Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 9, 3, 313–324(1993)

FORMULACION VARIACIONAL DE PROBLEMAS DE CONTORNO PARA VIGAS TIMOSHENKO

R.O. GROSSI
y
A. ARANDA

Programa de Matemática Aplicada de Salta,
Facultad de Ciencias Tecnológicas,
Universidad Nacional de Salta, Buenos Aires 177,
Salta, Argentina

RESUMEN

Las computadoras digitales han permitido la resolución de problemas que hace años resultaban intratables. El excelente software matemático desarrollado por reconocidos especialistas constituye una formidable herramienta para el ingeniero. No obstante, su uso exclusivo independiente del tamaño del problema a resolver ocasiona una merma en la capacidad de manejo y desarrollo de fórmulas y métodos analíticos y disminuye la capacidad de resolución de problemas. Un procedimiento adecuado en la resolución de problemas debe basarse en el entendimiento y modelado del problema real. Para ello es fundamental la correcta formulación de problemas de contorno, de problemas de valores iniciales y problemas de autovalores. En este trabajo se presenta el planteo y aplicación de un funcional adecuado para obtener un modelo matemático que describa el comportamiento dinámico de vigas Timoshenko con condiciones de contorno generales. Además, se aplica el método de Rayleigh-Ritz para resolver un caso particular.

SUMMARY

Digital computers have made possible the solution of mathematical problems once considered intractable. The excellent mathematical software available constitutes a formidable tool for the engineer. Nevertheless, its exclusive use regardless of the size of the problem, causses loss of analytical skills and diminishes the problem solving capability. An adequate approach to problem solving must be based on understanding and modelling the real problem. For this it is fundamental the correct formulation of boundary value problems, initial value problems and eigenvalues problems. In this work, it is shown the construction and application of an adequate functional that yields the mathematical model which describes the dynamical behaviour of Timoshenko beams with general boundary conditions. Also, Rayleigh-Ritz method is applied in a particular case.

Recibido: Agosto 1992

 ISSN 0213–1315

INTRODUCCION

Los profesionales de la ingeniería, se enfrentan con problemas cada vez más complejos, que requieren una creciente preparación matemática y habilidad para aplicar distintos métodos matemáticos. El ingeniero debe hacer uso del excelente software numérico existente, pero el mismo debe ser usado con cuidado complementándose en muchos casos su uso con algún tipo de análisis (analítico o numérico o de otra índole), que permita dar seguridad a los valores numéricos proporcionados por la computadora. Por otra parte, no debe desecharse la enseñanza y el uso de métodos analíticos ya que el uso exclusivo de software numérico para resolver problemas provoca inconvenientes en el desarrollo de las capacidades de estudiantes de ingeniería. Numerosos especialistas desde varios años atrás vienen alertando sobre el tema, indicando que el uso generalizado de la computadora produce una merma en la capacidad de manejo y desarrollo de fórmulas y métodos analíticos, y una pérdida en la capacidad de discernimiento en la resolución de problemas[1–3].

Un procedimiento eficiente para resolver problemas, debe estar basado en un correcto entendimiento del problema original, y en la posibilidad de formular un modelo matemático adecuado. Esto implica el conocimiento de las limitaciones del modelo, y fundamentalmente la posibilidad de determinar si los valores numéricos obtenidos son confiables. La correcta formulación de problemas de contorno, problemas de valores iniciales y problemas de autovalores, constituye un paso esencial para la adecuada construcción de modelos matemáticos que permitan describir el comportamiento de los sistemas en estudio.

El cálculo de variaciones, constituye una formidable herramienta de uso en la física matemática, en la ingeniería, y en diversas áreas de las ciencias donde se aplica la matemática. En particular, el cálculo de variaciones permite obtener de una manera sistemática, rigurosa y eficaz a las ecuaciones diferenciales y a las correspondientes condiciones de contorno, que describen el comportamiento estático y/o dinámico de elementos estructurales como cuerdas, membranas, vigas y placas[4,5,6,7]. Con respecto a las vigas es ampliamente conocido que la teoría de Euler-Bernoulli, presenta dificultades para el análisis del comportamiento dinámico, cuando se consideran modos superiores de vibración o cuando las dimensiones de las secciones transversales no puedan ser despreciadas.

