

EL PROBLEMA TERMOELÁSTICO DE CONDUCCIÓN DE CALOR ENTRE SÓLIDOS EN CONTACTO MEDIANTE ECUACIONES INTEGRALES DE CONTORNO

JOSÉ A. GARRIDO GARCÍA
PILAR ALONSO MONTERO

y

JUAN C. DEL CAÑO SÁNCHEZ

*Dpto. de Resistencia de Materiales y Estructuras,
Universidad de Valladolid, Valladolid, España.*

RESUMEN

Se presenta una formulación basada en integrales de contorno para el análisis de problemas de contacto sin fricción en termoelasticidad bidimensional. Como modelo de resistencia térmica en la zona de contacto se consideran funciones decrecientes con la presión de contacto. Las ecuaciones del problema de conducción estacionaria de calor y las ecuaciones elásticas, que están acopladas a través de la resistencia térmica, se resuelven independientemente dentro de un proceso iterativo. La convergencia se alcanza cuando se obtiene una solución del problema elástico con deformaciones térmicas sin tracciones en la zona de contacto y con una ley de compresiones que implique valores de la resistencia concordantes con los supuestos en las ecuaciones térmicas, las cuales se resuelven en primer lugar. La formulación numérica propuesta permite detectar la posible separación de los cuerpos cuando el flujo de calor circula hacia el sólido de mayor distorsionabilidad termoelástica. El artículo incluye dos ejemplos que ilustran la aplicabilidad del procedimiento expuesto.

SUMMARY

A boundary integral formulation for two dimensional thermoelastic contact problems without friction is presented. The local thermal resistance at the contact zone is modelled as a given decreasing function of the contact pressure. The stationary heat conduction equations and the elastic equations, which are coupled through the thermal resistance, are solved independently in the scope of an iterative process. The elastic problem involving thermal loading is solved, and convergence is reached when the obtained contact pressure leads to a thermal resistance in agreement with the one assumed in the thermal problem, which was formerly solved. The present formulation also accounts for the possibility of separation in the initial contact zone when the heat flows towards the body of greatest distorsivity. The paper includes two examples illustrating the reliability of the method.

Recibido: Octubre 1993

INTRODUCCIÓN

El método de los elementos de contorno (BEM) es actualmente el procedimiento numérico más usado en ingeniería para el análisis de problemas de contacto entre sólidos elásticos. Ello es consecuencia de lo ventajosa que resulta su aplicación debido a la común naturaleza (*de contorno*) de problema y de método. Así, las no linealidades presentes en el problema de contacto sin fricción son debidas al desconocimiento a priori del tamaño de la zona de contacto, lo que imposibilita la correcta definición de las condiciones de contorno. Además, las variables que intervienen en el acoplamiento de las ecuaciones que describen el comportamiento de cada sólido, son variables asociadas a los puntos del contorno que conforman la zona de contacto. Precisamente el BEM maneja exclusivamente las variables de contorno usadas en la discretización, no siendo necesario modelar el dominio de cada cuerpo. El tamaño de la zona de contacto y las variables nodales que sean desconocidas pueden ser calculadas con el sólo uso de ecuaciones integrales de contorno, pudiéndose determinar a posteriori selectivamente el tensor de tensiones y el desplazamiento en los puntos del interior de cada dominio. Los artículos indicados en las referencias [8]–[15] y los trabajos incluidos en [16] constituyen una síntesis de los progresos habidos en la aplicación del BEM al análisis de problemas bi y tridimensionales de contacto sin y con fricción.

El presente artículo contempla el análisis de problemas bidimensionales de contacto sin fricción en los que, además de las deformaciones debidas a cargas estáticas, existen deformaciones de origen térmico producidas por cualquier estado estacionario de conducción de calor. Desde el punto de vista de la aplicación del BEM, la determinación de las temperaturas y gradientes de temperatura que sean desconocidos en los nodos de los elementos de contorno es inmediata, si previamente se conoce el tamaño de la zona de contacto. Bastaría acoplar las ecuaciones que derivan de la resolución del problema de potencial (problema térmico) que se plantea en cada sólido a través de las condiciones térmicas de contacto. Desafortunadamente, la imposición de las mencionadas condiciones requiere conocer la resistencia térmica al paso del calor en cada uno de los pares de nodos de contacto, que básicamente es una función decreciente de la presión local, ver por ejemplo Kishimoto, Arai y Koizumi¹ o Madhusudana y Fletcher². Para calcular la ley de presiones es necesario, a su vez, conocer la distribución de flujos y temperaturas en el contorno de cada sólido. Se trata, por tanto, de dos problemas acoplados, uno elástico que incluye deformaciones de origen térmico y otro de potencial. Por ello, además de aparecer las no linealidades de contorno específicas del problema elástico de contacto, se añade la dificultad asociada a la dependencia no lineal existente entre las condiciones de contorno del problema térmico y la solución de tensiones del problema elástico.

El objetivo de este trabajo es desarrollar una formulación basada en el método de los elementos de contorno para el análisis numérico del referido problema de contacto termoelástico. Se ha diseñado un esquema iterativo de resolución que converge rápidamente en cada problema hacia una solución que arroja una zona de contacto exenta de tracciones, sin interpenetraciones entre los dominios en las proximidades de dicha zona y que presenta una distribución de presiones de contacto compatible con las resistencias térmicas locales consideradas en las condiciones de contorno del problema

de conducción estacionaria de calor.

El artículo incluye dos ejemplos. El primero es un caso de contacto conforme (la zona de contacto es conocida a priori) entre dos placas. Se analiza la influencia de la ley de resistencias térmicas de contacto sobre la solución de flujos de calor, temperaturas y tensiones, en la línea del estudio realizado por Kishimoto et al¹, quienes resuelven un problema análogo con el BEM acoplado las ecuaciones térmicas y elásticas y minimizando una función objetivo. En el segundo ejemplo se considera de nuevo el contacto entre dos placas de distinta distorsionabilidad termoelástica, aunque en situaciones en las que el flujo de calor circula hacia la placa de mayor distorsionabilidad. El problema es analizado bajo distintos supuestos de carga térmica a fin de detectar los diferentes tipos de contacto que se producen. Los algoritmos implementados han permitido encontrar las mismas soluciones con retroceso de la zona de contacto (separación parcial o total de los cuerpos) que deducen analíticamente Comminou, Barber y Dundurs⁴.

DEFINICIÓN DEL PROBLEMA. CONDICIONES DE CONTORNO

Se han considerado situaciones de contacto plano sin fricción entre sólidos elásticos que sufren pequeños desplazamientos y deformaciones por la acción simultánea de sistemas de cargas estáticas aplicadas en el contorno y sistemas de cargas térmicas estacionarias que se transmiten por conducción. El problema se define en la Figura 1a. Se distinguen las siguientes zonas diferenciadas del contorno de cada sólido en la configuración inicial: Γ_c^0 es la zona natural de contacto sin cargas estáticas ni térmicas, Γ_c^p es la zona potencial de contacto, Γ_c es la zona de contacto solución del problema considerado y referida también a la configuración indeformada ($\Gamma_c \subset \Gamma_c^p$). Las zonas del contorno donde físicamente no es posible el contacto serán Γ_1^A y Γ_1^B , donde los superíndices A y B hacen referencia a los sólidos A y B , respectivamente.

