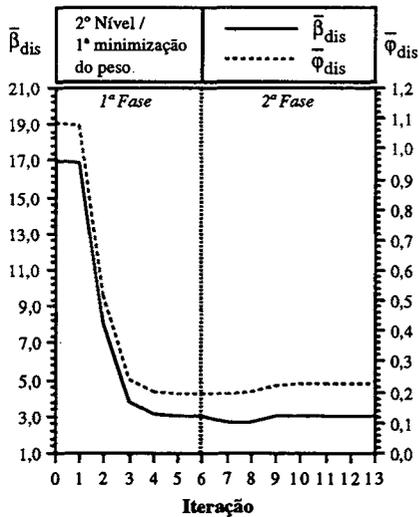


Figura 6. Evolução do índice de fiabilidade $\bar{\beta}_{dis}$ e da função de estado limite $\bar{\varphi}_{dis}$, 2º Nível da 1ª iteração do algoritmo de optimização ($N = 1$)

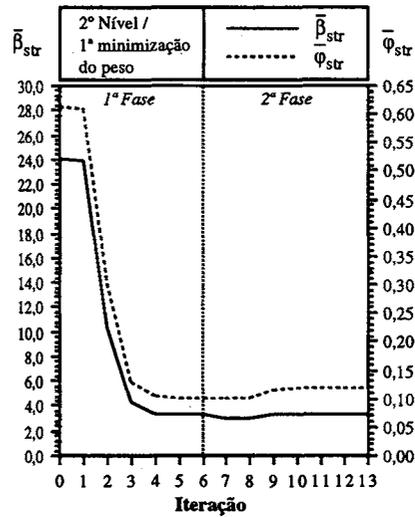


Figura 7. Evolução do índice de fiabilidade $\bar{\beta}_{str}$ e da função de estado limite $\bar{\varphi}_{str}$, 2º Nível da 1ª iteração do algoritmo de optimização ($N - 1$)

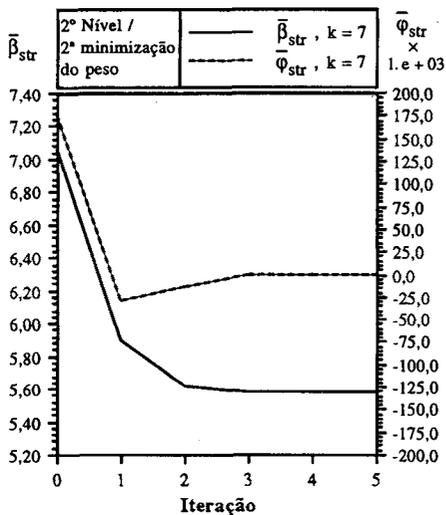


Figura 8. Resolução do problema na equação (11) para as tensões, 7ª iteração ($k = 7$) do 2º Nível, 2ª iteração ($N = 2$) do algoritmo de optimização

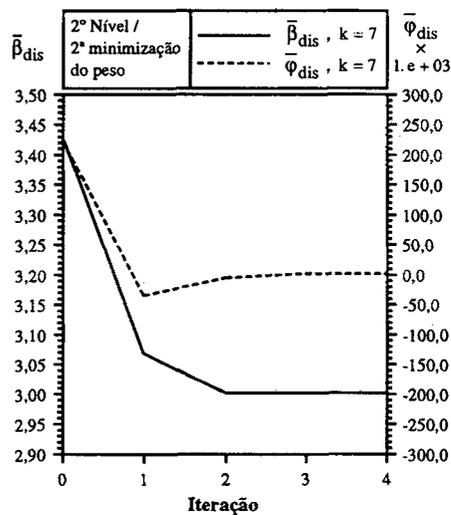


Figura 9. Resolução do problema na equação (11) para os deslocamentos, 7ª iteração ($k = 7$) do 2º Nível, 2ª iteração ($N = 2$) do algoritmo de optimização

durante a segunda iteração ($N = 2$) do algoritmo optimização e o facto mais saliente é o número reduzido de iterações do processo.

Exemplo 2: cobertura do motor de automóvel (automobile engine hood)

A subestruturação considerada neste exemplo é apresentada na Figura 10 e baseia-se na solução óptima proposta por Kikuchi *et al.* [16] para esta estrutura. A solução proposta por Kikuchi foi obtida por otimização de forma e considera a distribuição em forma *X* dos elementos de reforço da estrutura. Esta solução de projecto é basicamente a mesma que é usada actualmente na cobertura do motor dos automóveis.

