

MODELAÇÃO DE INTERFACES GEOTÉCNICAS OU METÁLICAS UTILIZANDO A TEORIA ENDOCRÓNICA DA PLASTICIDADE

F.M.F. SIMÕES
e
J.A.C. MARTINS

*Departamento de Engenharia Civil,
Instituto Superior Técnico,
Av. Rovisco Pais,
1096 LISBOA Codex, Portugal*

RESUMEN

Neste artigo aplica-se a teoria endocrónica da plasticidade desenvolvida por Valanis à modelação do comportamento mecânico de interfaces. Resumem-se as equações do modelo endocrónico e identificam-se os parâmetros e funções materiais a obter experimentalmente. Como exemplos de aplicação e teste da teoria, utiliza-se o modelo endocrónico na caracterização do comportamento mecânico de interfaces geotécnicas e metálicas. Descreve-se sumariamente um programa de elementos finitos que permite analisar problemas planos em que o comportamento dos materiais e das interfaces em presença possa ser modelado pela teoria endocrónica. Apresentam-se também exemplos de aplicação e teste do programa de elementos finitos desenvolvido.

SUMMARY

In this paper the application of Valanis' endochronic plasticity theory to the constitutive modelling of interfaces is proposed. The equations of the endochronic model are summarized; the material functions and parameters to be determined from experimental tests are also identified. The endochronic model is applied and tested in some examples which involve the characterization of the mechanical behaviour of geotechnical and metallic interfaces. A finite element program is developed for the analysis of plane problems in which the mechanical behaviour of the bulk materials and the interfaces is modelled with the endochronic theory. Some examples of application and test of the finite element program are also given.

Recibido: Diciembre 1992

INTRODUÇÃO

A teoria endocrónica da plasticidade foi introduzida por Valanis¹ para descrever a resposta elasto-plástica de materiais cujo comportamento depende da sua história de deformação. Para materiais em que o estado de tensão é função da história de deformação mas não da velocidade de deformação, o tempo não é a escala apropriada para formular as equações de evolução. Este facto está na base da ideia proposta por Valanis de que cada material possui uma escala de tempo designada por “tempo intrínseco” que é independente do tempo natural, sendo antes uma propriedade desse material em relação à qual as suas equações de evolução devem ser formuladas. O estado actual de tensão de um material será então um funcional de toda a sua história de deformação expressa em termos do tempo intrínseco.

Desde a sua introdução, esta teoria foi aplicada à descrição do comportamento de diferentes materiais: metais², solos³ e betão⁴.

Ao contrário das teorias clássicas da plasticidade, a teoria endocrónica consegue explicar o comportamento elasto-plástico dos materiais e distinguir entre situações de carga e descarga sem recorrer ao conceito de “superfície de cedência” no espaço de tensões e sem necessitar de especificar um critério de “carga-descarga”. Trata-se de uma teoria particularmente atraente para descrever o comportamento de materiais em que se torne difícil precisar o início da cedência plástica ou em que a deformação plástica se desenvolve gradual e continuamente logo após o início do carregamento.

Experimentalmente observa-se que muitas interfaces exibem precisamente este tipo de comportamento elasto-plástico. Assim, neste artigo, adapta-se o modelo endocrónico à descrição do comportamento mecânico de interfaces. Entre outros modelos anteriormente propostos para o comportamento de interfaces referem-se o modelo hiperbólico⁵, os modelos de Desai^{6,7,8} e o modelo de Michalowski e Mroz⁹.

Na segunda secção deste artigo resumem-se as equações do modelo endocrónico e na secção seguinte apresentam-se exemplos de aplicação em que se faz a determinação das propriedades materiais que caracterizam o comportamento sob solicitações normais e de corte de uma interface areia-betão, o comportamento ao corte de uma interface entre dois solos e o comportamento ao corte de uma interface metálica. No último caso, para além de se modelar a relação entre a força de corte e os deslocamentos tangenciais também se modela o efeito de acoplamento que se reflecte no aumento da área real de contacto e da condutância de interfaces com o aumento da força de corte.

Na quarta secção descreve-se sumariamente um programa de elementos finitos em que se implementou a teoria endocrónica da plasticidade quer para meios contínuos quer para interfaces. Este programa foi testado na determinação da carga última de uma coluna com uma junta inclinada e foi aplicado ao estudo da distribuição de tensões numa interface entre um tubo e o meio elástico onde o mesmo está inserido.

EQUAÇÕES DA TEORIA ENDOCRÓNICA DA PLASTICIDADE PARA INTERFACES

Sejam w_T e w_N os deslocamentos relativos tangencial e normal, respectivamente,

de uma interface, isto é, os saltos das componentes tangencial e normal ao longo de uma superfície de possível descontinuidade no seio de um corpo. Limitar-nos-emos a estudar casos planos. Considere-se a decomposição dos incrementos desses deslocamentos relativos nas suas parcelas elásticas (dw_T^e, dw_N^e) e plásticas (dw_T^p, dw_N^p)

$$dw_T = dw_T^e + dw_T^p \quad (1)$$

$$dw_N = dw_N^e + dw_N^p \quad (2)$$

em que as parcelas elásticas se relacionam com os incrementos de tensão de corte ($d\tau$) e de tensão normal ($d\sigma$) por

$$dw_T^e = \frac{d\tau}{K_T^e} \quad (3)$$

$$dw_N^e = \frac{d\sigma}{K_N^e} ; \quad (4)$$

K_T^e e K_N^e são os coeficientes de rigidez elástica para os comportamentos tangencial e normal da interface, respectivamente.

O incremento de tempo intrínseco para uma interface é definido por

$$dz^2 = |dw_T^p|^2 + k^2 |dw_N^p|^2 , \quad (5)$$

definindo-se também os incrementos de tempo intrínseco tangencial e normal dz_T e dz_N , respectivamente, que se relacionam com o incremento de tempo intrínseco total dz através de

$$dz_T = \frac{dz}{F_T} \quad (6)$$

$$dz_N = \frac{dz}{KF_N} \quad (7)$$

F_T e F_N são funções de endurecimento tangencial e normal, respectivamente, e k é um parâmetro material que determina a intensidade do acoplamento entre as deformações de corte e normal.

Para transformações isotérmicas e com pequenas deformações as equações constitutivas da teoria endocrónica são

$$\tau = \int_0^{z_T} \rho(z_T - z') \frac{dw_T^p}{dz'} dz' \quad (8)$$

$$\sigma = \int_0^{z_N} \phi(z_N - z') \frac{dw_N^p}{dz'} dz' , \quad (9)$$

em que $\rho(z_T)$ e $\phi(z_N)$ são núcleos singulares que satisfazem a condição $\rho(0) = \phi(0) = \infty$, mas que são integráveis no domínio $0 \leq z < \infty$ e, de acordo com Valanis⁴, podem ser aproximados através de um número finito de termos de séries de Dirichlet:

$$\rho(z_T) = \sum_{r=1}^n A_r e^{-\alpha_r z_T} \quad (10)$$

$$\phi(z_N) = \sum_{i=1}^m B_i e^{-\beta_i z_N} ; \quad (11)$$

A_r, α_r, B_i e β_i são constantes positivas (finitas). Como consequência, as equações (8,9) podem ser escritas na forma alternativa

$$\tau = \sum_{r=1}^n Q_r \quad (12)$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^m P_i , \quad (13)$$

em que as grandezas Q_r e P_i devem satisfazer as equações diferenciais

$$\frac{dQ_r}{dz_T} + \alpha_r Q_r = A_r \frac{dw_T^p}{dz_T} \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

$$\frac{dP_i}{dz_n} + \beta_i P_i = B_i \frac{dw_N^p}{dz_N} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (15)$$

A partir das equações (1-7, 12-15) é possível escrever as equações constitutivas da teoria endocrónica da plasticidade para interfaces na forma incremental¹⁰:

$$dt = \mathbf{D} dw + d\mathbf{H}_p , \quad (16)$$

em que

$$dt = \left\{ \begin{matrix} d\sigma \\ d\tau \end{matrix} \right\}, \quad dw = \left\{ \begin{matrix} dw_N \\ dw_T \end{matrix} \right\}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \hat{K}_N^e & 0 \\ 0 & \hat{K}_T^e \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad d\mathbf{H}_p = \left\{ \begin{matrix} -\frac{\hat{K}_N^e}{B} P dz_n \\ -\frac{\hat{K}_T^e}{A} Q dz_T \end{matrix} \right\} . \quad (17)$$

Simultaneamente, o incremento de tempo intrínseco deve satisfazer a equação quadrática (cf.(3-7, 12-15))

$$a_0 dz^2 + a_1(dw_i)dz + a_2(dw_i) = 0 \quad (18)$$

e os incrementos das grandezas Q_r e P_i devem satisfazer as equações (cf.(1-4, 6, 7, 14, 15))

$$dQ_r = \left(\frac{A_r Q}{A + K_T^e} - \alpha_r Q_r \right) \frac{dz}{F_T} + \frac{A_r K_T^e}{A + K_T^e} dw_T \quad (19)$$

$$dP_i = \left(\frac{B_i P}{B + K_N^e} - \beta_i P_i \right) \frac{dz}{kF_N} + \frac{B_i K_N^e}{B + K_N^e} dw_N . \quad (20)$$