El profesor S. Timoshenko[8], formuló ecuaciones diferenciales que contemplan los efectos de los esfuerzos de corte y de inercia rotatoria. Este nuevo modelo matemático, fue objeto de estudio y aplicación por numerosos investigadores que generaron una tremenda cantidad de información, sobre el comportamiento de las denominadas vigas Timoshenko.

Numerosos textos y publicaciones científicas, presentan la formulación variacional de problemas de contorno y/o de autovalores, que corresponden a las vigas Timoshenko. No obstante, generalmente no figura tratado el caso de extremos elásticamente restringidos, que constituye un caso de importancia tanto en la teoría como en las aplicaciones[9].

En este trabajo se presentan los detalles de la construcción de un funcional adecuado para el problema a resolver, y el uso de un manejo algebraico que permite compactar a las expresiones analíticas y disminuir el trabajo analítico correspondiente.

El funcional construido es tal que al ser minimizado permite obtener el modelo matemático que describe el comportamiento estático y dinámico de vigas de Timoshenko con condiciones de contorno generales. Estas condiciones de contorno permiten contemplar como casos particulares a los distintos tipos de apoyos clásicos, es decir rígidamente empotrado, simplemente apoyado, deslizante y libre.

La formulación analítica de estas condiciones de contorno generales se obtiene al considerar que los extremos de la viga están elásticamente restringidos contra rotación y contra translación. La consideración de este tipo de vínculos permite contemplar como casos particulares a los apoyos clásicos mencionados y también permite tratar efectos de flexibilidad que son de importancia en la práctica.

FORMULACION DEL PROBLEMA VARIACIONAL Y OBTENCION DEL PROBLEMA DE CONTORNO CORRESPONDIENTE

Dado que en la teoríade vigas Timoshenko intervienen dos funciones que permiten describir el efecto de la inercia rotatoria y de los esfuerzos de corte, consideraremos un funcional que dependa de dos funciones u y v de dos variables. Teniendo en cuenta las expresiones de energías correspondientes y el Principio de Hamilton[4], planteamos el siguiente funcional, que debe ser extremizado:

$$\begin{aligned} I(u,v) = \int_{t_1}^{t_2}\int_{l_1}^{l_2} & F\{x_1, x_2, u(x_1,x_2), u_{x_1}(x_1,x_2), u_{x_2}(x_1,x_2), \\ & v(x_1,x_2), v_{x_1}(x_1,x_2), v_{x_2}(x_1,x_2)\}\, dx_1 dx_2 + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} C_1 u^2(l_1,x_2) + C_2 u^2(l_2,x_2) + \\ & + D_1 v^2(l_1,x_2) + D_2 v^2(l_2,x_2)\} dx_2 \end{aligned} \tag{1}$$

donde $x_1 \in [l_1, l_2]$, $x_2 \in [t_1, t_2]$, y l_1, l_2, t_1, t_2 son constantes. La integral doble corresponde a la energía de deformación de la viga mientras que la integral simple corresponde a las energías de deformación de los vínculos rotacionales y translacionales.

El funcional (1) depende de las funciones u y v y de sus derivadas parciales de primer orden.

Supongamos que el integrando F admite derivadas primera y segunda continuas, en el dominio de integración $D = [l_1, l_2] \times [t_1, t_2]$, con respecto a todos sus argumentos. Además, suponemos que u y v son continuas en D, junto con sus derivadas de primer y segundo orden.