En cualquier punto " y " del contorno de cada cuerpo hay asociado un vector tensión de componentes $t_j^k(y)$ ($k = A, B$; $j = 1, 2$ son las coordenadas locales en " y ", representando $j = 1$ la dirección normal exterior y $j = 2$ la dirección tangencial según se indica en la Figura 1a), un vector desplazamiento de componentes $u_j^k(y)$, una temperatura $\theta^k(y)$ y un gradiente térmico $q^k(y)$. Si el punto " y " pertenece a una zona de no contacto (Γ_1^A o Γ_1^B) se conocen siempre dos variables elásticas y una térmica y se desconoce idéntico número de variables. Así, con referencia a la Figura 1a, pueden ser datos las dos componentes del vector tensión $t_j^k(y)$ e incógnitas las del vector desplazamiento $u_j^k(y)$, o al contrario, e incluso se pueden dar condiciones mixtas en las que se conoce una componente de cada vector y se desconoce la otra. Asimismo, puede ser conocido el valor del gradiente térmico $q^k(y)$ y desconocido el de la temperatura, o lo contrario ($\bar{\theta}^k(y)$ conocido). En los puntos de la zona de contacto que corresponda a las solicitaciones prescritas ($t_j^k(y)$, $u_j^k(y)$, $\bar{\theta}^k(y)$, $\bar{q}^k(y)$), deben satisfacerse un conjunto de condiciones elásticas y térmicas. Así, con referencia a la Figura 1b, donde se han representado dos puntos " α " de Γ_c^p que pertenecerán a Γ_c , y considerando que en hipótesis de pequeños desplazamientos la dirección de contacto es aproximadamente la de la mínima distancia entre ambos puntos, se han de dar las siguientes condiciones elásticas:

$$u_1^A(\alpha) + u_1^B(\alpha) = g(\alpha) \tag{1}$$

$$t_1^A(\alpha) - t_1^B(\alpha) = 0 \tag{2}$$

$$t_2^A(\alpha) = t_2^B(\alpha) = 0 \tag{3}$$

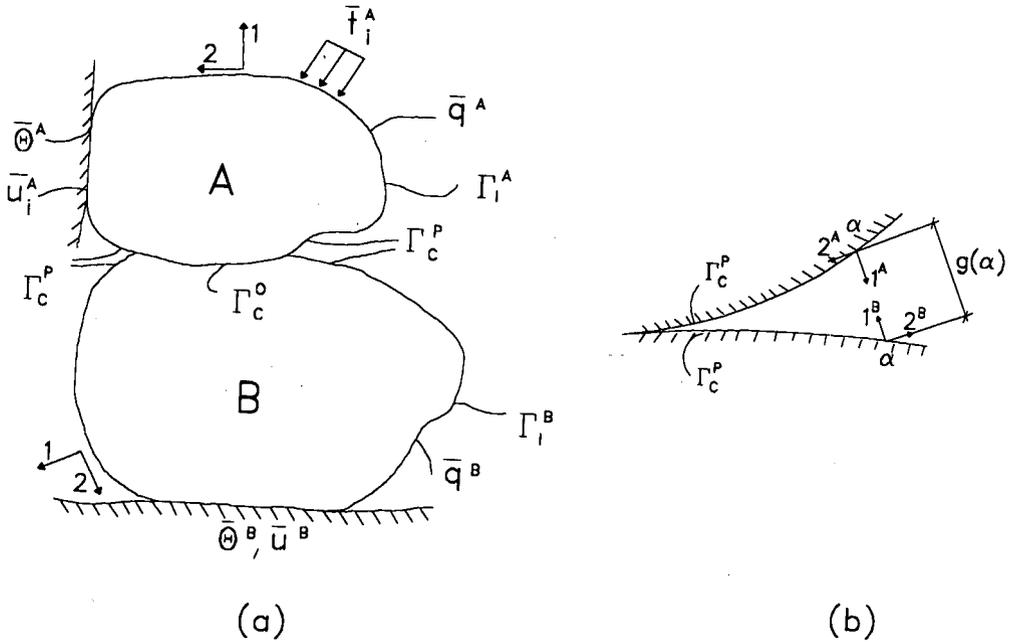


Figura 1. Definición del Problema.

En estas ecuaciones, los subíndices 1 y 2 se corresponden con las direcciones del sistema local modificado que se adopta en Γ_c^p , Figura 1b. La ecuación (1) es la condición cinemática de contacto sin fricción, siendo $g(\alpha)$ la separación inicial. Las ecuaciones (2) y (3) son las condiciones de equilibrio en el contorno, indicando la (3) la inexistencia de tensiones tangenciales en Γ_c . Nótese que $t_1^A(\alpha) \leq 0$ en Γ_c , y que $u_1^A(\alpha) + u_1^B(\alpha) \leq g(\alpha)$ en los puntos de Γ_c^p que finalmente no pertenezcan a Γ_c , pues de lo contrario se producirían interpenetraciones en las proximidades de la zona de contacto, lo cual es físicamente imposible. Eliminando las variables asociadas al sólido B mediante la aplicación de las ecuaciones anteriores, se concluye que a cada par de puntos "α" en contacto hay asociadas cuatro incógnitas elásticas: $u_1^A(\alpha)$, $u_2^A(\alpha)$, $u_1^B(\alpha)$, $t_1^A(\alpha)$.

Las condiciones térmicas de contacto son las siguientes:

$$\lambda^A q^A(\alpha) = -\lambda^B q^B(\alpha) \tag{4}$$

$$\theta^B(\alpha) = \theta^A(\alpha) - R(t_1^A(\alpha))\lambda^A q^A(\alpha) \tag{5}$$

siendo λ^A y λ^B las conductividades térmicas de los sólidos, $R(t_1^A(\alpha))$ la resistencia térmica al paso del calor (que será considerada función decreciente de $t_1^k(\alpha)$), y $q^k(\alpha)$ el gradiente de temperatura en los puntos “ α ” de cada superficie:

$$q^k(\alpha) = -\frac{\partial\theta^k(\alpha)}{\partial 1^k}, \quad k = A, B.$$

La ecuación (4) recoge la continuidad de flujo de calor en Γ_c y la (5) expresa que el salto térmico es una función de la resistencia térmica de contacto (a su vez función de la compresión local en α) y del flujo de calor. Nótese que sólo si $R = 0$ la temperatura es continua en Γ_c . De nuevo podemos eliminar las variables del sólido B , resultando dos incógnitas térmicas en cada par de puntos de Γ_c : $\theta^A(\alpha)$ y $q^A(\alpha)$. Es importante resaltar que únicamente en el caso $R = 0$ es posible imponer directamente la condición (5). Si existe resistencia térmica es imprescindible conocer la compresión local para establecer la relación de temperaturas, de ahí el acoplamiento entre el problema térmico y el elástico. Por conveniencia en la exposición de la formulación supondremos por ahora que R es una magnitud conocida y que también lo es el tamaño de Γ_c , con lo que conseguimos desacoplar ambos problemas; más adelante será expuesta la técnica de acoplamiento mediante un proceso iterativo hasta ajustar la ley de resistencias térmicas en Γ_c con la distribución de presiones de contacto.