Os coeficientes $a_0, a_1, a_2, A, Q, B, P, \hat{K}_N^e$ e \hat{K}_T^e que figuram nas equações incrementais anteriores têm as seguintes definições:

$$a_0 = 1 - \frac{1}{(A + \hat{K}_T^e)^2} \left(\frac{Q}{F_T} \right)^2 - \frac{1}{(B + \hat{K}_N^e)^2} \left(\frac{P}{F_N} \right)^2 \quad (21)$$

$$a_1 = -2 \left[\frac{\hat{K}_T^e Q dw_T}{(A + \hat{K}_T^e)^2 F_T} + \frac{k P \hat{K}_N^e dw_N}{(B + \hat{K}_N^e)^2 F_N} \right] \quad (22)$$

$$a_2 = - \left[\left(\frac{\hat{K}_T^e dw_T}{A + \hat{K}_T^e} \right)^2 + \frac{k^2}{(B + \hat{K}_N^e)^2} (\hat{K}_N^e dw_N)^2 \right] \quad (23)$$

$$A = \sum_{r=1}^n A_r \quad Q = \sum_{r=1}^n \alpha_r Q_r \quad (24)$$

$$B = \sum_{i=1}^m B_i \quad P = \sum_{i=1}^m \beta_i B_i \quad (25)$$

$$\hat{K}_T^e = \frac{A}{1 + \frac{A}{K_T^e}} \quad \hat{K}_N^e = \frac{B}{1 + \frac{B}{K_N^e}} \quad (26)$$

As equações (16-26) fornecem um processo simples para incrementalmente actualizar as tensões o qual, de um ponto de vista computacional, é mais atraente do que o cálculo dos integrais nas equações (8,9).

Os parâmetros e funções materiais da interface a determinar com base em testes experimentais são os seguintes: os coeficientes de rigidez elástica K_N^e e K_T^e , as funções de endurecimento F_N e F_T , os núcleos $\phi(z_N)$ e $\rho(z_T)$ e o parâmetro de acoplamento k . O seu modo de determinação é indicado em^{3,4,10}.

A forma do modelo utilizada neste trabalho permite modelar apenas o comportamento de interfaces que sofram adensamento durante os ensaios de corte. Para a modelação do comportamento dilatante Valanis e Peters¹¹ propuseram recentemente versões modificadas da teoria endocrónica.

Em todas as equações apresentadas nesta secção admitiu-se que a interface transmite tensões de compressão ($\sigma > 0$) e que a componente elástica do deslocamento relativo normal da interface é também positiva ($w_N^e > 0$).

MODELAÇÃO DO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE INTERFACES

Comportamento normal e ao corte de uma interface areia-betão

Nesta secção aplica-se a teoria endocrónica da plasticidade à modelação do comportamento mecânico de uma interface areia-betão, utilizando-se resultados experimentais obtidos por C.S. Desai e outros^{6,7}. A rigidez elástica normal K_N^e , a função

de endurecimento F_N e o núcleo $\Phi(Z_N)$ foram determinados a partir de um ensaio de compressão da interface⁷. A rigidez elástica de corte K_T^e , a função de endurecimento F_T e o núcleo $\rho(z_T)$ foram determinados a partir de ensaios de corte directo da interface⁶.

a) Rigidez elástica normal K_N^e .

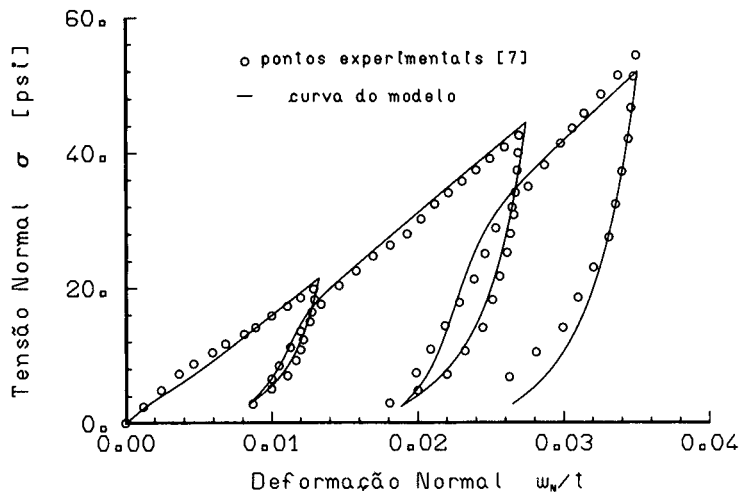


Figura 1. Comparação entre os resultados experimentais e os fornecidos pelo modelo num ensaio de compressão de uma interface areia-betão.

Na Figura 1 observa-se que a rigidez normal não é constante ao longo do ensaio e que as curvas de descarga e de recarga não se sobrepõem. Observa-se ainda que o declive da tangente à curva no início dos troços de recarga é aproximadamente o mesmo pelo que K_N^e não depende de w_N^p . No entanto K_N^e não é constante pois o declive no início das descargas é diferente do declive no início das recargas. Adoptou-se então a forma

$$K_N^e = K_0 + K_1(w_N^e)^m, \quad (27)$$

semelhante à utilizada por Valanis para areias³; K_0 é o declive da tangente à curva no início do carregamento e as constantes K_1 e m são determinadas com base nos declives das curvas do ensaio no início das descargas e das recargas¹⁰. Obteve-se

$$K_0 = 2253 \text{ psi/in}, \quad K_1 = 1 \times 10^{14} \quad \text{e} \quad m = 4.22. \quad (28)$$

b) Função de endurecimento F_N

Conhecido o valor da rigidez elástica para o comportamento normal da interface K_N^e é possível separar as parcelas elástica e plástica do deslocamento normal relativo e traçar a curva $\sigma(w_N^p)$ para este ensaio¹⁰. Verifica-se que esta resposta é essencialmente linear podendo ser aproximada por uma função do tipo

$$\sigma = \sigma_0(1 + \beta w_N^p), \quad (29)$$

em que σ_0 é a ordenada na origem e $\sigma_0\beta$ é o declive dessa recta. Se as curvas de descarga e recarga coincidissem o núcleo $\phi(z_N)$ seria um delta de Dirac³ ($\phi(z_N) = \sigma_0\delta(z_N)$). Nesse caso ϕ tomaria valores não nulos apenas na vizinhança de $z' = z_N$, pelo que, atendendo ao teorema do valor médio e às equações (5,7,9), a tensão normal seria dada por

$$\sigma = F_N \int_0^{z_N} \phi(z_N - z') dz' = \sigma_0 F_N \quad (30)$$

e a função de endurecimento por

$$F_N = 1 + \beta w_N^p . \quad (31)$$

Procedendo deste modo, como primeira aproximação para o caso presente, obteve-se o valor de β

$$\beta = 256 \text{ in}^{-1} . \quad (32)$$

c) Núcleo $\phi(z_N)$

Atendendo a que σ_0 tem o valor aproximado de

$$\sigma_0 = 6.46 \text{ psi} , \quad (33)$$

definindo σ^* por

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{F_N} \quad (34)$$

e relacionando z_N com w_N^p de acordo com (cf.(5,7,31))

$$z_N = \frac{1}{\beta} \ln(1 + \beta w_N^p) , \quad (35)$$

foi possível, tal com em^{3,10}, traçar a curva que relaciona $(\sigma_0 - \sigma^*)$ com z_N na primeira recarga do ensaio. Esta curva foi seguidamente aproximada pelo método de Prony¹² obtendo-se uma primeira aproximação para o núcleo $\phi(z_N)$ ¹⁰. Uma vez que, neste caso, as curvas de descarga e de recarga do ensaio são bastante distintas uma da outra, a função $\phi(z_N)$ não é bem aproximada por um delta de Dirac. Por isso esta aproximação inicial foi seguidamente melhorada, por tentativas. Obtiveram-se bons resultados utilizando apenas dois termos no desenvolvimento em série na equação (11):

$$\phi(z_N) = \sum_{i=1}^2 B_i e^{-\beta_i z_N} \quad (36)$$

com

$$\begin{array}{ll} B_1 = 2730 & \beta_1 = 290 \\ B_2 = 12850 & \beta_2 = 6000 \end{array} \quad (37)$$

d) Rigidez elástica de corte K_T^e

Pretendeu-se modelar a resposta registada durante o primeiro ciclo de carga, descarga e recarga de um ensaio de corte directo sob pressão constante ($\sigma = 28$ psi) de uma interface entre areia (densidade relativa $D_r = 80\%$) e betão, realizado com um deslocamento imposto máximo igual a 0.05 inch⁶. Verifica-se que o declive da tangente à curva no início dos troços de carga, de descarga e de recarga é sensivelmente o mesmo, pelo que K_T^e é aproximadamente constante. O seu valor é o declive dessas tangentes nesses pontos. Obteve-se