Vamos a calcular la variación de (1) que corresponde a la transformación de las funciones admisibles u y v, en las nuevas funciones $\overline{u}$ y $\overline{v}$, de acuerdo a:

$$\overline{u}(x_1,x_2) = u(x_1,x_2) + \xi\varphi(x_1,x_2) \qquad \overline{v}(x_1,x_2) = v(x_1,x_2) + \xi\eta(x_1,x_2) \tag{2}$$

donde ξ es un parámetro arbitrario y tanto φ como η satisfacen las mismas hipótesis de continuidad que u y v. La variación funcional (1) correspondiente a las transformaciones (2) es la parte principal lineal en ξ, del incremento $\Delta I = I(\overline{u},\overline{v}) - I(u,v)$. Si se agrupan términos y se utiliza el signo de sumación se compacta la expresión analítica de ΔI, resultando:

$$\begin{aligned}\Delta I = \int_{t_1}^{t_2}\int_{l_1}^{l_2} & \{F[x_1, x_2, u+\xi\varphi, \ldots, u_{x_2}+\xi\varphi_{x_2}, v+\xi\eta, \ldots, v_{x_2}+\xi\eta_{x_2}] \\ & -F[x_1, x_2, u, \ldots, u_{x_2} v, \ldots, v_{x_2}]\}\, dx_1 dx_2 + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{2} \Big\{C_i \left[(u(l_i, x_2) + \xi\varphi(l_i, x_2))^2 - u^2(l_i, x_2)\right] + \\ & + D_i \left[(v(l_i, x_2) + \xi\eta(l_i, x_2))^2 - v^2(l_i, x_2)\right]\Big\}\, dx_2\end{aligned}$$

La variación δI de (1) se puede obtener al aplicar el desarrollo de Taylor y eliminar los términos de orden superior a ξ. Entonces es:

$$\begin{aligned}\delta I = \xi \int_{t_1}^{t_2}\int_{l_1}^{l_2} & \left[F_u\varphi + F_v\eta + \sum_{i=1}^{2}\left(F_{u_{x_i}}\varphi_{x_i} + F_{v_{x_i}}\eta_{x_i}\right)\right] dx_1 dx_2 + \\ & +2\xi \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{2} \{C_i\, [u(l_i, x_2)\varphi(l_i, x_2)] + \\ & + D_i[v(l_i, x_2)\eta(l_i, x_2)]\}\, dx_2 \end{aligned} \tag{3}$$

Debemos ahora transformar los términos del integrando de (3), que contienen los factores φ_{x_i} y η_{x_i}. Para ello consideremos las siguientes fórmulas

$$\frac{\partial(F_{u_{x_i}}\varphi)}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial F_{u_{x_i}}}{\partial x_i}\right)\varphi + F_{u_{x_i}}\varphi_{x_i} \tag{4}$$

$$\frac{\partial(F_{v_{x_i}}\eta)}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial F_{v_{x_i}}}{\partial x_i}\right)\eta + F_{v_{x_i}}\eta_{x_i} \tag{5}$$

Reemplazando en (3) a $F_{u_{x_i}}\varphi_{x_i}$ y $F_{v_{x_i}}\eta_{x_i}$, por las expresiones obtenidas de (4) y (5), resulta:

$$\begin{aligned}\delta I =\xi \int_{t_1}^{t_2}\int_{l_1}^{l_2} & \Bigg\{F_u\varphi + F_v\eta \\ & + \sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\partial(F_{u_{x_i}}\varphi)}{\partial x_i} - \left(\frac{\partial F_{u_{x_i}}}{\partial x_i}\right)\varphi + \frac{\partial(F_{v_{x_i}}\eta)}{\partial x_i} - \left(\frac{\partial F_{v_{x_i}})}{\partial x_i}\right)\eta\right]\Bigg\} dx_1 dx_2 + \\ & + 2\xi \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{2} \{C_i[u(l_i, x_2)\varphi(l_i, x_2)] + \\ & + D_i[v(l_i, x_2)\eta(l_i, x_2)]\}\, dx_2\end{aligned}$$

Al agrupar términos resulta:

$$\delta I = \xi \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \int_{l_1}^{l_2} \left[\left(F_u - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F_{u_{x_i}}}{\partial x_i} \right) \varphi + \left(F_v - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F_{v_{x_i}}}{\partial x_i} \right) \eta \right] dx_1 dx_2 + \right.$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{l_1}^{l_2} \sum_{i=1}^{2} \left[\frac{\partial [F_{u_{x_i}} \varphi]}{\partial x_i} + \frac{\partial [F_{v_{x_i}} \eta]}{\partial x_i} \right] dx_1 dx_2 +$$

$$\left. +2 \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{2} \{ C_i [u(l_i, x_2) \varphi(l_i, x_2)] + D_i [v(l_i, x_2) \eta(l_i, x_2)] \} \, dx_2 \right\} \quad (6)$$