Volviendo al recuento de incógnitas en el contorno, concluimos que en los puntos de las zonas de no contacto existen tres incógnitas (dos elásticas y una térmica), y que en cada par de puntos de Γ_c se presentan seis incógnitas, cuatro elásticas y dos térmicas.

FORMULACIÓN NUMÉRICA

Como es bien sabido, en ausencia de fuerzas de volumen, la aplicación de la Identidad de Somigliana a cualquier punto “ ξ ” del contorno de un sólido elástico que sufre deformaciones causadas por cargas estáticas y térmicas en régimen de conducción estacionaria, implica la siguiente ecuación integral de contorno.

$$\begin{aligned} c_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma} T_{ij}(\xi, y)u_j(y)d\Gamma(y) - \int_{\Gamma} U_{ij}(\xi, y)t_j(y)d\Gamma(y) = \\ = \int_{\Gamma} P_i^*(\xi, y)\theta(y)d\Gamma(y) - \int_{\Gamma} Q_i^*(\xi, y)q(y)d\Gamma(y) \end{aligned} \tag{6}$$

donde los tensores $T_{ij}(\xi, y)$ y $U_{ij}(\xi, y)$ constituyen la solución singular de Kelvin, comúnmente conocida como solución fundamental, $c_{ij}(\xi)$ es el generalmente denominado término libre de la ecuación integral, cuyo valor depende de la angulosidad del contorno en el punto ξ . $P_i^*(\xi, y)$ y $Q_i^*(\xi, y)$ son vectores que derivan de la consideración de las deformaciones de origen térmico en la ley de comportamiento elástico. Como estos tópicos están suficientemente bien descritos en la literatura, ver por ejemplo Brebbia, Telles y Wrobel⁷, no serán expuestos aquí por brevedad.

Análogamente, en el problema de conducción de calor se tiene la siguiente ecuación integral de contorno, aplicable a cualquier punto ξ de Γ :

$$c(\xi)\theta(\xi) + \int_{\Gamma} q^*(\xi, y)\theta(y)d\Gamma(y) = \int_{\Gamma} \theta^*(\xi, y)q(y)d\Gamma(y) \tag{7}$$

en la $c(\xi)$ es el término libre de la ecuación integral del problema de potencial, cuyo valor depende también de la angulosidad del contorno en ξ ; $\theta^*(\xi, y)$ y $q^*(\xi, y)$ representan la solución fundamental del mencionado problema, ver nuevamente referencia [7].

Conviene resaltar que en cada punto ξ de las zonas de no contacto (Γ_1^A y Γ_1^B) se dispone de tres ecuaciones, la (7) y las dos que derivan de la (6) ($i, j = 1, 2$), número éste que coincide con el de incógnitas asociadas a él. Asimismo, en Γ_c , tras aplicar las condiciones de contacto se presentan seis incógnitas ($u_1^A, u_2^A, u_2^B, t_1^A, \theta^A, q^A$) por cada par de puntos en contacto y se dispone de seis ecuaciones integrales, tres por cada uno de los dos puntos contactantes. Así, considerando las condiciones de contacto térmicas y elásticas (ecuaciones (1) a (5)), la ecuación integral (6) queda de la siguiente forma:

- Si el punto ξ pertenece al contorno del sólido A :

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_1^A} T_{ij}^*(\xi, y) u_j^A(y) d\Gamma(y) + \int_{\Gamma_c} T_{ij}^*(\xi, y) u_j^A(y) d\Gamma(y) - \int_{\Gamma_1^A} U_{ij}(\xi, y) t_j^A(y) d\Gamma(y) - \\ & - \int_{\Gamma_c} U_{i1}(\xi, y) t_1^A(y) d\Gamma(y) = \int_{\Gamma_1^A} P_i^*(\xi, y) \theta^A(y) d\Gamma(y) + \int_{\Gamma_c} P_i^*(\xi, y) \theta^A(y) d\Gamma(y) - \\ & - \int_{\Gamma_1^A} Q_i^*(\xi, y) q^A(y) d\Gamma(y) - \int_{\Gamma_c} Q_i^*(\xi, y) q^A(y) d\Gamma(y) \end{aligned} \quad (8)$$

- Si pertenece al contorno del sólido B :

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_1^B} T_{ij}^*(\xi, y) u_j^B(y) d\Gamma(y) + \int_{\Gamma_c} T_{i1}^*(\xi, y) g(y) d\Gamma(y) - \int_{\Gamma_c} T_{i1}^*(\xi, y) u_1^A(y) d\Gamma(y) + \\ & + \int_{\Gamma_c} T_{i2}^*(\xi, y) u_2^B(y) d\Gamma(y) - \int_{\Gamma_1^B} U_{ij}(\xi, y) t_j^B(y) d\Gamma(y) - \int_{\Gamma_c} U_{i1}(\xi, y) t_1^A(y) d\Gamma(y) = \\ & = \int_{\Gamma_1^B} P_i^*(\xi, y) \theta^B(y) d\Gamma(y) + \int_{\Gamma_c} P_i^*(\xi, y) \theta^A(y) d\Gamma(y) - \\ & - \lambda^A \int_{\Gamma_c} P_i^*(\xi, y) \mathbf{R}(t_1^A(y)) q^A(y) d\Gamma(y) - \int_{\Gamma_1^B} Q_i^*(\xi, y) q^B(y) d\Gamma(y) + \\ & + \frac{\lambda^A}{\lambda^B} \int_{\Gamma_c} Q_i^*(\xi, y) q^A(y) d\Gamma(y) \end{aligned} \quad (9)$$

Nótese que en las integrales extendidas a Γ_c aparecen exclusivamente las variables que resultan ser desconocidas después de aplicar las condiciones de contacto. El superíndice “*” del tensor $T_{ij}^*(\xi, y)$ denota la consideración implícita del término libre de la ecuación integral en $T_{ij}(\xi, y)$ cuando $\xi = y$.

Introduciendo las condiciones térmicas de contacto en la ecuación integral del problema potencial ecuación (7), se tiene:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_1^A} q_0^*(\xi, y) \theta^A(y) d\Gamma(y) + \int_{\Gamma_c} q_0^*(\xi, y) \theta^A(y) d\Gamma(y) = \\ & = \int_{\Gamma_1^A} \theta^*(\xi, y) q^A(y) d\Gamma(y) + \int_{\Gamma_c} \theta^*(\xi, y) q^A(y) d\Gamma(y) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_1^B} q_0^*(\xi, y) \theta^B(y) d\Gamma(y) + \int_{\Gamma_c} q_0^*(\xi, y) \theta^A(y) d\Gamma(y) - \\ & - \lambda^A \int_{\Gamma_c} q_0^*(\xi, y) \mathbf{R}(t_1^A(y)) q^A(y) d\Gamma(y) = \int_{\Gamma_1^B} \theta^*(\xi, y) q^B(y) d\Gamma(y) - \\ & - \frac{\lambda^A}{\lambda^B} \int_{\Gamma_c} \theta^*(\xi, y) q^A(y) d\Gamma(y) \end{aligned} \quad (11)$$

donde la ecuación (10) es de aplicación a cualquier punto ξ del contorno del sólido A y la (11) a cualquier ξ del contorno de B . El subíndice "0" en $q_0^*(\xi, y)$ se usa para expresar que el término libre de la ecuación de conducción estacionaria ha sido implícitamente considerado en $q^*(\xi, y)$ cuando $\xi = y$.