$$K_T^e = 1500 \text{ psi/in} . \quad (38)$$

e) Função de endurecimento F_T

A função de endurecimento ao corte em interfaces deve reflectir o efeito da pressão normal na resposta ao corte e na tensão de rotura por corte. Adopta-se portanto para F_T a forma

$$F_T = F_T(\sigma) \quad (39)$$

independente do tempo intrínseco z . Caso se pretendesse modelar a resposta ao longo de diversos ciclos do ensaio, F_T dependeria também do tempo intrínseco z . No caso presente a função de endurecimento depende apenas do ângulo de atrito da interface. Analisando as envolventes tensão tangencial máxima/tensão normal apresentadas em⁶ verifica-se que a relação entre a tensão tangencial máxima e a tensão normal é aproximadamente linear, tendo a forma (para o primeiro ciclo)

$$\tau_{\max} = 6.792 + 0.6771 \sigma . \quad (40)$$

A função F_T foi normalizada por forma a ser unitária para a pressão normal de referência $\sigma_R = 28$ psi. Obteve-se

$$F_T = \frac{\tau_{\max}(\sigma)}{\tau_{\max}(\sigma_R)} = 0.2637 + 0.0263 \sigma . \quad (41)$$

f) Núcleo $\rho(z_T)$

Para determinar $\rho(z_T)$ comece-se por escrever (8) na forma

$$\tau(y) = \int_0^y \rho(y - y') \frac{dw_T^p}{dy'} dy' \quad (42)$$

em que

$$y = z - z^1 \quad (43)$$

e z^1 é o valor de z no final da fase de compressão normal do teste. O núcleo ρ é determinado resolvendo a equação integral (42) após a determinação de $\tau(y)$ e de $(dw_T^p/dy)(y)$. Para determinar estas funções note-se que, conhecida a rigidez elástica para o comportamento ao corte K_T^e , é possível separar as parcelas elástica e plástica do deslocamento tangencial relativo na interface e traçar a curva de τ em função de w_T^p ; por outro lado tem-se^{4,10}

$$\frac{dw_T^p}{dy} = \left(\frac{2ay}{1 + 2ay} \right)^{1/2}, \quad (44)$$

em que

$$a = \frac{\sigma_0 \beta}{k \sigma_1} \quad (45)$$

e σ_1 é a tensão normal durante a fase de corte do ensaio. Utilizando agora o esquema numérico exposto em^{10,13} é possível resolver (42) e determinar o núcleo ρ . Para esta interface obteve-se

$$\rho(z_T) = \sum_{r=1}^4 A_r e^{-\alpha_r z_T} \quad (46)$$

com

$A_1 = 360$	$\alpha_1 = 20$
$A_2 = 1000$	$\alpha_2 = 140$
$A_3 = 3000$	$\alpha_3 = 2000$
$A_4 = 8700$	$\alpha_4 = 9000$

(47)

g) Parâmetro de acoplamento k

O parâmetro de acoplamento k reflecte fundamentalmente a dependência da parcela plástica do deslocamento relativo normal em relação á parcela plástica do deslocamento relativo tangencial. A sua determinação correcta seria necessária para modelar a resposta normal durante um ensaio de corte, isto é, para avaliar o adensamento da interface. Como não dispomos de resultados experimentais que permitam caracterizar este comportamento não é possível determinar o valor do parâmetro k . A influência deste parâmetro na modelação das curvas da tensão normal em função do deslocamento relativo normal $\sigma(w_N)$ e da tensão tangencial em função do deslocamento relativo tangencial $\tau(w_T)$ é insignificante tendo-se por isso considerado

$$k = 1. \quad (48)$$

Nas Figuras 1 e 2 comparam-se os resultados experimentais com os resultados fornecidos pela teoria endocrónica para os parâmetros e funções determinados para a interface. A aproximação conseguida é bastante satisfatória.

Comportamento ao corte de uma interface areia-argila

Nesta secção aplica-se a teoria endocrónica da plasticidade à modelação do comportamento mecânico de uma interface entre um solo arenoso e uma argila, utilizando resultados experimentais obtidos por Mateus da Silva¹⁴. Uma vez que só se dispôs de resultados obtidos em ensaios de corte não foi possível modelar a resposta

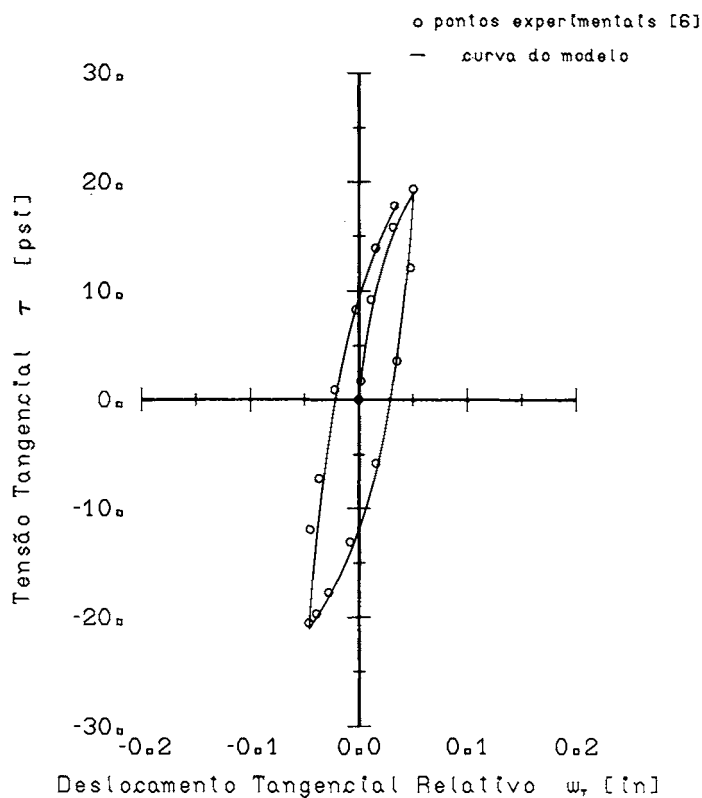


Figura 2. Comparação entre os resultados experimentais e os fornecidos pelo modelo num ensaio de corte sob tensão normal constante de uma interface areia-betão.

normal desta interface. Assim, admitiu-se que a resposta da interface sob solicitações normais é elástica linear com uma rigidez elevada, modelando-se exclusivamente a sua resposta sob solicitações de corte. As propriedades materiais determinadas para esta interface são:

$$K_T^e = 11980 \text{ KNm}^{-2} \text{ cm}^{-1} \quad (49)$$

$$F_T = 0.09219 + 0.00908 \sigma \quad (50)$$

$$\rho(z_T) = \sum_{r=1}^3 A_r e^{-\alpha_r z_T} \quad (51)$$

$$\begin{array}{ll} A_1 = 1227 & \alpha_1 = 40 \\ A_2 = 4800 & \alpha_2 = 300 \\ A_3 = 11068 & \alpha_3 = 1000 \end{array} \quad (52)$$

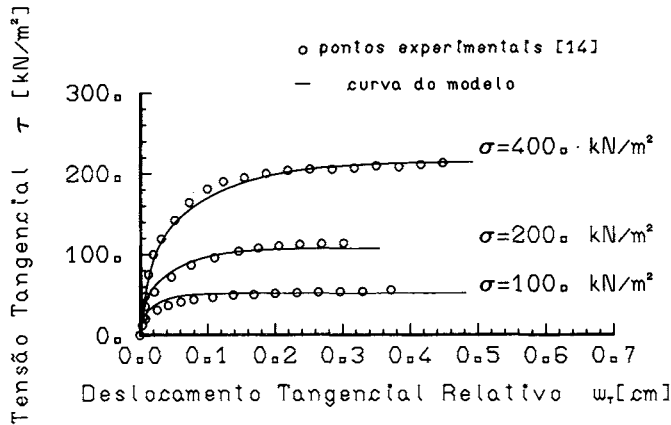


Figura 3. Comparação entre os resultados experimentais e os fornecidos pelo modelo em ensaios de corte para diferentes níveis de tensão normal.

Na Figura 3 comparam-se os resultados experimentais obtidos por Mateus da Silva¹⁴ com os resultados fornecidos pelo modelo.

O modelo foi também testado num ensaio especial não utilizado na determinação dos parâmetros materiais. Este ensaio de corte iniciou-se com o provete sujeito a uma tensão normal de 200 kN/m² a qual foi aumentada até 400 kN/m² quando a tensão de corte aplicada era aproximadamente igual a 100 kN/m². O ensaio de corte prosseguiu então com a tensão normal de 400 kN/m² e com o aumento da tensão de corte até cerca de 200 kN/m², posto o que se seguiu uma descarga por inversão do sentido do movimento da caixa de corte. Na Figura 4 comparam-se os resultados experimentais¹⁴ com os resultados obtidos com o modelo e os parâmetros materiais (49-52).