Si en la segunda integral de (6) aplicamos la regla de Barrow resulta:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{l_1}^{l_2} \sum_{i=1}^{2} \left[\frac{\partial (F_{u_{x_i}} \varphi)}{\partial x_i} + \frac{\partial (F_{v_{x_i}} \eta)}{\partial x_i} \right] dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{2} \left[(-1)^i \left(F_{u_{x_1}} \varphi(l_i, x_2) + F_{v_{x_1}} \eta(l_i, x_2) \right) \right] dx_2 +$$

$$+ \int_{l_1}^{l_2} \sum_{i=1}^{2} \left[(-1)^i \left(F_{u_{x_2}} \varphi(x_1, t_i) + F_{v_{x_2}} \eta(x_1, t_i) \right) \right] dx_1 \quad (7)$$

Vamos a considerar que las funciones $u(x_1, x_2)$ y $v(x_1, x_2)$ no sufren variación en los puntos t_1 y t_2, esto es:

$$\varphi(x_1, t_1) = 0, \ \varphi(x_1, t_2) = 0, \ \eta(x_1, t_1) = 0, \ \eta(x_1, t_2) = 0 \qquad \forall x_1 \in [l_1, l_2]$$

De esta manera, la segunda de las integrales del segundo miembro de la expresión (7), es nula. Luego (6) se transforma en:

$$\delta I = \xi \{ \int_{t_1}^{t_2} \int_{l_1}^{l_2} \left[\left(F_u - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F_{u_{x_i}}}{\partial x_i} \right) \varphi + \right.$$

$$+ \left(F_v - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F_{v_{x_i}}}{\partial x_i} \right) \eta \,] \, dx_1 dx_2 +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{2} [\left((-1)^i F_{u_{x_1}} + 2 C_i u(l_i, x_2) \right) \varphi(l_i, x_2) +$$

$$+ \left((-1)^i F_{v_{x_1}} + 2 D_i v(l_i, x_2) \right) \eta(l_i, x_2) \,] \, dx_2 \ \} \quad (8)$$

Dado que buscamos la función que hace estacionario al funcional (1), debemos igualar a cero la expresión (8).

Supongamos en primer lugar que las funciones incrementos φ y η son tales que:

$$\varphi(l_1,x_2)=\varphi(l_2,x_2)=\ \eta(l_1,x_2)=\ \eta(l_2,x_2)=0 \qquad \forall x_2\in[t_1,t_2] \tag{9}$$

Es evidente que si δI se anula para todas las funciones admisibles $\varphi(x_1,x_2)$ y $\eta(x_1,x_2)$ entonces se anulará para aquellas que verifiquen la condición adicional (9). Si las condiciones (9) valen, entonces de (8) resulta:

$$\begin{aligned}\delta I=\xi\int_{t_1}^{t_2}\int_{l_1}^{l_2}&\left[\left(F_u-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial F_{u_{x_i}}}{\partial x_i}\right)\varphi+\right.\\&+\left.\left(F_v-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial F_{v_{x_i}}}{\partial x_i}\right)\eta\right]dx_1dx_2\end{aligned} \tag{10}$$

Si igualamos (10) a cero y tenemos en cuenta que tanto el intervalo $[t_1,t_2]$ como las funciones admisibles $\varphi(x_1,x_2)$, $\eta(x_1,x_2)$, son arbitrarias; de la aplicación del Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones[7], resultan las siguientes ecuaciones de diferenciales:

$$F_u-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial F_{u_{x_i}}}{\partial x_i}=0 \tag{11}$$

$\forall\ x_1\ \in\ [l_1,l_2]$ y $\forall\ x_2$.

$$F_v-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial F_{v_{x_i}}}{\partial x_i}=0 \tag{12}$$

Las ecuaciones (11) y (12) son las ecuaciones de Euler que corresponden al funcional (1).