Na Figura 10 define-se metade da estrutura como domínio da solução de projecto tendo em conta as simetrias material e geométrica. Esta metade da estrutura é discretizada em 160 elementos finitos agrupados em oito macroelementos fabricados de laminados com cinco camadas cada. As camadas unidireccionais são constituídas pelo sistema compósito Vidro E/Resina de Epóxico conhecido por Scotchply 1002 cujas propriedades mecânicas são apresentadas na Tabela III⁶. A massa específica é $\rho = 1\,800\text{ kg/m}^3$.

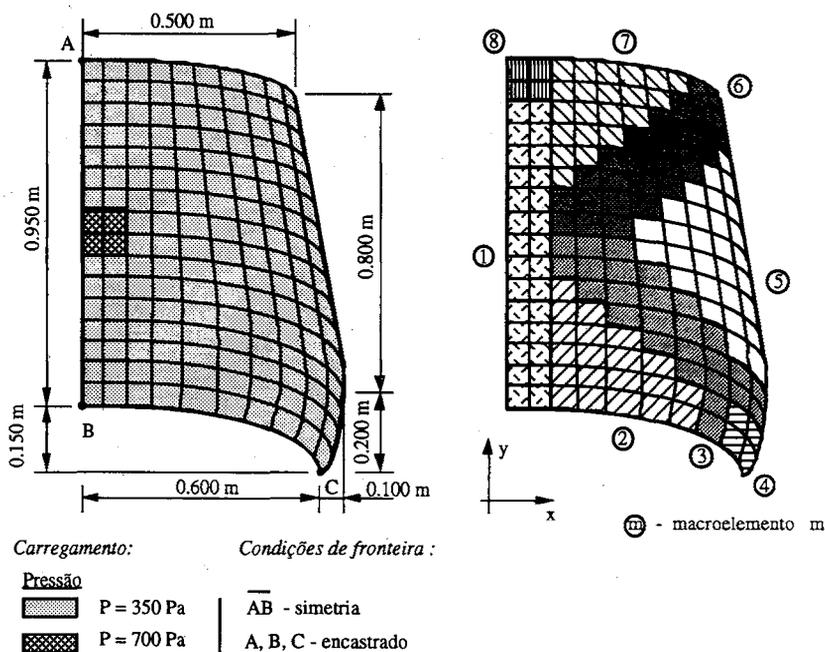


Figura 10. Domínio da solução de projecto, carregamento, condições de fronteira e subestruturação para a cobertura do motor de automóvel

Neste exemplo consideram-se 32 variáveis aleatórias correspondentes às propriedades mecânicas (i.e. E_{1m} , E_{2m} , Y_m e S_m , $m = 1, \dots, 8$), com os valores médios e desvios padrão apresentados na Tabela III. Por outro lado, embora o carregamento tenha uma natureza aleatória, considera-se que o seu desvio padrão é nulo.

O problema de otimização depende de 48 variáveis de projecto, sendo 40 do tipo orientações das camadas e 8 variáveis do tipo espessuras dos laminados dos macroelementos.

Constantes elásticas		Média $\bar{\pi}_i$	Desvio padrão σ_{π_i}	Resistência (MPa)		Média $\bar{\pi}_i$	Desvio padrão σ_{π_i}
Módulos elásticos (GPa)	E1	38.60	7.720	Longitudinal	X X'	1062	-
	E2	8.27	1.654				
Módulos de corte (GPa)	G ₁₂	4.14	-	Transversal	Y Y'	31	6.20
	G ₁₃	4.14	-				
	G ₂₃	4.14	-				
Coeficientes de Poisson	V ₁₂	0.26	-	Corte	S	72	14.40
	V ₁₃	0.26	-				
	V ₂₃	0.26	-				