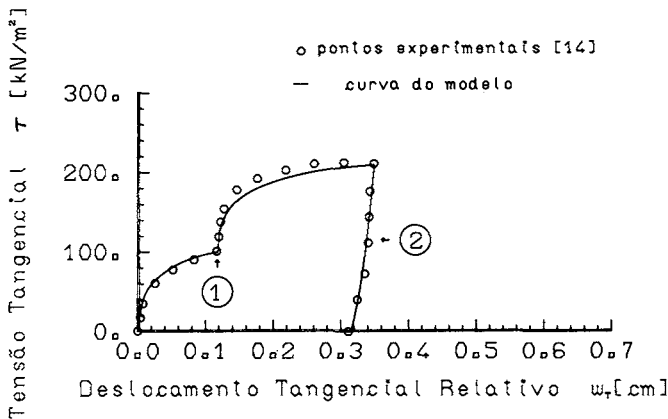


Figura 4. Comparação entre os resultados experimentais e os fornecidos pelo modelo num ensaio de corte de um provete com variação da tensão normal. 1-Aumento da tensão normal; 2-Diminuição da tensão tangencial

Comportamento ao corte de uma interface entre duas superfícies de platina

Courtney-Pratt e Eisner apresentam em¹⁵ resultados experimentais sobre o comportamento de uma interface entre superfícies polidas de platina num ensaio de corte sob força normal constante. Segundo Bowden e Tabor¹⁶ o declive inicial da curva das tensões de corte em função do deslocamento relativo resulta da deformação elástica por distorção do corpo metálico utilizado no teste e não da deformação da interface propriamente dita: a deformação por corte da interface é essencialmente plástica. Estes autores calcularam a parcela elástica dos deslocamentos e, por subtração, obtiveram a verdadeira curva das tensões de corte no ensaio em função da parcela plástica do deslocamento relativo tangencial w_T^p (ver Figura 5). Courtney-Pratt e Eisner¹⁵ mediram também a condutância eléctrica das superfícies em contacto durante as suas experiências. Desprezando a condutância de quaisquer películas existentes sobre as superfícies, a condutância c pode ser relacionada com a área real de contacto A_r pela expressão

$$\frac{c}{c_1} = \left(\frac{A_r}{A_1} \right)^{1/2}, \quad (53)$$

em que c_1 e A_1 são os valores de c e A_r no início do carregamento de corte. Na Figura 6 apresenta-se a relação obtida experimentalmente entre A_r/A_1 e o quociente da força de corte pela força normal (F/N) no processo de carregamento de corte, antes da ocorrência de grandes deslizamentos.

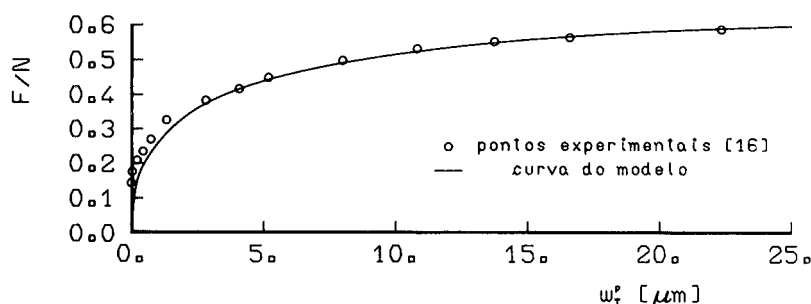


Figura 5. Deslocamentos tangenciais devidos à deformação plástica da interface.

No decorrer dos referidos ensaios¹⁵ não foi feita, para além da medição da condutância já mencionada, qualquer outra medida que caracterizasse a deformação normal da interface. Apesar destas limitações nos resultados experimentais disponíveis procurar-se-á em seguida utilizar a teoria endocrónica na modelação simultânea do comportamento ao corte representando na Figura 5 e do acoplamento adicional evidenciado na Figura 6: aumento da deformação normal (com conseqüente aumento de área real de contacto e condutância) em resultado do carregamento de corte.

Dado que se desconhece o verdadeiro comportamento normal da interface (relação entre a pressão σ e o deslocamento relativo normal w_N em ensaios com carregamento

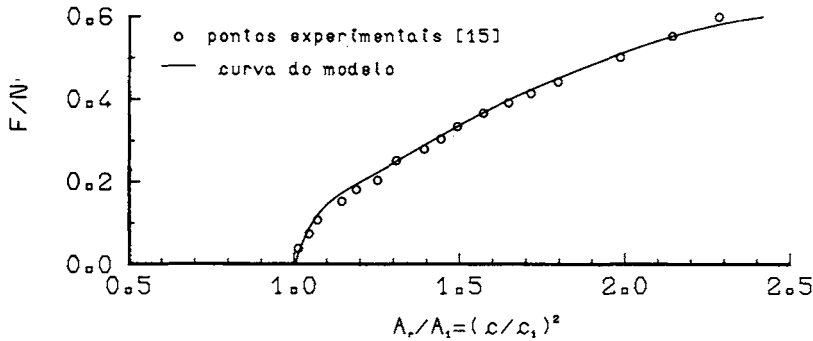


Figura 6. Relação entre a força de corte e a área de contacto real.

puramente normal) a modelação desse comportamento pela teoria endocrónica será feita admitindo que a interface em questão teria o comportamento experimental típico estabelecido por Woo e Thomas¹⁷ com base nos resultados de sete artigos de diferentes autores. Ainda no que se refere ao comportamento normal da interface admitir-se-á, ao aplicar o modelo endocrónico, que esse comportamento é puramente plástico. Não tendo sido efectuadas descargas e recargas normais no ensaio em questão esta hipótese simplificativa não assume relevância especial dado que o mesmo tipo de relações entre σ e w_N pode ser obtido quer com modelos elásticos quer com modelos plásticos ou elasto-plásticos. Por outro lado, como os resultados finais disponíveis e que se pretende modelar envolvem, não a variável cinemática que intervém na teoria endocrónica (o deslocamento relativo normal w_N), mas sim a área real de contacto A_r , utilizar-se-á novamente o trabalho de Woo e Thomas¹⁷ para correlacionar w_N e A_r de acordo com o comportamento típico estabelecido por aqueles autores.

As conclusões fundamentais destes autores que irão ser utilizadas neste trabalho são as seguintes:

i) A razão entre a área real e a área nominal de contacto (A_r/A) cresce com a tensão normal adimensionalizada (σ/H) de acordo com uma lei de potência de expoente 0.8

$$A_r/A \approx (\sigma/H)^{0.8} ; \tag{54}$$

ii) A diminuição da separação adimensionalizada (h/σ') é proporcional ao aumento do logaritmo da tensão normal adimensionalizada (σ/H)

$$h/\sigma' \approx 0.6 - 0.8 \log(\sigma/H) . \tag{55}$$

Para transformar a separação normal h em deslocamento relativo normal w_N truncou-se (tal com em¹⁷) a distribuição estatística das alturas das asperezas das superfícies no valor 3.5, isto é, tomou-se

$$w_N = h_0 - h \tag{56}$$

com

$$h_0 = 3.5 \sigma' ; \quad (57)$$

σ' é o desvio padrão desta distribuição.

Determinam-se seguidamente as propriedades materiais da interface necessárias à sua caracterização pelo modelo endocrónico.

a) Núcleo $\phi(z_N)$ e função de endurecimento F_N

O comportamento normal da interface foi modelado admitindo que esta tem o comportamento típico caracterizado por (55). Os ensaios de corte foram conduzidos sob um valor máximo de tensão normal σ igual a 126 Kgf/mm²¹⁵. A dureza da interface é ¹⁵

$$H = 0.93 \times 126 = 117.2 \text{Kgf/mm}^2 , \quad (58)$$

tendo-se ainda adoptado para desvio padrão da distribuição estatística das alturas das asperezas das superfícies metálicas (indicadas em¹⁵ como polidas) o valor

$$\sigma' = 0.1 \mu\text{m} . \quad (59)$$

Admite-se que esta resposta é puramente plástica e que o núcleo $\phi(z_N)$ é um delta de Dirac

$$\phi(z_N) = \sigma_0 \delta(z_N) . \quad (60)$$

O modelo endocrónico permite obter uma resposta de acordo com a correlação estabelecida por Woo e Thomas¹⁷ se se adoptar a função de endurecimento na forma

$$F_N = e^{\beta w_N^p} \quad (61)$$

com

$$\beta = 33.2 \mu\text{m}^{-1} \quad (62)$$

e

$$\sigma_0 = 0.008 \text{Kgf/mm}^2 . \quad (63)$$

b) Rigidez elástica ao corte K_T^e

Atendendo a o exposto anteriormente a deformação elástica da interface ao corte é desprezável pelo que, apenas por razões numéricas, se adoptou um valor constante elevado

$$K_T^e = 10^5 \text{Kgf/mm}^2 / \mu\text{m} . \quad (64)$$

c) Função de endurecimento F_T

Não se dispondo de resultados experimentais relativos a ensaios de corte desta interface sob outras forças normais adoptou-se para função de endurecimento ao corte o valor

$$F_T = 1.0 \quad , \quad (65)$$

o que corresponde a considerar que esta foi normalizada para o valor da força normal correspondente a este ensaio.

d) Núcleo $\rho(z_T)$

Dispondo-se já da curva da tensão de corte τ em função da parcela plástica do deslocamento relativo tangencial w_T^p (Figura 5), é necessário construir a curva que relaciona a parcela plástica do deslocamento relativo normal induzida durante o ensaio de corte w_{NS}^p com a parcela plástica do deslocamento relativo tangencial w_T^p . Para tal utilizou-se a curva experimental da Figura 6 e as correlações estabelecidas por Woo e Thomas¹⁷. Atendeu-se ainda a que a relação entre a área real e a área nominal de contacto no final do carregamento normal é igual a

$$A_1/A \approx \left(\frac{\sigma_1}{H} \right)^{0.8} \quad (66)$$

em que σ_1 é a tensão normal do ensaio de compressão. Na Figura 7 apresenta-se o resultado obtido.