Si ahora eliminamos a las condiciones (9), pero tenemos en cuenta que u y v deben satisfacer a las ecuaciones (11) y (12), la expresión (8) se transforma en:

$$\begin{aligned}\delta I=\xi\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{2}&\Big[\Big((-1)^iF_{u_{x_1}}+2C_iu(l_i,x_2)\Big)\varphi(l_i,x_2)+\\&+\Big((-1)^iF_{v_{x_1}}+2D_iv(l_i,x_2)\Big)\eta(l_i,x_2)\Big]dx_2\end{aligned} \tag{13}$$

Si (13) se iguala a cero, teniendo en cuenta que $[t_1,t_2]$ es arbitrario y a su vez que $\varphi(l_1,x_2)$, $\varphi(l_2,x_2)$, $\eta(l_1,x_2)$ y $\eta(l_2,x_2)$, son funciones admisibles arbitrarias, resultan las expresiones:

$$\Big[(-1)^iF_{u_{x_1}}+2C_iu(l_i,x_2)\Big]=0 \tag{14}$$

$i=1,2$

$$\Big[(-1)^i F_{v_{x_1}} + 2D_i v(l_i, x_2)\Big] = 0 \tag{15}$$

Las expresiones (14) y (15) constituyen las condiciones de contorno del problema. En conclusión el problema variacional planteado, que consiste en hallar un extremo para el funcional (1) es equivalente al problema de contorno constituido por las ecuaciones diferenciales (11) y (12) y las correspondientes condiciones de contorno (14) y (15).

FORMULACION DE UN PROBLEMA DE CONTORNO Y DE AUTOVALORES PARA VIGAS TIMOSHENKO

El principio de Hamilton, aplicado al problema de vibraciones transversales de vigas, cuando los efectos de inercia rotatoria y corte son tenidos en cuenta viene expresado por la variación del siguiente funcional[4,9].

$$2I = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \Big\{ \left[\rho I \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 + \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right] -$$

$$-EI\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 - KGA\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi\right)^2 + 2Qw \Big\}\, dxdt-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\left\{k_1\psi^2(0,t) + k_2\psi^2(l,t) + K_1 w^2(0,t) + K_2 w^2(l,t)\right\}dt \tag{16}$$

donde es:

w: la función que describe los desplazamientos laterales de la viga.
ψ: la función que describe las rotaciones de segmentos paralelos a la línea neutra, por acción de la flexión.
K: coeficiente de corte.
ρ: densidad del material de la viga.
A: área de la sección transversal de la viga.
I: momento de inercia de la sección respecto al eje neutro.
E: módulo de Young.
G: módulo de corte.
q: carga transversal aplicada.
k_1 y k_2: coeficientes de rigidez rotacional.
K_1 y K_2: coeficientes de rigidez translacional.

El funcional (16) es un caso particular del funcional general (1) planteado en el apartado anterior, dado que es:

$$F = F[x, t, \psi(x,t), \psi_x, \psi_t, w(x,t), w_x, w_t] =$$

$$= 0.5\{\rho I\psi_t^2 + \rho A w_t^2 - EI\psi_x^2 - KGA(w_x - \psi)^2 + 2Qw\} \tag{17}$$

Condición en el extremo	Coeficientes de rigidez o flexibilidad	Expresiones analíticas en $x = 0$ y $x = 1$
Simplemente apoyado	$\eta_1 = 0$ $\eta_2 = 0$ $k_1 = 0$ $k_2 = 0$	$\psi_x(x,t) = 0$ $w(x,t) = 0$
Rígidamente empotrado	$\eta_1 = 0$ $\eta_2 = 0$ $\phi_1 = 0$ $\phi_2 = 0$	$\psi(x,t) = 0$ $w(x,t) = 0$
Libre	$k_1 = 0$ $k_2 = 0$ $K_1 = 0$ $K_2 = 0$	$\psi_x(x,t) = 0$ $w_x(x,t) - \psi(x,t) = 0$
Deslizante	$\phi_1 = 0$ $\phi_2 = 0$ $K_1 = 0$ $K_2 = 0$	$\psi(x,t) = 0$ $w_x(x,t) - \psi(x,t) = 0$