Tabela III. Propriedades materiais das camadas dos laminados do exemplo 2

Macro	Variável	Solução Inicial	Solução Final		Macro	Variável	Solução Inicial	Solução Final	
			(1)	(2)				(1)	(2)
1	t ₁ (mm)	7.000	7.114	4.228	5	t ₅ (mm)	7.000	4.414	4.813
	θ ₁	20°	49.0°	50.3°		θ ₂₁	75°	130.2°	126.9°
	θ ₂	-20°	-35.7°	-37.1°		θ ₂₂	-75°	-51.7°	-54.2°
	θ ₃	20°	19.9°	19.9°		θ ₂₃	75°	75.1°	75.1°
	θ ₄	-20°	-35.2°	-36.7°		θ ₂₄	-75°	-51.7°	-54.7°
	θ ₅	20°	49.5°	50.5°		θ ₂₅	75°	130.4°	127.1°
2	t ₂ (mm)	7.000	6.497	4.356	6	t ₆ (mm)	7.000	3.654	4.499
	θ ₆	0°	-38.0°	-48.5°		θ ₂₆	0°	-61.1°	-58.3°
	θ ₇	0°	29.1°	24.8°		θ ₂₇	0°	12.6°	9.2°
	θ ₈	0°	-0.2°	-0.2°		θ ₂₈	0°	-0.2°	-0.2°
	θ ₉	0°	28.9°	24.3°		θ ₂₉	0°	12.3°	9.6°
	θ ₁₀	0°	-38.2°	-49.2°		θ ₃₀	0°	-61.1°	-58.3°
3	t ₃ (mm)	7.000	3.919	4.938	7	t ₇ (mm)	7.000	4.402	4.466
	θ ₁₁	0°	-44.6°	-50.0°		θ ₃₁	10°	10.9°	16.2°
	θ ₁₂	0°	39.7°	29.3°		θ ₃₂	-10°	-3.8°	-16.6°
	θ ₁₃	0°	-0.1°	-0.1°		θ ₃₃	0°	0.0°	0.0°
	θ ₁₄	0°	41.0°	29.7°		θ ₃₄	-10°	-5.7°	-17.6°
	θ ₁₅	0°	-44.2°	-49.5°		θ ₃₅	10°	10.3°	15.9°
4	t ₄ (mm)	7.000	6.257	4.563	8	t ₈ (mm)	7.000	6.580	6.192
	θ ₁₆	0°	76.6°	67.6°		θ ₃₆	0°	-24.1°	-23.6°
	θ ₁₇	0°	2.4°	3.4°		θ ₃₇	0°	-22.7°	-22.1°
	θ ₁₈	0°	0.3°	0.4°		θ ₃₈	0°	0.1°	0.1°
	θ ₁₉	0°	11.1°	12.4°		θ ₃₉	0°	-24.9°	-24.2°
	θ ₂₀	0°	-84.4°	-91.4°		θ ₄₀	0°	-24.6°	-24.3°

Tabela IV. Resultados: 1) análise da fiabilidade; 2) análise determinística ($R_0 = 1$, $u_0 = 0.040 \text{ m}$)¹⁴

A restrição de segurança da estrutura é imposta pelo índice de fiabilidade admissível $\beta_a = 3$. As funções de estado limite de serviço são definidas pelo número de Tsai, $R_0 = 1$ (dano localizado) e pelo deslocamento vertical máximo $u_0 = 0.040$ m.

O projecto óptimo baseado na fiabilidade estrutural foi obtido em duas iterações do algoritmo aproximado de optimização (Figura 2). A solução óptima baseada na análise probabilística é apresentada na coluna (1) da Tabela IV. Esta solução é comparada com os resultados obtidos com base em conceitos determinísticos e apresentados na coluna (2) da Tabela IV para os mesmos valores de R_0 e u_0 . A solução óptima determinística foi obtida usando o modelo de optimização da referência [14].

Na solução óptima para a estrutura baseada na análise da fiabilidade a redução do peso é da ordem de 27.5 % enquanto que na solução determinística é de 34.3 %, relativamente ao projecto inicial. Estes resultados assim como os valores das principais funções e parâmetros podem ser observados na Tabela V. Note-se que a solução óptima determinística depende do coeficiente de segurança adoptado para a estrutura e neste contexto a comparação com a solução óptima probabilística deve ser feita no sentido qualitativo.

Variável	Solução Inicial	Solução Final	
		(1)	(2)
PESO (Kg)	7.841	5.684	5.150
$\bar{\beta}_{dis}$	-	3.000	
$\bar{\beta}_{str}$	-	3.837	
$\bar{\varphi}_{dis}$	0.230	0.251	
$\bar{\varphi}_{str}$	- 5.32E-02	- 1.49E-04	

Tabela V. Valores das principais funções e parâmetros

As Figuras 11 e 12 mostram o comportamento da função objectivo $W(t)$ durante as duas iterações do algoritmo de optimização. Os aspectos mais importantes são a transição suave entre as duas fases do 2º Nível do algoritmo aproximado e a convergência do processo iterativo.