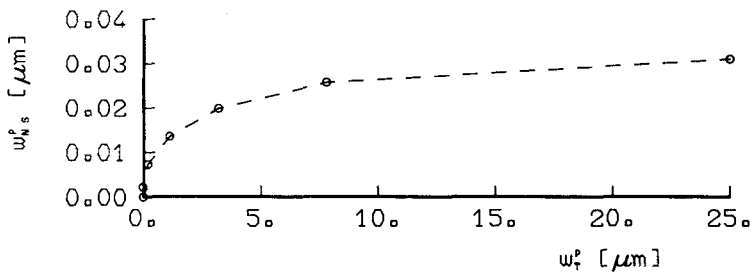


Figura 7. Parcela plástica do deslocamento relativo normal induzida durante o ensaio de corte.

Se designarmos por Z_T^1 o valor do tempo intrínseco de corte z_T no final do ensaio de compressão normal e se definirmos ζ como

$$\zeta = z_T - z_T^1 \quad , \quad (67)$$

a equação constitutiva da teoria endocrónica para a tensão de corte (8) toma a forma

$$\tau(\zeta) = \int_0^\zeta \rho(\zeta - \zeta') \frac{dw_T^p}{d\zeta'} d\zeta' \quad . \quad (68)$$

Para deterinar $\rho(\zeta)$ é necessário resolver (68), sendo preciso determinar em primeiro lugar $\tau(\zeta)$ e $(dw_T^p/d\zeta)(\zeta)$. Para isso é necessário conhecer a relação entre w_T^p e ζ durante a fase de corte do ensaio. A partir de (5-7, 9, 61, 65, 67) obtém-se que essa relação é dada incrementalmente por

$$d\zeta = \sqrt{1 + \frac{1}{e^{2\beta w_N^p} \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^2 - 1}} dw_T^p \quad (69)$$

que pode ser escrita na forma equivalente

$$d\zeta = \gamma(w_T^p) dw_T^p . \quad (70)$$

Por integração numérica obtém-se a função

$$\zeta = \zeta(w_T^p) , \quad (71)$$

que se representa na Figura 8. Esta função é seguidamente invertida numericamente obtendo-se

$$w_T^p = w_T^p(\zeta) . \quad (72)$$

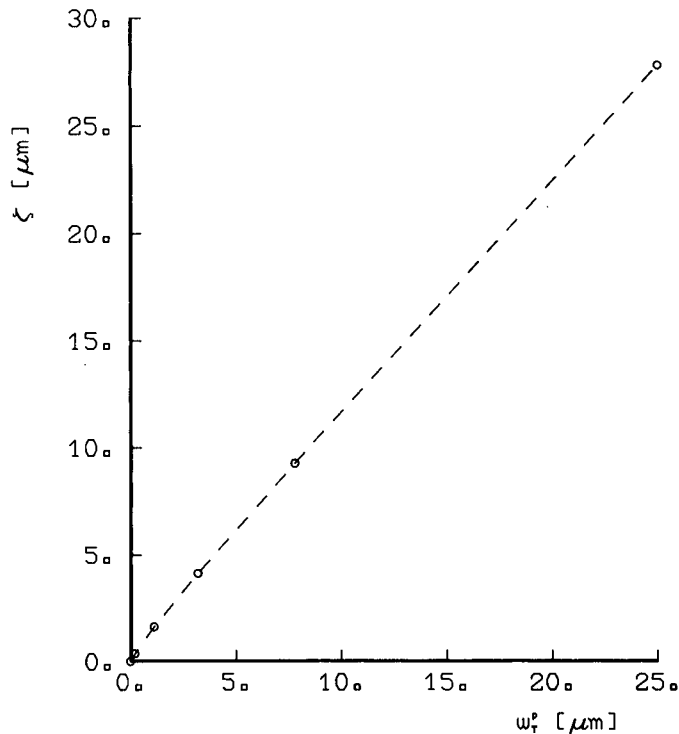


Figura 8. Função $\zeta(w_T^p)$.

Conhecidos $\tau(w_T^p)$ (Figura 5), $w_{NS}^p(w_T^p)$ (Figura 7) e $w_T^p(\zeta)$ (Figura 8) é agora possível obter as curvas $\tau(\zeta)$ e $(dw_T^p/d\zeta)(\zeta)$. Utilizando estas relações resolveu-se numericamente a equação integral (68) de acordo com o exposto em^{4,10}, obtendo-se

$\rho(\zeta)$, cuja forma foi por sua vez aproximada pelo método de Prony¹². Obteve-se para o núcleo $\rho(z_T)$ a expressão

$$\rho(z_T) = \sum_{r=1}^3 A_r e^{-\alpha_r z_T} \quad (73)$$

com

$$\begin{aligned} A_1 &= 4.037 & \alpha_1 &= 0.1084 \\ A_2 &= 17.742 & \alpha_2 &= 0.7338 \\ A_3 &= 167.881 & \alpha_3 &= 10.3974 \end{aligned} \quad (74)$$

e) Parâmetro de acoplamento k

O parâmetro de acoplamento k relaciona as parcelas plásticas dos incrementos de deslocamento relativo normal e tangencial durante a fase de corte. Segundo Valanis⁴ esta relação tem, neste caso, a forma

$$k \frac{dw_N^p}{dw_T^p} = \frac{1}{\sqrt{e^{2\beta w_N^p} \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^2 - 1}} \quad (75)$$

Neste caso verifica-se que o parâmetro k não poderá ser tomado constante já que ele cresce com a parcela plástica do deslocamento relativo normal. Adoptou-se então a forma

$$k = k_0 + k_1 e^{mw_N^p} \quad (76)$$

com

$$k_0 = 12.15 \quad k_1 = 3.826 \times 10^{-11} \quad e \quad m = 94 \quad (77)$$

Nas Figuras 5 e 6 comparam-se os resultados experimentais com os resultados obtidos com o modelo endocrónico para os parâmetros e funções acima determinados. Na Figura 9 faz-se a mesma comparação mas agora para um ensaio onde foram feitas algumas descargas e recargas na direcção tangencial. A aproximação é bastante satisfatória. Uma melhor avaliação da capacidade da teoria em modelar o comportamento ao corte da interface metálica requereria, no entanto, resultados experimentais adicionais relativos a ensaios sob diferentes tensões normais.

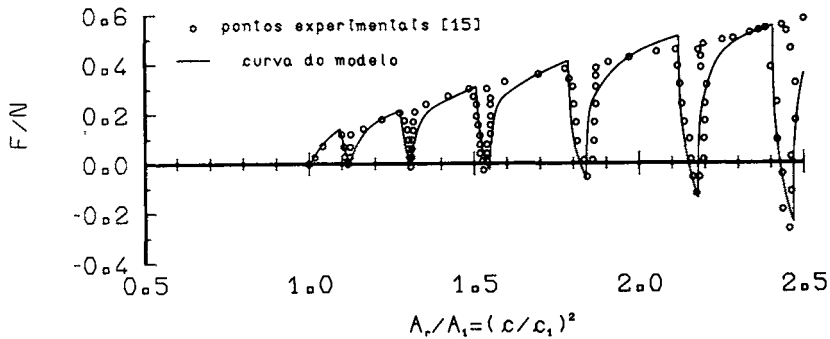


Figura 9. Relação entre a força de corte e a área de contacto real no ensaio de corte com realização de descargas e recargas sucessivas.

APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS DE PROBLEMAS DA TEORIA ENOCRÓNICA DA PLASTICIDADE COM SUPERFÍCIES DE DESCONTINUIDADE

Formulação variacional para as equações que regem o campo de deslocamentos incrementais

Sendo válida a hipótese dos pequenos deslocamentos, o Princípio dos Trabalhos Virtuais para um corpo que ocupa um volume Ω com fronteira Γ e com uma superfície de descontinuidade Γ_w pode enunciar-se na forma incremental seguinte: Os incrementos dX_j das forças de massa equilibram os incrementos $d\sigma_{ij}$ do tensor das tensões e os incrementos dt_j do vector das tensões em Γ e Γ_w se e só se

$$\int_{\Omega} d\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^* d\Omega + \int_{\Gamma_w} dt_j w_j^* d\Gamma = \int_{\Omega} dX_j u_j^* d\Omega + \int_{\Gamma} dt_j u_j^* d\Gamma \quad (78)$$

para qualquer campo de deslocamentos virtuais u_j^* , suficientemente regular em Ω , compatível com as deformações virtuais ε_{ij}^* em Ω e compatível com os deslocamentos virtuais relativos w_j^* na superfície de descontinuidade Γ_w .