Nos referimos ahora al tratamiento numérico del problema. El contorno de cada cuerpo será discretizado con elementos de contorno rectilíneos. La zona potencial de contacto se modela con igual número de elementos en cada sólido, siendo cada par de elementos contactantes de la misma longitud, Figura 2a. Aunque pueden utilizarse diferentes tipos de elementos de contorno para aproximar la evolución de las variables (elementos constantes, lineales continuos o discontinuos, parabólicos continuos o discontinuos, etc.), usaremos elementos discontinuos con aproximación lineal de temperaturas, gradientes de temperaturas, desplazamientos y tensiones (Figura 2b). Una ventaja de la aplicación del elemento discontinuo es que sus nodos están ubicados en el interior de los mismos, no apareciendo nodos esquina, en los cuales resulta más complicada la imposición de las condiciones de contorno (especialmente las de contacto). Estos elementos ya han sido utilizados con buenos resultados en problemas estáticos de contacto por París y Garrido^{8,10,11}.

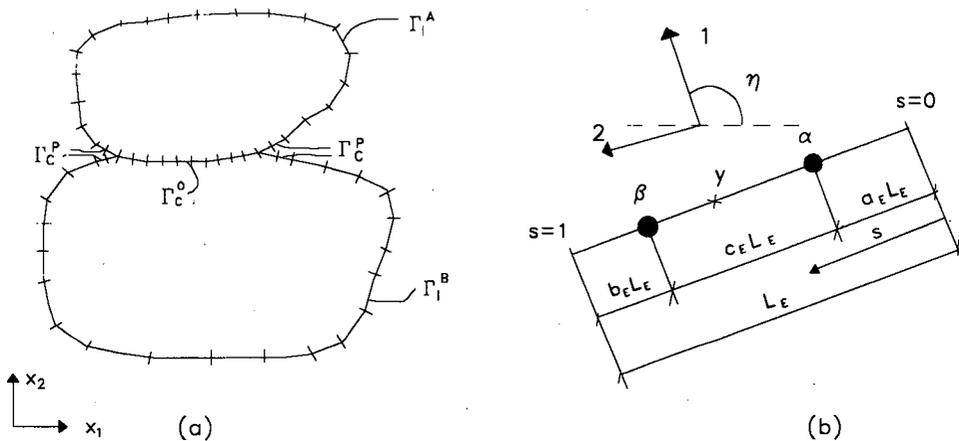


Figura 2. Discretización.

En la Figura 2b se representa un elemento de contorno genérico "E" de longitud L_E . Sus nodos α y β distan $a_E L_E$ y $b_E L_E$ de las respectivas esquinas más próximas. Aunque a_E y b_E pueden elegirse arbitrariamente, la experiencia previa en la utilización de estos elementos indica que con $a_E = b_E = 0.25$ suelen obtenerse las mejores aproximaciones.

Se considerará una evolución lineal de $\theta^k(y)$, $q^k(y)$, $u_j^k(y)$, $t_j^k(y)$ y $g(y)$, $k = A, B$, tomando como referencia los correspondientes valores nodales. En el caso de las variables elásticas la aproximación se realiza directamente en las coordenadas locales del elemento "E" considerado, o en las coordenadas locales modificadas (Figura 1b) si el elemento pertenece a la zona potencial de contacto. La aproximación lineal implica las siguientes relaciones:

$$\theta^k(y) = \Phi^E \mathbf{S}^E \theta^E \quad (12)$$

$$q^k(y) = \Phi^E \mathbf{S}^E \mathbf{q}^E \quad (13)$$

$$g(y) = \Phi^E \mathbf{S}^E \mathbf{g}^E \quad (14)$$

$$\mathbf{u}^k(y) = \Psi^E \mathbf{T}^E \mathbf{L}^E \mathbf{u}^E \quad (15)$$

$$\mathbf{t}^k(y) = \Psi^E \mathbf{T}^E \mathbf{L}^E \mathbf{t}^E \quad (16)$$

donde $k = A, B$. Con referencia a la Figura 2b, los vectores y matrices que aparecen en las expresiones anteriores tienen el siguiente significado:

$$\theta^E = \begin{bmatrix} \theta^k(\alpha) \\ \theta^k(\beta) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q}^E = \begin{bmatrix} q^k(\alpha) \\ q^k(\beta) \end{bmatrix}; \quad \Phi^E = [1 - s \quad s]; \quad \mathbf{S}^E = \begin{bmatrix} 1 + \frac{a_E}{c_E} & -\frac{a_E}{c_E} \\ -\frac{b_E}{c_E} & 1 + \frac{b_E}{c_E} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}^k(y) = \begin{bmatrix} u_1(y) \\ u_2(y) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{t}^k(y) = \begin{bmatrix} t_1(y) \\ t_2(y) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}^E = \begin{bmatrix} u_1^k(\alpha) \\ u_1^k(\beta) \\ u_2^k(\alpha) \\ u_2^k(\beta) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{t}^E = \begin{bmatrix} t_1^k(\alpha) \\ t_1^k(\beta) \\ t_2^k(\alpha) \\ t_2^k(\beta) \end{bmatrix}$$

$$\Psi^E = \begin{bmatrix} 1 - s & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - s & s \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}^E = \frac{1}{c_E} \begin{bmatrix} 1 - b_E & -a_E & 0 & 0 \\ -b_E & 1 - a_E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - b_E & -a_E \\ 0 & 0 & -b_E & 1 - a_E \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}^E = \begin{bmatrix} g(\alpha) \\ g(\beta) \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}^E = \begin{bmatrix} \cos \eta & 0 & -\text{sen } \eta & 0 \\ 0 & \cos \eta & 0 & -\text{sen } \eta \\ \text{sen } \eta & 0 & \cos \eta & 0 \\ 0 & \text{sen } \eta & 0 & \cos \eta \end{bmatrix}$$

Si "E" pertenece a Γ_c^p se ha de considerar el ángulo modificado en vez de η en la matriz de transformación de coordenadas del elemento (\mathbf{L}^E).