As variações dos índices de fiabilidade parciais durante o segundo Nível do processo iterativo podem ser observadas na Figuras 13 a 14 respectivamente para a primeira e segunda iterações do algoritmo de optimização. O processo de optimização é numericamente mais estável na segunda iteração. As causas estão provavelmente relacionadas com as magnitudes dos índices de fiabilidade e das respectivas funções de estado limite de serviço. Durante a maior parte do processo iterativo o índice de fiabilidade do sistema está associado com a função de estado limite de serviço de deslocamentos de acordo com a definição dada pela expressão (5) e este facto pode ser observado na Figuras 13 e 14.

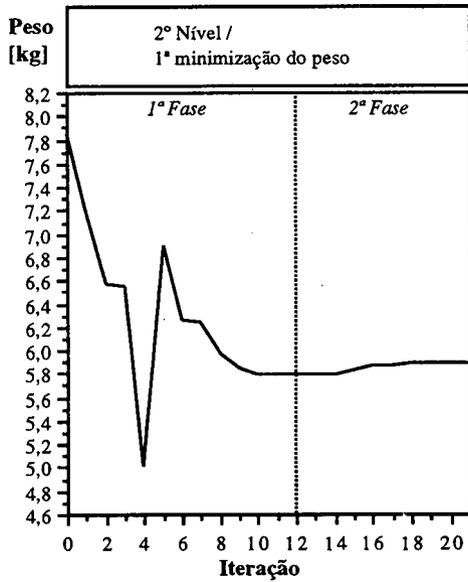


Figura 11. Evolução da função objectivo $W(t)$, 2º Nível, 1ª iteração ($N = 1$) do algoritmo de optimização

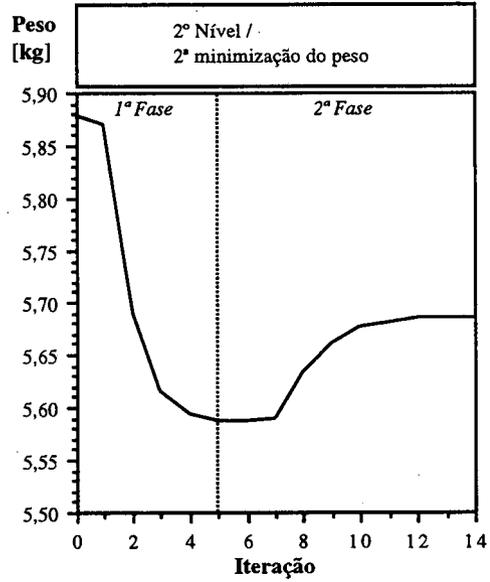


Figura 12. Evolução da função objectivo $W(t)$, 2º Nível, 2ª iteração ($N = 2$) do algoritmo de optimização

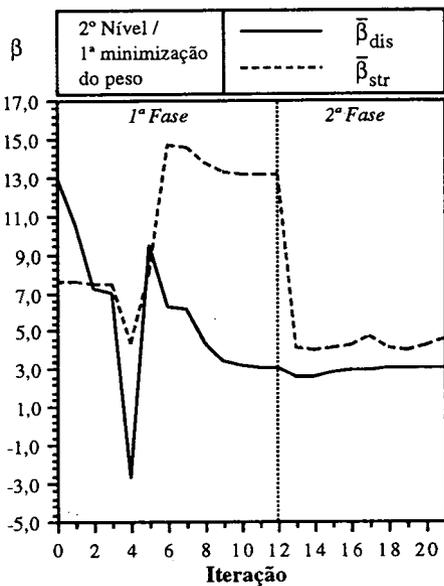


Figura 13. Evolução dos índices de fiabilidade, 2º Nível, 1ª iteração ($N = 1$) do algoritmo de optimização

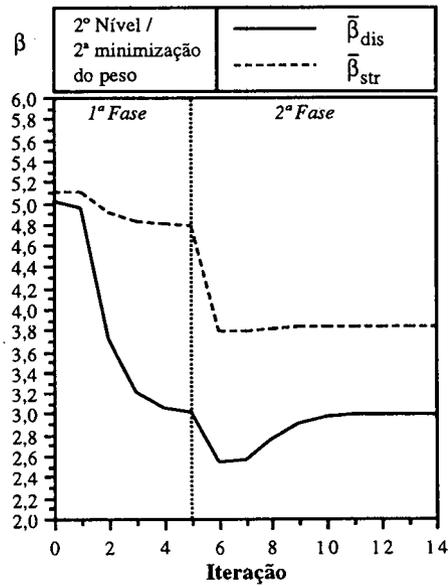


Figura 14. Evolução dos índices de fiabilidade, 2º Nível, 2ª iteração ($N = 2$) do algoritmo de optimização