Tabla I

$$
\begin{array}{llll}
u(x_1,x_2) = \psi(x,t) & [l_1,l_2] = [0,1] & C_1 = -k_1/2 & D_1 = -K_1/2 \\
v(x_1,x_2) = w(x,t) & [t_1,t_2] = [t_1,t_2] & C_2 = -k_2/2 & D_2 = -K_2/2 \\
(x_1,x_2) = (x,t) & & &
\end{array}
$$

El reemplazo de F y sus derivadas en (11) y (12), conduce a la obtención de las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de la viga cuando ejecuta vibraciones transversales. Así es:

$$KGA(w_x - \psi) + \frac{\partial(EI\psi_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho I\psi_t)}{\partial t} = 0 \tag{18}$$

$$Q + \frac{\partial[KGA(w_x - \psi)]}{\partial x} - \frac{\partial(\rho A w_t)}{\partial t} = 0 \tag{19}$$

Por otra parte, de (14) y (15) resultan las condiciones de contorno que describen a los distintos tipos de vínculos, que la viga puede poseer en los extremos:

$$k_1\psi(0,t) = EI\psi_x(0,t) \tag{20}$$

$$k_2\psi(l,t) = -EI\psi_x(l,t) \tag{21}$$

$$K_1 w(0,t) = KGA[w_x(0,t) - \psi(0,t)] \tag{22}$$

$$K_2 w(l,t) = -KGA[w_x(l,t) - \psi(l,t)] \tag{23}$$

Para vigas de sección uniforme las ecuaciones (18) y (19) se transforman en:

$$KGA(w_x - \psi) + EI\psi_{xx} - \rho I\psi_{tt} = 0 \tag{24}$$

$$Q + KGA(w_{xx} - \psi_x) - \rho A_{tt} = 0 \tag{25}$$

Las ecuaciones (18) y (19), junto con las condiciones de contorno (20)-(23) constituyen el problema de contorno y autovalores que describe el comportamiento dinámico de las vigas Timoshenko.

ANALISIS DE LAS DISTINTAS CONDICIONES DE CONTORNO

El funcional (16) contiene términos que corresponden a la energía almacenada en los vínculos de los extremos. Debido a esto, en las correspondientes condiciones de contorno figuran los coeficientes k_1, k_2, K_1, K_2 que representan a las rigideces rotacionales y translacionales. Este planteo general permite contemplar todas las condiciones de apoyo clásicas. En la Tabla I se muestran los valores que deben tomar los coeficientes de rigidez o sus recíprocos, para obtener las distintas condiciones de contorno, así como las expresiones analíticas correspondientes. Se usó la siguiente notación $\eta_1 = K_1^{-1}$, $\eta_2 = K_2^{-1}$, $\phi_1 = k_1^{-1}$, $\phi_2 = k_2^{-1}$.

EJEMPLO DE APLICACION

Una aplicación de interés en la ingeniería surge del análisis del comportamiento dinámico de vigas Timoshenko. Consideremos una viga de espesor constante cuyos extremos están elásticamente restringidos contra rotación. Es conveniente expresar a las ecuaciones diferenciales (24) y (25) en términos de una sola de las variables w o ψ. Para ello, derivamos respecto a la variable x en (24):

$$KGA(w_{xx} - \psi_x) + EI\psi_{xxx} - \rho I\psi_{xtt} = 0 \tag{26}$$

Si despejamos ψ_x de (25) y reemplazamos en (26) resulta:

$$\begin{aligned} &EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I(1 + \frac{E}{KG})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \\ &+ (\frac{\rho^2 I}{KG})\frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = Q + (\frac{\rho I}{KGA})\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} - (\frac{EI}{KGA})\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \end{aligned} \tag{27}$$

Con un procedimiento similar se obtiene una expresión análoga en la variable ψ.