Suponiendo conocidos el tamaño de Γ_c y la ley de presiones de contacto, aplicando la ecuación (10) a cada uno de los $2N^A$ nodos de A y la (11) a cada uno de los $2N^B$ nodos de B ($N^k, k = A, B$, representa el número de elementos de contorno empleados para discretizar el sólido k) y realizando las integraciones sobre los elementos, se obtiene un sistema de $2N^A + 2N^B$ ecuaciones lineales una vez que se han impuesto las condiciones de contorno térmicas en las zonas de no contacto:

$$\mathbf{A}^\theta \mathbf{x}^\theta = \mathbf{b}^\theta \quad (17)$$

donde el superíndice "θ" resalta que se hace referencia al problema térmico. \mathbf{A}^θ es una matriz cuadrada de $2N^A + 2N^B$ filas que contiene los coeficientes que resultan

de efectuar las integraciones indicadas en las ecuaciones (10) y (11), y organizados en base al tipo de condiciones de contorno. El vector \mathbf{x}^θ incluye las incógnitas térmicas del problema, y \mathbf{b}^θ es el vector de términos independientes del sistema, que resulta de operar adecuadamente los coeficientes de integración con las condiciones de contorno prescritas en las zonas de no contacto. En relación con el término libre implícito en las ecuaciones integrales anteriores, decir que su valor es 0,5, pues en el elemento discontinuo el contorno es siempre suave en los nodos, ver por ejemplo la referencia [7].

Procediendo de igual modo con las ecuaciones (8) y (9) (si se conoce el tamaño Γ_c y si previamente se ha resuelto el sistema (17)), se obtiene un sistema de $4N^A + 4N^B$ ecuaciones lineales, una vez que han sido aplicadas las condiciones de contorno elásticas prescritas en las zonas de no contacto:

$$\mathbf{A}^u \mathbf{x}^u = \mathbf{b}^u + \mathbf{f}^\theta \quad (18)$$

El superíndice "u" referencia al problema elástico con deformaciones térmicas. La matriz \mathbf{A}^u contiene los $4N^A + 4N^B$ coeficientes de integración que afectan a los desplazamientos y tensiones desconocidos en los nodos del contorno. Estas incógnitas están incluidas en el vector \mathbf{x}^u . \mathbf{b}^u contiene los valores que resultan de operar los coeficientes de integración con las condiciones de contorno prescritas en las zonas de no contacto y con las separaciones iniciales entre los nodos de la zona potencial de contacto que forman parte de Γ_c (ver la segunda integral de la ecuación (9)). Finalmente, \mathbf{f}^θ es un vector conocido que proviene de las integraciones que aparecen en los segundos miembros de las ecuaciones (8) y (9). Conviene hacer notar que por las mismas razones expuestas para el problema de potencial, el término libre de las ecuaciones elásticas es $c_{ij} = 0.5 \delta_{ij}$, siendo δ_{ij} la función delta de Kronecker.

Resolviendo el sistema (18) se obtienen las componentes locales del desplazamiento y del vector tensión que sean desconocidas en los nodos de los elementos de contorno.

DETERMINACIÓN DE LA ZONA DE CONTACTO Y DE LA DISTRIBUCIÓN DE RESISTENCIA TÉRMICA

A fin de desacoplar las ecuaciones térmicas de las elásticas y para evitar las no linealidades asociadas al desconocimiento del tamaño de la zona de contacto, en la formulación anterior se supuso que Γ_c era conocida y que también lo eran los valores de la resistencia térmica en cada par de nodos en contacto. Nos referiremos ahora a la estrategia que se propone para la determinación del tamaño de Γ_c y para ajustar la distribución de resistencias térmicas a la ley de presiones de contacto.

El examen de las condiciones que debe satisfacer la solución de un problema genérico, ha sugerido la táctica expuesta en el diagrama de flujo de la Figura 3. Dichas condiciones se concretan en la inexistencia de tracciones en la zona de contacto:

$$t_1^A(\alpha), \quad \forall \alpha \leq 0, \quad \in \Gamma_c \quad (19)$$

en la imposibilidad de que se produzcan interpenetraciones entre pares de nodos de la zona potencial de contacto que finalmente no van a pertenecer a Γ_c :

$$g(\alpha) - (u_1^A(\alpha) + u_1^B(\alpha)) \geq 0, \quad \forall \alpha \in \Gamma_c^p - \Gamma_c \quad (20)$$

y en el ajuste entre las resistencias térmicas supuestas en la resolución del problema de potencial ($R(t_1^A(\alpha))$) y las que corresponden a la ley de presiones de contacto obtenida de las ecuaciones elásticas ($\bar{R}(t_1^A(\alpha))$):

$$R(t_1^A(\alpha)) = \bar{R}(t_1^A(\alpha)), \quad \forall \alpha \in \Gamma_c \quad (21)$$

La solución también debe contemplar que el flujo de calor en $\Gamma_c^p - \Gamma_c$, que se transmite por convección, es despreciable frente al que circula por conducción en Γ_c . Sin embargo, a diferencia de los requerimientos anteriores, éste se puede imponer directamente como condición de contorno cuando se considera una zona de contacto de menor tamaño que la zona potencial.

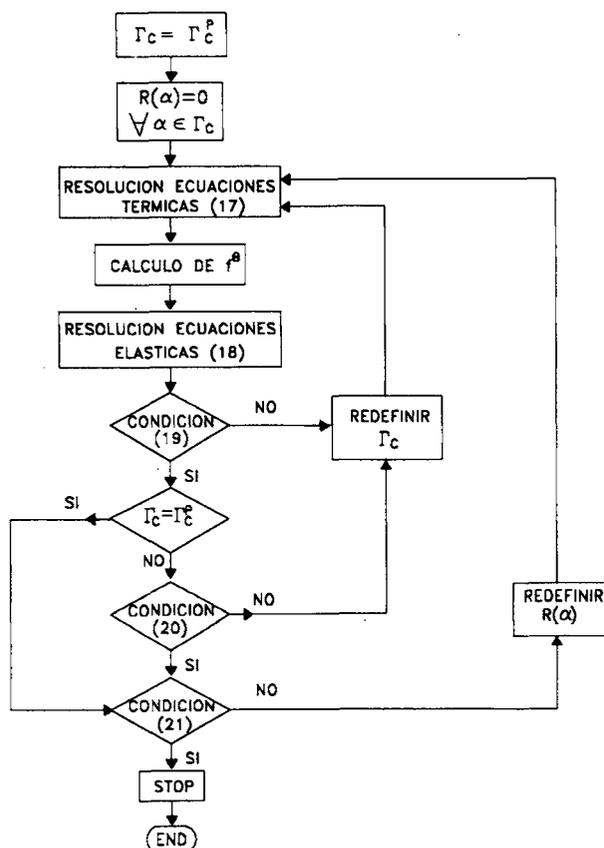


Figura 3. Procedimiento de resolución.

El procedimiento diseñado siempre se inicia suponiendo que la zona de contacto es Γ_c^p y considerando contacto perfecto (sin resistencia térmica en todos los pares). Se

resuelve entonces el sistema de ecuaciones térmicas (ecuaciones (17)) y se determina el vector de carga térmica (\mathbf{f}^{θ}). Seguidamente se resuelve el sistema de ecuaciones elásticas (18) y se pasa a chequear la condición (19) de no tracciones en Γ_c . Si no se satisface dicha condición se redefine el tamaño de la zona de contacto, excluyendo aquellos pares de nodos que hayan resultado traccionados, y se inicia de nuevo el proceso resolviendo las ecuaciones térmicas en hipótesis de contacto perfecto. Por el contrario, si se cumple la condición de no tracciones, se pasa a chequear la condición (20) de no interpenetraciones (si el tamaño de Γ_c es menor que el de Γ_c^p porque previamente se haya violado la condición (19)) o a aplicar el criterio de convergencia asumido para la resistencia térmica en los pares de nodos en contacto. En el primer supuesto, si no se satisface la condición (20) hay que redefinir Γ_c , incluyendo en ella los pares que violaron la condición, y retomar el proceso resolviendo de nuevo las ecuaciones térmicas. En cualquier caso, con referencia al diagrama de flujo de la Figura 3, siempre que se llega al nivel de chequeo de las resistencias térmicas en Γ_c (ecuación (21)), se tiene una zona de contacto sin tracciones, no existiendo interpenetraciones en sus proximidades.