CONCLUSÕES

Neste trabalho discutiu-se o projecto óptimo de estruturas em materiais compósitos baseado em conceitos probabilísticos de acordo com condições de serviço e propõem-se um método de optimização baseado na análise da fiabilidade. Na análise da fiabilidade consideram-se três estados limite de serviço: deslocamentos excessivos, nível de tensões excessivo e dano localizado. A fiabilidade do sistema estrutural é avaliada por uma análise de Nível 2 usando o índice de fiabilidade estrutural calculado pelo método de Lind-Hasofer.

O método de optimização foi desenvolvido com base em técnicas multinível tendo como objectivos a minimização de peso e a máxima eficiência estrutural, sujeitas a restrições de fiabilidade. As variáveis de projecto são os ângulos das camadas e as espessuras dos laminados.

Os resultados mostram que a estratégia adoptada de decomposição em dois níveis, é adequada para obter o projecto óptimo de estruturas fabricadas em compósitos baseado na fiabilidade estrutural de acordo com as condições de serviço. São assinaláveis a robustez e a estabilidade numérica do método de optimização proposto. Por outro lado demonstrou-se que a análise probabilística da falha das estruturas é facilmente integrada nos algoritmos de optimização e é mais racional do que a utilização de conceitos determinísticos.

REFERÊNCIAS

1. L. Yang, "Reliability of Composite Laminates", *Mech. Struct. & Mach.*, Vol. **16**, No. 4, pp. 523-536, Marcel Dekker, Inc., (1989).
2. D.J. Thomas and R.C. Wetherhold, "Reliability Analysis of Continuous Fiber Composite Laminates", *Composite Structures*, Vol. **17**, pp. 277-293, Elsevier Science Publishers, (1991).
3. H. Fukunaga, T. Chou and H. Fukuda, "Probabilistic Strength Analysis of Interlaminated Hybrid Composites", *Composites Science and Technology*, Vol. **35**, pp. 331-345, Elsevier Science Publishers, (1989).
4. D.J. Thomas and R.C. Wetherhold, "Reliability Analysis of Composite Laminates with Load Sharing", *Journal of Composite Materials*, Vol. **25**, pp. 1459-1475, Technomic Publishing Co, Inc., (1991).
5. L. Yang and M. Zukang, "Optimum Design Based on Reliability for Composite Laminates", *Composite Structures Proceedings of 4th International Conference on Composites*, I.H. Marshall (ed.), Elsevier Applied Science Publishers, New York, pp. 1378-1392, (1987).
6. S.W. Tsai, "Composites Design", Think Composites, Dayton, USA, (1987).
7. S. Ahmad, "Curved Finite Elements in the Analysis of Solid, Shell and Plate Structures", Ph.D. Thesis, University College of Swansea, (1969).
8. C. António, A. Soeiro e A.T. Marques, "Influence of Physical Properties Randomness in Laminated Composites Strength", ICCM-9, *Proceedings of the Ninth International Conference on Composite Materials*, Madrid, Spain, July, (1993).
9. A.M. Hasofer and N.C. Lind, "Exact and Invariant Second-Moment Code Format", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, February, (1974).

10. C. Lind, "A Formulation of Probabilistic Design", *Paper 128, Solid Mechanics Division, University of Waterloo*, (1974).
11. S.S. Rao, "*Reliability-Based Design*", McGraw-Hill, Inc., USA, (1992).
12. J.S. Arora, "*Introduction to Optimum Design*", McGraw-Hill Book Company, Singapore, (1989).
13. U. Kirsch, "*Optimum Structural Design*", McGraw-Hill Book Company, Singapore, (1982).
14. A.V. Soeiro, C.C. António e A.T. Marques, "Multilevel Optimization of Laminated Composite Structures", *Structural Optimization*, Vol. 7, No. 1, 2, pp. 55-60, Springer-Verlag, Berlin, (1994).
15. G.N. Vanderplaats, "*Numerical Optimization Techniques for Engineering Design with Applications*", McGraw-Hill Publishing Company, New York, 1984.
16. N. Kikuchi, J. Fukushima and K. Suzuki, "Applications to Car Bodies: Generalized Layout of Three-Dimensional Shells", *Optimization of Large Structural Systems*, Vol. I, pp. 177-191, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, (1993).