Discretizando o domínio Ω em elementos finitos planos isoparamétricos bilineares ou biquadráticos e a interface em elementos finitos unidimensionais (elementos de interface sem espessura $\Gamma_w^{(e)}$, $e = 1, \dots, E$) obtém-se, por substituição da equação constitutiva incremental (16) na expressão (78) do P.T.V. e pela adopção de campos de deslocamentos incrementais e de deslocamentos virtuais de acordo com a discretização efectuada, a equação incremental de equilíbrio global

$$\mathbf{K} d\mathbf{q} = d\mathbf{F}^{ap} + d\mathbf{F}^{pl}(dz), \quad (79)$$

em que \mathbf{K} é a matriz de rigidez global, $d\mathbf{q}$ é o vector dos deslocamentos incrementais nodais, $d\mathbf{F}^{ap}$ é o vector global dos incrementos das forças aplicadas e $d\mathbf{F}^{pl}(dz)$ é o vector global dos incrementos das pseudo-forças plásticas de acordo com a teoria endocrónica da plasticidade.

As contribuições de cada elemento de interface ($e = 1, \dots, E$) para aquela equação são as seguintes:

$$K^{(e)} = \int_{\Gamma_w^{(e)}} B^{(e)T} D B^{(e)} d\Gamma \quad (80)$$

$$dF^{pl(e)}(dz) = - \int_{\Gamma_w^{(e)}} B^{(e)T} dH_p^{(e)}(dz) d\Gamma, \quad (81)$$

em que $\Gamma_w^{(e)}$ é a porção de Γ_w pertencente ao elemento (e) e $B^{(e)}$ é a matriz que relaciona os incrementos de deslocamento relativo $dw^{(e)}(\mathbf{x})$ com os incrementos dos deslocamentos nodais $dq^{(e)}$ no elemento de interface. Esta relação tem a forma

$$dw^{(e)}(\mathbf{x}) = B^{(e)}(\mathbf{x})dq^{(e)}, \quad (82)$$

em que, atendendo à Figura 10,

$$dw^{(e)}(\mathbf{x}) = \left\{ \begin{matrix} dw_N^{(e)}(\mathbf{x}) \\ dw_T^{(e)}(\mathbf{x}) \end{matrix} \right\}, \quad (83)$$

$$B^{(e)}(\mathbf{x}) = [\dots B_j^{(e)}(\mathbf{x}) \dots], \quad B_j^{(e)}(\mathbf{x}) = N_j^{(e)}(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha & -\cos \alpha & -\text{sen} \alpha \\ -\text{sen} \alpha & \cos \alpha & \text{sen} \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}, \quad (84)$$

$$dq^{(e)T} = [\dots dq_j^{(e)T} \dots] \quad \text{e} \quad dq_j^{(e)} = \left\{ \begin{matrix} dq_j^{(e)+} \\ dq_j^{(e)-} \\ dq_j^{(e)+} \\ dq_j^{(e)-} \end{matrix} \right\}; \quad (85)$$

$N_j^{(e)}(\mathbf{x})$ é a função de forma associada ao nó j do elemento (e).

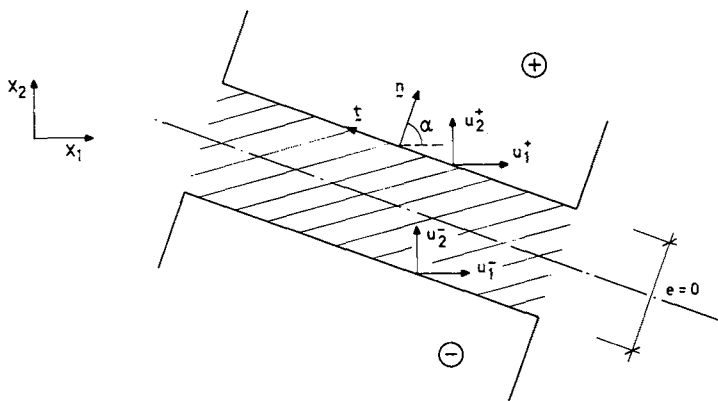


Figura 10. Deslocamentos nas faces positiva e negativa da interface.

O programa de elementos finitos desenvolvido também permite a modelação de um comportamento elasto-plástico do domínio Ω de acordo com a teoria endocrónica da plasticidade. As correspondentes contribuições de cada elemento finito plano para a equação (79) são da mesma natureza das contribuições dos elementos de interface acima indicadas¹⁰.

O problema semi-discreto a resolver é pois o seguinte: conhecidos os deslocamentos nodais \mathbf{q} (e, conseqüentemente o vector dos deslocamentos relativos na interface \mathbf{w}), o vector das tensões \mathbf{t} , o tempo intrínseco z e as grandezas materiais Q_r e P_i em todos os pontos de integração de todos os elementos de interface, determinar um vector de deslocamentos incrementais $d\mathbf{q}$ tal que se verifica a equação incremental de equilíbrio (79) e se verificam as equações (18), (19) e (20) em todos os pontos de integração de todos os elementos $\Gamma_w^{(e)}$.

Técnica numérica para resolução do problema

O problema discreto a resolver obtém-se aproximando os incrementos infinitesimais das equações a resolver por diferenças finitas ascendentes em que os valores de \mathbf{K} , $\Delta\mathbf{F}^{pl}$, a_0 , a_1 , a_2 , Q_r e P_i utilizados num dado passo são calculados com as propriedades materiais obtidas no final do passo anterior. Dada a não linearidade destas equações é necessário um processo iterativo para as resolver.

Assim, para cada incremento das forças aplicadas, obtém-se inicialmente os incrementos dos deslocamentos nodais $\Delta\mathbf{q}$ admitindo que a resposta é elástica, isto é, admitindo que $\Delta z = 0$ e que, conseqüentemente, $\Delta\mathbf{F}^{pl} = 0$ em (79). A partir destes valores calculam-se as deformações em cada um dos pontos de integração de cada elemento, obtendo-se seguidamente o incremento de tempo intrínseco Δz em cada um desses pontos por resolução da equação quadrática (18). Esta equação fornece duas raízes que são reais para incrementos suficientemente pequenos³. Dessas raízes reais apenas uma é positiva³ sendo essa a adoptada já que, atendendo à definição de dz , é a única que tem significado físico. Conhecido Δz calcula-se $\Delta\mathbf{F}^{pl}$ e resolve-se novamente a equação (79) obtendo-se novos incrementos de deslocamentos nodais $\Delta\mathbf{q}$. O processo iterativo continua até que um critério de convergência previamente definido¹⁰ indique que se atingiu o equilíbrio e se satisfaz a equação quadrática (18). Nessa altura actualizam-se as propriedades materiais Q_r e P_i (equações (19) e (20)), as tensões e as deformações (deslocamentos relativos) na interface e repete-se o processo para um novo incremento das forças aplicadas.

A matriz das "constantes elásticas" \mathbf{D} não é modificada durante o processo iterativo, o que corresponde ao método da "tensão inicial" utilizado em plasticidade clássica.

Exemplo 1: Coluna com uma junta

O programa de elementos finitos desenvolvido foi testado aplicando-o à resolução de um problema simples cuja solução analítica é conhecida¹⁸. O problema consiste na determinação da carga última de uma coluna contida por um material com comportamento elástico linear a qual contém uma junta inclinada, sem espessura e de fraca resistência. Admitindo que a resistência ao corte da interface é puramente coesiva e que a coluna tem um área unitária, a carga última será dada por¹⁸

$$P_{ult} = \frac{c'}{\text{sen} \alpha \cos \alpha} \quad (86)$$

em que c' é a coesão da interface e α é a sua inclinação. O comportamento constitutivo da interface foi aproximado utilizando a teoria endocrónica da plasticidade. Admitiu-se que o comportamento normal da interface é elástico linear, com uma grande rigidez normal, tendo-se adoptado a seguinte relação entre a rigidez elástica normal da interface e o módulo de compressibilidade do material constituinte da coluna

$$(K_N^e)_{\text{interface}} / (K)_{\text{meio}} = 100 \text{ m} . \quad (87)$$

O comportamento teórico da interface ao corte é puramente coesivo tendo-se adoptado uma coesão $c' = 1 \text{ KN/m}^2$. Esse comportamento foi aproximado utilizando a teoria endocrónica da plasticidade e as seguintes propriedades materiais¹⁰:

$$K_N^e = 100 \text{ 000 KN/m} \quad (88)$$

$$K_T^e = 100 \text{ 000 KN/m} \quad (89)$$

$$F_T = 1.0 \quad (90)$$

$$\rho(z_T) = 50 \text{ 000 } e^{-80 \text{ 000} z_T} + 100 \text{ 000 } e^{-270 \text{ 000} z_T} . \quad (91)$$

A análise do problema pelo método dos elementos finitos foi realizada utilizando a malha representada na Figura 11 para três valores diferentes da inclinação da interface ($\alpha = 10^\circ$, $\alpha = 20^\circ$ e $\alpha = 30^\circ$). Para cada caso o carregamento axial foi aumentado incrementalmente e o correspondente incremento de deslocamento axial no topo da coluna foi calculado. Na Figura 12 apresentam-se os resultados obtidos nos três casos. O cálculo termina quando em dado passo de carga o processo iterativo não converge. O último ponto representado em cada curva corresponde ao último passo para o qual o processo iterativo ainda converge. Como se pode observar, o valor calculado de P_{ult} praticamente coincide em todos os casos com o valor teórico dado por (86).