Se ha implementado un sencillo criterio de convergencia de las resistencias térmicas en Γ_c , consistente en tomar los valores correspondientes a la distribución de presiones de contacto obtenida en la iteración anterior. Se considera alcanzada la solución cuando la diferencia entre $R(t_1^A(\alpha))$ y $\bar{R}(t_1^A(\alpha))$ es inferior a una determinada tolerancia en todos los pares de la zona de contacto. En relación con esto último, decir que en ningún caso analizado se han planteado problemas de convergencia (incluso con tolerancias muy exigentes), alcanzándose la solución en pocas iteraciones. Nótese que en los casos en los que se ha de redefinir la zona de contacto o la resistencia térmica, no es necesario volver a realizar las integraciones implícitas en las ecuaciones térmicas y elásticas (se almacenan en la primera iteración), aunque sí hay que montar los respectivos sistemas (17) y (18) en base a las nuevas condiciones de contorno.

EJEMPLOS

Los dos ejemplos que se presentan hacen referencia al contacto entre dos placas (Figura 4) que poseen las mismas dimensiones y características elásticas (módulo de Young: $E = 210GPa$, coeficiente de Poisson: $\nu = 0.3$). El primer problema es un caso de contacto conforme ($\Gamma_c = \Gamma_c^0$) en el que el flujo circula hacia la placa inferior, que es la de menor distorsionabilidad (la distorsionabilidad δ viene dada por la expresión $\delta = \alpha(1 + \nu)/\lambda$, ver por ejemplo referencia [3]). El segundo ejemplo es un estudio del retroceso que se produce en Γ_c cuando las condiciones de contorno hacen que el flujo de calor circule hacia la placa de mayor distorsionabilidad. En ambos problemas se ha usado la discretización mostrada en la Figura 4.

a) Contacto conforme perfecto e imperfecto

Se considera $\lambda^A = 50W/m^{\circ}C$ y $\lambda^B = 35W/m^{\circ}C$, y los siguientes coeficientes de dilatación térmica: $\alpha^A = 2 \cdot 10^{-5} (1/^{\circ}C)$, $\alpha^B = 10^{-5} (1/^{\circ}C)$. Con referencia a la Figura 4, las condiciones de contorno térmicas consisten en una temperatura prescrita constante $\bar{\theta}^A = 60^{\circ}C$ sobre el lado horizontal de no contacto de la placa superior y

una temperatura $\bar{\theta}^B = -60^\circ\text{C}$ sobre el lado horizontal de no contacto de la placa inferior. En estas circunstancias el flujo de calor circula hacia la placa inferior. Se ha estudiado el caso de contacto perfecto ($R_0 = 0$) y dos situaciones de contacto imperfecto: $R_1(t_1) = 0.0005 e^{-0.01t_1}$ y $R_2(t_1) = 0.005 e^{-0.01t_1}$. Cuando $R = 0$ el problema es lineal (las ecuaciones térmicas están desacopladas de las elásticas), y se encuentra la solución resolviendo directa e independientemente ambos sistemas de ecuaciones. Por el contrario, en los dos supuestos de contacto imperfecto, es necesario iterar hasta ajustar las resistencias térmicas a la ley de presiones (cuatro iteraciones con R_1 y nueve con R_2 , siendo la tolerancia $10^{-7} \text{ }^\circ\text{C m}^2/\text{W}$).

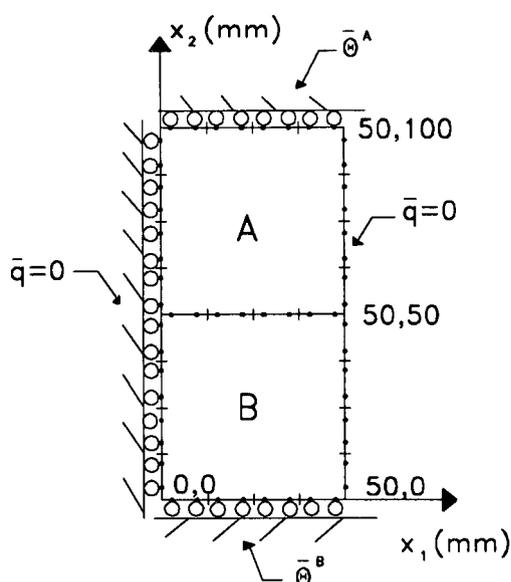


Figura 4. Definición del problema. Condiciones de contorno.

En la Figura 5 se muestra la variación de la temperatura a lo largo del eje x_2 , habiéndose representado los valores correspondientes a los nodos situados en el mismo y el valor en el primer nodo de la zona de contacto (esto se debe a que con elementos discontinuos no es posible situar un nodo en la intersección de x_2 con la zona de contacto).

En el problema sin resistencia la temperatura es continua en la zona de contacto ($10.588 \text{ }^\circ\text{C}$) e independiente de x_1 . Sin embargo, al ser los sólidos de distinta conductividad, se produce un salto en valor del gradiente de temperatura: $-988.2 \text{ }^\circ\text{C}/\text{m}$ en la placa superior y $1411.7 \text{ }^\circ\text{C}/\text{m}$ en la inferior. El flujo de calor es $4.9 \times 10^4 \text{ W}/\text{m}^2$. Con R_1 , la temperatura en el primer par de nodos de Γ_c es $16.01 \text{ }^\circ\text{C}$ en la placa superior y $2.84 \text{ }^\circ\text{C}$ en la placa inferior, siendo los gradientes $-879.1 \text{ }^\circ\text{C}/\text{m}$ y $1255.9 \text{ }^\circ\text{C}/\text{m}$, respectivamente; el flujo es $4.4 \times 10^4 \text{ W}/\text{m}^2$. En el caso de resistencia térmica R_2 , que es mayor que R_1 , el salto térmico en la zona de contacto es también mayor ($36.96 \text{ }^\circ\text{C}$ en el nodo de la placa superior y $-27.08 \text{ }^\circ\text{C}$ en el de la inferior) y el flujo que circula a través de la zona de contacto es mucho menor: $2.29 \times 10^4 \text{ W}/\text{m}^2$ (el gradiente

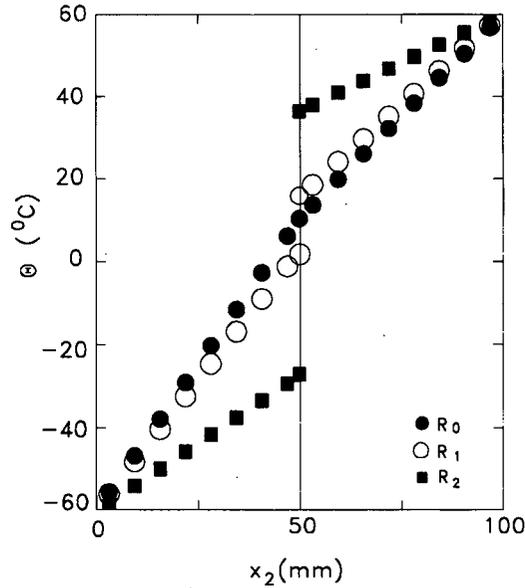


Figura 5. Variación de la temperatura en el eje x_2 .

térmico vale $-458.7 \text{ }^\circ\text{C}/\text{m}$ en el nodo de la placa superior y $655.3 \text{ }^\circ\text{C}/\text{m}$ en el de la inferior).

Las presiones (t_1) en los nodos de Γ_c se muestran en la Figura 6. Como cabía esperar la presión aumenta a medida que se considera mayor imperfección del contacto.

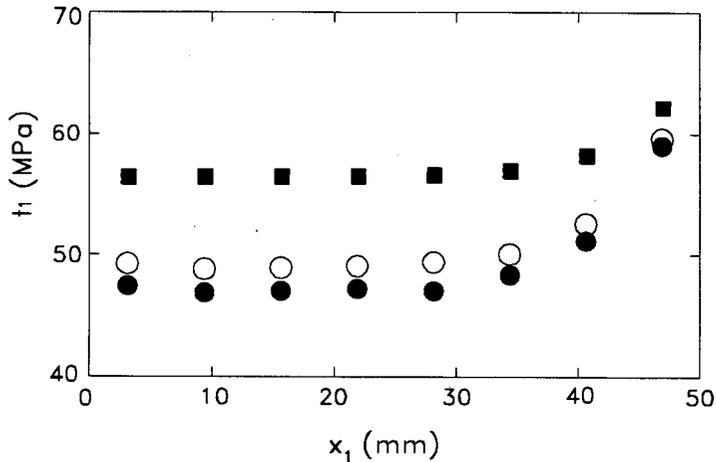


Figura 6. Presiones en la zona de contacto.

No obstante, al igual que en la referencia [1], se observa que dicho incremento decrece con x_1 hasta anularse prácticamente en el extremo derecho de la zona de contacto, donde la presión es mayor. En particular, en el nodo más próximo a dicho extremo se

obtiene: $t_1 = -59 \text{ MPa}$ (si $R = 0$), $t_1 = -59.6 \text{ MPa}$ (si $R = R_1$) y $t_1 = -62.17 \text{ MPa}$ (si $R = R_2$).

b) Contacto perfecto con retroceso

Se consideran diferentes cargas térmicas que implican que el flujo circule hacia la placa superior (la de mayor distorsionabilidad termoelástica). Como es conocido (ver por ejemplo referencia [4]), en estas circunstancias puede producirse retroceso (despegue) en las esquinas de la zona inicial de contacto (Γ_c^0). Además, es admisible suponer contacto perfecto ($R = 0$) en Γ_c . Las condiciones de contorno consisten en una temperatura prescrita $\bar{\theta}^B = 60 \text{ }^\circ\text{C}$ en el lado horizontal de no contacto de la placa inferior y una temperatura $\bar{\theta}^A$ en el lado horizontal de no contacto de la placa superior. Se han considerado distintos valores de $\bar{\theta}^A$ comprendidos entre $\bar{\theta}^A = -32^\circ\text{C}$ (para el que se obtiene contacto conforme $\Gamma_c = \Gamma_c^0$) y $\bar{\theta}^A = -34.7^\circ\text{C}$ (para el que se obtiene una solución de retroceso total o de no contacto).

En la Figura 7 se muestra la presión de contacto para tres valores distintos de $\bar{\theta}^A$. Nótese que ésta va decreciendo conforme retrocede la zona inicial de contacto. Cuando $\bar{\theta}^A = -34^\circ\text{C}$, la solución contempla el despegue de los dos nodos del elemento de la esquina derecha, y con $\bar{\theta}^A = -34.63^\circ\text{C}$ el retroceso afecta ya a la mitad de la zona de contacto.

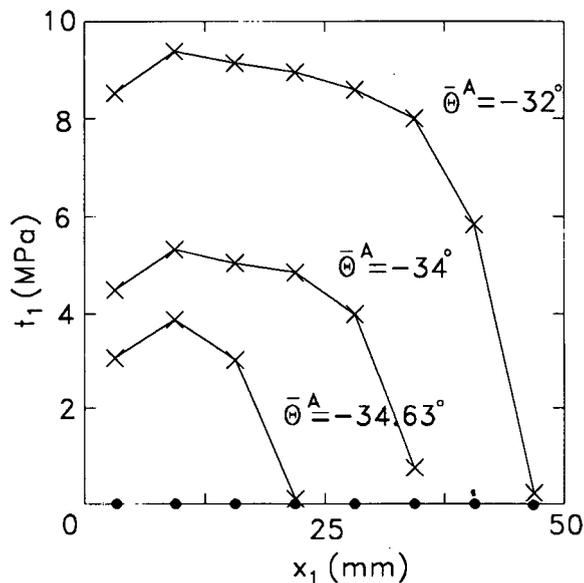


Figura 7. Presiones en la zona de contacto.

La distribución de temperaturas en Γ_c se ha representado en las Figuras (8a) y (8b). La primera hace referencia a la zona inicial de contacto de la placa superior y la segunda a la de la placa inferior. Obsérvese que al no haber resistencia térmica la distribución de temperaturas en las respectivas zonas de contacto es constante y

continua. Sin embargo, en los pares en los que se produce retroceso la temperatura es distinta en cada nodo, tomando valores positivos en la placa caliente y negativos en la fría (recuérdese que en estos nodos se impone implícitamente que el flujo es cero). Para $\bar{\theta}^A = -34.7^\circ C$ se produce el despegue total, por lo que las ecuaciones térmicas arrojan campos de temperaturas uniformes en cada placa ($60^\circ C$ en la inferior y $-32.7^\circ C$ en la superior) y, por tanto, inexistencia de flujo de calor.