Exemplo 2: Tubo enterrado num meio elástico

Como exemplo de aplicação do programa de elementos finitos estuda-se a distribuição de tensões numa interface entre um tubo metálico e o meio elástico onde o mesmo está inserido (Figura 13) e comparam-se os resultados numéricos obtidos com os resultados de Desai¹⁹ e com a solução exacta do mesmo problema no caso particular de não existir deslizamento ao longo da interface¹⁹.

Admite-se que o solo é um meio homogéneo e elástico linear e que o material constituinte do tubo tem também um comportamento elástico linear. As respectivas propriedades são¹⁹:

Solo:

módulo de elasticidade	$E_s = 3000 \text{ psi (20.670 MPa)}$
coeficiente de Poisson	$v_s = 0.333$ (92)

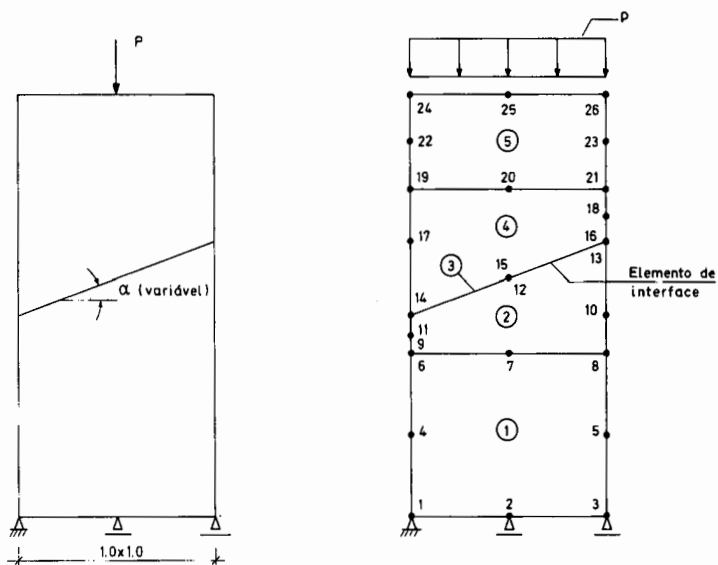


Figura 11. Geometria e malha de elementos finitos.

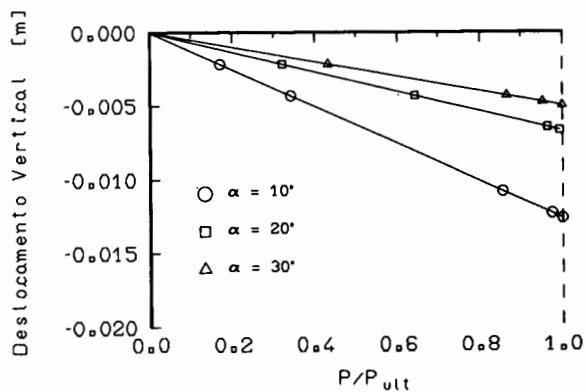


Figura 12. Evolução do deslocamento vertical no topo da coluna.

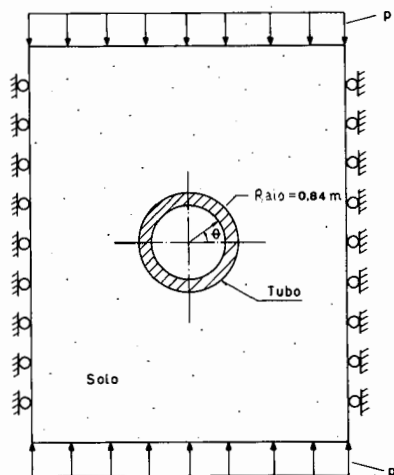


Figura 13. Tubo enterrado.

Tubo:

$$\begin{aligned} E_t &= 2.2 \times 10^6 \text{ psi (15.2 GPa)} \\ v &= 0.25 . \end{aligned} \tag{93}$$

Desai considerou dois casos diferentes de atrito na interface correspondentes a, respectivamente: (i) ausência de deslizamento; (ii) ocorrência de deslizamento com atrito. Para os representar utilizou o critério de Coulomb para definir a ocorrência de deslizamento

$$|\tau| = |\sigma| \text{tg}\phi \tag{94}$$

e dois valores diferentes para $\text{tg}\phi$, respectivamente,

$$\text{tg}\phi = 2.0 \tag{95}$$

$$\text{tg}\phi = 0.25 . \tag{96}$$

Considerou ainda que o comportamento da interface sob solicitações normais era elástico linear com um coeficiente de rigidez igual a

$$K_N^e = 10000 \text{ psi/in} , \tag{97}$$

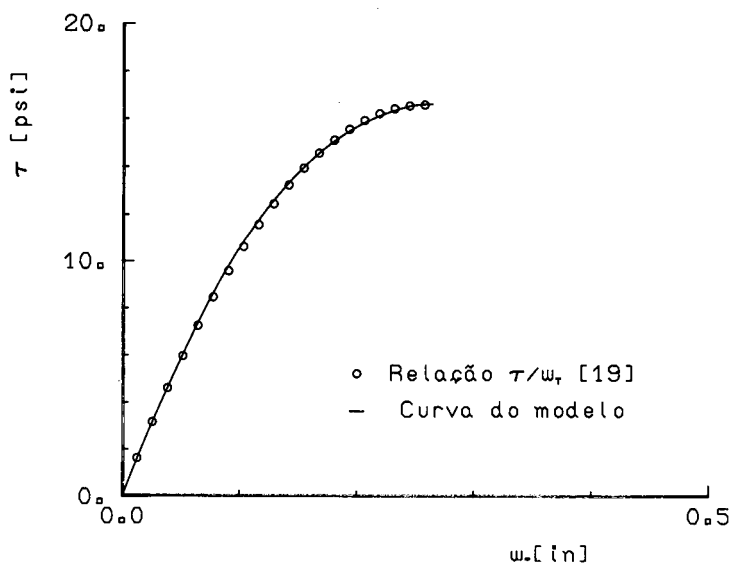


Figura 14. Aproximação do comportamento ao corte idealizado para a interface.

e idealizou um modo de deformação da interface ao corte (Figura 14) que, pela teoria endocrónica, pode ser aproximado através do coeficiente de rigidez

$$K_T^e = 128.8 \text{ psi/in} , \tag{98}$$

do núcleo $\rho(z_T)$

$$\rho(z_T) = 227e^{-25 z_T} + 1000e^{-170 z_T} + 5283e^{-3000 z_T} , \quad (99)$$

e das funções de endurecimento F_T

i) primeira situação: ausência de deslizamento

$$F_T = 0.12056\sigma , \quad (100)$$

ii) segunda situação: ocorrência de deslizamento com atrito

$$F_T = 0.01507\sigma . \quad (101)$$

Na Figura 15 representa-se a malha de elementos finitos utilizada na análise deste problema. Nesta análise desprezou-se o peso do solo e do tubo.

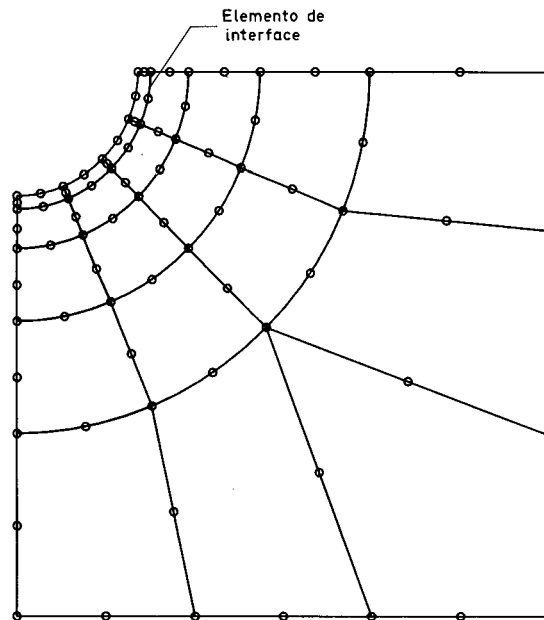


Figura 15. Malha de elementos finitos.

Nas Figuras 16 e 17 representam-se os valores de, respectivamente, σ/p e τ/p em função do ângulo θ medido no sentido anti-horário a partir do eixo vertical. Com o aumento do carregamento estes valores tendem, em cada ponto, para um valor constante. Nas mesmas figuras comparam-se estes resultados com os obtidos por Desai¹⁹ que utilizou o método dos elementos finitos e o seu elemento de junta com espessura¹⁹ e com os obtidos por Katona¹⁹ que utilizou elementos finitos de interface mistos. Possibilita-se ainda a comparação com a solução exacta do problema obtida por Burns e Richards e reproduzida em¹⁹ para o caso de existir uma aderência perfeita

- Solução exacta [19]
 - - Solução por elementos finitos de DESAI e de KATONA [19]
 - o Solução por elementos finitos
 - Solução por elementos finitos de DESAI [19]
 - - - Solução por elementos finitos de KATONA [19]
 - Δ Solução por elementos finitos
- } $\tan\phi=2.0$
- } $\tan\phi=0.25$

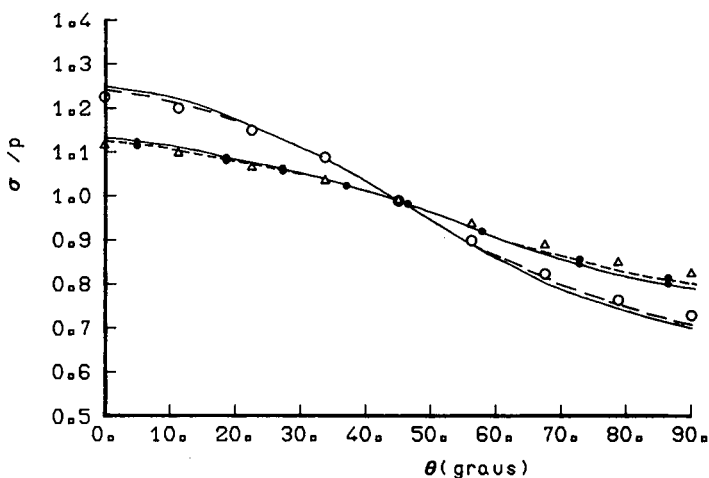


Figura 16. σ/p em função de θ .

- Solução exacta [19]
 - Solução por elementos finitos de DESAI e de KATONA [19]
 - o Solução por elementos finitos
 - Solução por elementos finitos de DESAI [19]
 - - - Solução por elementos finitos de KATONA [19]
 - Δ Solução por elementos finitos
- } $\tan\phi=2.0$
- } $\tan\phi=0.25$

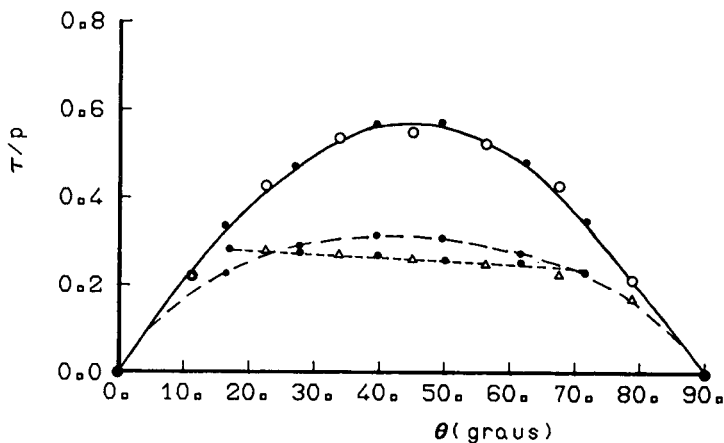


Figura 17. τ/p em função de θ .

no contacto entre o tubo e o solo. Em ambas as situações (i) e (ii) se verifica que os resultados obtidos são próximos dos apresentados por Desai em¹⁹ e dos obtidos por Katona e reproduzidos em¹⁹. Os resultados obtidos na primeira situação são próximos da solução exacta de Burns e Richards.

CONCLUSÕES

Neste artigo aplicou-se a teoria endocrónica de plasticidade desenvolvida por Valanis à modelação do comportamento mecânico de interfaces. As comparações efectuadas neste trabalho e em²⁰ entre resultados experimentais e resultados fornecidos pelo modelo endocrónico mostram que este modelo fornece, de um modo geral, boas aproximações para o comportamento mecânico de interfaces. Apresentaram-se também alguns aspectos da resolução pelo método dos elementos finitos de problemas planos em que o comportamento dos materiais e das interfaces em presença seja regido pelas leis constitutivas da teoria endocrónica da plasticidade. Nos exemplos testados neste artigo e em¹⁰ obtiveram-se bons resultados, o que permite encarar com boas perspectivas a aplicação do modelo e do programa desenvolvido a situações mais complexas.

REFERÊNCIAS

1. K.C. Valanis, "A Theory of Viscoplasticity Without a Yield Surface, Part I-General Theory", *Archives of Mechanics*, Vol. 23, pp. 517-533, (1971).
2. K.C. Valanis, "A Theory of Viscoplasticity Without a Yield Surface, Part II-Application to the Mechanical Behavior of Metals", *Archives of Mechanics*, Vol. 23, pp. 535-551, (1971).
3. K.C. Valanis e H.E. Read, "An Endochronic Plasticity Model for ISST Soils", S-CUBED, La Jolla, CA, Report no SSS-R-88-9375, (1988).
4. K.C. Valanis e H.E. Read, "An Endochronic Plasticity Theory for Concrete", S-CUBED, La Jolla, CA, Report no SSS-R-85-7172, (1984).
5. G.W. Clough e J.M. Duncan, "Finite Element Analyses of Retaining Wall Behavior", *J. of Soil Mechanics and Foundation Div. ASCE*, Vol. 97, pp. 1657-1673, (1971).
6. C.S. Desai, E.C. Drumm e M.M. Zaman, "Cyclic Testing and Modelling of Interfaces", *J. of Geotech. Eng. Div. ASCE*, Vol. 111, pp. 793-815, (1985).
7. C.S. Desai e B.K. Nagaraj, "Modelling for Cyclic Normal and Shear Behavior of Interfaces", *J. of Geotech. Eng. Div. ASCE*, Vol. 114, pp. 1198-1217, (1988).
8. C.S. Desai, S. Somasundaram e G. Frantziskonis, "A Hierarchical Approach for Constitutive Modelling of Geologic Materials", *Int. J. Num. Anal. Meth. in Geomech.*, Vol. 10, pp. 225-257, (1986).
9. R. Michalowski e Z. Mroz, "Associated and Non-Associated Sliding Rules in Contact Friction Problems", *Arch. of Mechanics*, Vol. 30, pp. 259-276, (1978).
10. F.M.F. Simões, "A Teoria Endocrónica da Plasticidade e a Modelação de Interfaces em Mecânica dos Solos", Tese de Mestrado, Universidade Técnica de Lisboa, Portugal, (1991).
11. K.C. Valanis e J.F. Peters, "An Endochronic Plasticity Theory With Shear-Volumetric Coupling", *Int. J. Num. Anal. Meth. in Geomech.*, Vol. 15, pp. 77-102, (1991).

12. F.B. Hildebrand, *"Introduction to Numerical Analysis"*, McGraw-Hill Book Company, New York, U.S.A., (1974).
13. K.C. Valanis e H.E. Read, Endochronic Plasticity: Basic Equations and Applications, *2nd Int. Congress on Constitutive Laws for Engineering Materials*, Tucson, Arizona, (1987).
14. J.M.M. Mateus da Silva, *"Modelação de Descontinuidades em Geotecnia"*, Tese de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa, Portugal, (1990).
15. J.S. Courtney-Pratt e E. Eisner, "The Effect of a Tangential Force on the Contact of Metallic Bodies", *Proc. Roy. Soc. Lond.*, Vol. **A238**, pp. 529-550, (1957).
16. F.P. Bowden e D. Tabor, *"The Friction and Lubrication of Solids, Part II"*, Clarendon Press, Oxford, U.K., (1964).
17. K.L. Woo e T.R. Thomas, "Contact of Rough Surfaces: A Review of Experimental Work", *Wear*, Vol. **58**, pp. 331-340, (1980).
18. D.V. Griffiths, "Numerical Modelling of Interfaces Using Conventional Finite Elements", *Fifth International Conference on Numerical Methods in Geomechanics*, Nagoya, (1985).
19. C.S. Desai, M.M. Zaman, J.G. Lightner e H.J. Siriwardane, "Thin Layer Elements for Interfaces and Joints", *Int. J. Num. Anal. Methods in Geomechanics*, Vol. **8**, pp. 19-43, (1984).
20. F.M.F. Simões e J.A.C. Martins, Modelling the Behavior of Metallic Interfaces With an Endochronic Plasticity Theory, Contact Mechanics International Symposium, Lausanne, (1992).