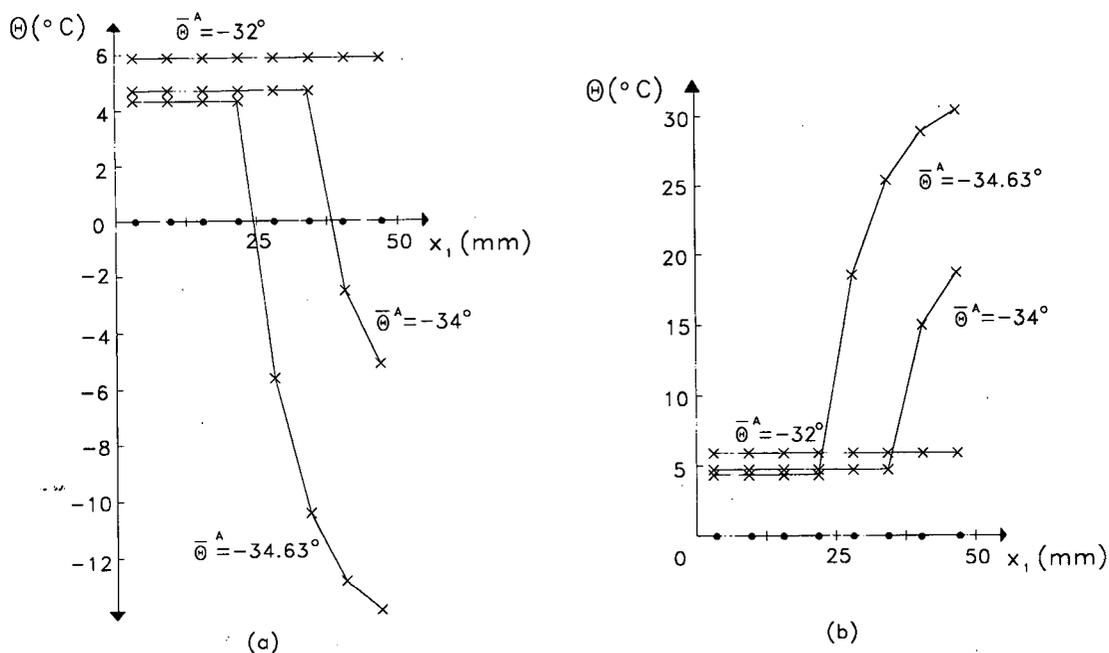


Figura 8. Temperaturas en la zona potencial de contacto.

El flujo en Γ_c es el indicado en la Figura 9. Como puede apreciarse al retroceder la zona de contacto aumenta el flujo, aunque disminuye el calor total (integral de " λq " extendida a Γ_c) que se transmite a través de la zona de contacto.

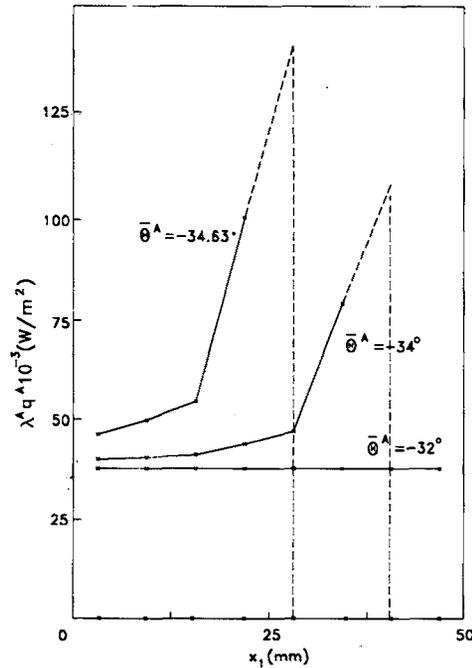


Figura 9. Flujo de calor en la zona potencial de contacto.

CONCLUSIONES

Se ha presentado una formulación, basada en el método de los elementos de contorno, del problema de contacto sin fricción con deformaciones térmicas producidas por estados estacionarios de conducción de calor. La técnica de análisis propuesta consiste en desacoplar las ecuaciones térmicas de las elásticas y resolver iterativamente hasta ajustar la resistencia térmica a la ley de presiones, además de lograr una zona de final de contacto que no presente tracciones en su interior ni interpenetraciones en sus proximidades. En ninguno de los casos analizados se han presentado problemas de convergencia. Se han incluido dos ejemplos en los que se consideran situaciones de contacto conforme, perfecto e imperfecto, y en retroceso, a través de los cuales se pone de manifiesto la aplicabilidad del método descrito. Como líneas de desarrollo futuro se sugiere, en primer lugar, la posibilidad de considerar simultáneamente dos subzonas, una de contacto perfecto y otra de contacto imperfecto, lo cual tendría gran interés en aquellos casos en los que el flujo de calor circula hacia el sólido de mayor distorsionabilidad (ver referencia [4]). También sería de gran importancia la formulación del problema considerando leyes de resistencia térmica que contemplasen la existencia de fricción.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer a la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología el apoyo prestado para la realización de esta trabajo a través del proyecto de investigación ESP91-1029-C02-02.

REFERENCIAS

1. K.Kishimoto, M. Arai y T. Koizumi, "Boundary Element Method of Thermoelastic Contact Problems", *Boundary Elements XIV*, Vol. 1, pp. 377-390, Computational Mechanics Publication-Elsevier Applied Science, (1992).
2. C.V. Madhusudana y L.S. Fletcher, "Contact Heat Transfer - The Last Decade", *A.I.A.A. Journal*, Vol. 24, pp. 510-523, (1985).
3. M. Comninou, J.R. Barber y J. Dundurs, "Heat Conduction through a Flat Punch", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 48, pp. 871-875, (1981).
4. M. Comninou, J.R. Barber y J. Dundurs, "Planar Hertz Contact with Heat Conduction", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 48, pp. 549-554, (1981).
5. M. Comninou y J. Dundurs, "On Lack of Uniqueness in Heat Conduction through a Solid to Solid Contact", *Journal of Heat Transfer*, Vol. 102, pp. 319-323, (1980).
6. R. Bialecki y G. Kuhn, "Boundary Element Solution of Heat Conduction Problems in Multizone Bodies of Non-Linear Material", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, pp. 799-809, (1993).
7. C.A. Brebbia, J.C.F. Telles y L.C. Wrobel, "*Boundary Element Techniques*", Springer-Verlag. (1984).
8. F. París y J.A. Garrido, "An Incremental Procedure for Friction Contact Problems with the BEM", *International Journal for Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 6, No. 4, pp. 202-213, (1989).
9. F. París, A. Foces y J.A. Garrido, "Applications of Boundary Element Method to Solve Three Dimensional Elastic Contact Problems without Friction", *Computers and Structures*, Vol. 43, pp. 19-30, (1992).
10. J.A. Garrido, A. Foces y F. París, "BEM Applied to Receding Contact Problems with Friction", *International Journal for Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 15, No. 3-5, pp. 143-153, (1991).
11. F. París y J.A. Garrido, "On the Use of Discontinuous Elements in Two Dimensional Contact Problems", *Boundary Elements VII*, Vol. 2, pp. 13-27, (1985).
12. J.A. Garrido, A. Foces y F. París, "An Incremental Procedure For Three Dimensional Contact Problems with Friction", *Computers and Structures*, Vol. 50, pp. 201-215, (1994).
13. B.W. Dandekar y R.J. Conant, "Numerical Analysis of Elastic Contact Problems Using The Boundary Integral Equation Method. Part I: Theory", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, pp. 1513-1522, (1992).
14. W. Zang y P. Gudmunson, "Frictional Contact Problems of Kinded Cracks Modelled by a Boundary Integral Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, No. 3, pp. 427-446, (1991).
15. T. Anderson, B. Fredriksson y A. Persson, "The Boundary Element Method Applied to Two Dimensional Contact Problems", *New Developments in Boundary Element Method*, Ed. C.A. Brebbia, Computational Mechanics Publications, (1980).

16. "*Computational Methods in Contact Mechanics*", Eds. M. Aliabadi y C.A. Brebbia, Elsevier Applied Science, (1993).