A efectos de desarrollar un algoritmo simple, que permita obtener valores del coeficiente de frecuencia fundamental, vamos a aplicar el método de Rayleigh-Ritz con una expresión polinómica como función aproximante. Para modos normales de vibración es:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= W(x) \text{ sen } wt \\ \psi(x,t) &= \Psi(x) \text{ sen } wt \end{aligned}$$

con lo cual el problema de contorno se independiza del tiempo. Al igualar la expresión de la energía de deformación máxima del sistema mecánico en estudio y la energía cinética máxima de la viga, para formar el cociente de Rayleigh resulta el siguiente funcional:

$$2I(\Psi, W) = \int_0^l \left[\rho w^2 I\Psi^2 + \rho A w^2 W^2 - EI\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 - \right.$$

$$-KGA\left(\frac{\partial W}{\partial x}-\Psi\right)^2\Bigg]\,dx-[k_1\Psi^2(0)+k_2\Psi^2(l)] \tag{28}$$

Consideremos el siguiente cambio de variables:

$$W(x)=W_f(x)+W_c(x),\ \Psi(x)=\frac{dW_f(x)}{dx},$$

$$\theta_c(x)=\frac{dW_c(x)}{dx},\ \frac{dW(x)}{dx}=\Psi(x)+\theta_c(x),\ \overline{x}=\frac{x}{l},$$

$$r=\sqrt{\frac{I}{A}},\ \overline{k}_i=\frac{k_i l}{EI},\ i=1,2,\ \gamma=\frac{KG}{E},\ \Omega=\sqrt{\frac{\rho A}{EI}}wl^2$$

donde es:

$W_f(x)$	: deflexión debida a la acción de la flexión.
$W_c(x)$	: deflexión debida a la acción de los esfuerzos de corte.
$\theta_c(x)$	: ángulo de rotación por efecto de los esfuerzos de corte.
Ω	: coeficiente de frecuencia fundamental.

De esta forma el funcional (28) se transforma en:

$$2I(W_f,W_c)=\int_0^1\left[-\Omega^2(\frac{r}{l})^2(\frac{dW_f}{dx})^2-\Omega^2(W_f(x)+W_c(x))^2+\right.$$

$$\left.+(\frac{d^2W_f}{dx^2})^2+\gamma(\frac{l}{r})^2(\frac{dW_c}{dx})^2\right]d\overline{x}+$$

$$+[\overline{k}_1\left(\frac{dW_f(0)}{dx}\right)^2+\overline{k}_2\left(\frac{dW_f(1)}{dx}\right)^2 \tag{29}$$

Las condiciones de contorno quedan expresadas de la siguiente manera:

$$\overline{k}_1\frac{dW_f}{dx}(0)=\frac{d^2W_f}{dx^2}(0) \tag{30}$$

$$\overline{k}_2\frac{dW_f}{dx}(1)=\frac{d^2W_f}{dx^2}(1) \tag{31}$$

$$W(0)=0,\ W(1)=0 \tag{32}$$

Consideremos las siguientes funciones aproximantes:

$$W_f(x)=A_f\sum_{i=1}^{4}a_i\overline{x}^i,\qquad W_c(x)=A_c\sum_{i=1}^{4}b_i\overline{x}^i \tag{33}$$

donde:
A_f y A_c son las correspondientes amplitudes y los coeficientes a_i y b_i se determinan de las condiciones de contorno (30)-(32). Si se reemplazan las expresiones (33) en el funcional (29) y se minimiza el correspondiente cociente de Rayleigh, respecto a los coeficientes A_f y A_c, se obtiene la ecuación de frecuencias. La Tabla II contiene valores del coeficiente de frecuencia fundamental Ω para distintos valores de la relación r/l y para dos tipos de apoyos en los extremos. Los valores de k_1 y k_2 que deben adoptarse en las condiciones de contorno (30) y (31) se obtienen de la Tabla I. A efectos de establecer una comparación de valores numéricos, se incluyen los valores de referencia [14]. Dicha comparación permite concluir que el uso del método de Rayleigh-Ritz con las expresiones (33) como funciones aproximantes, permite obtener un algoritmo que proporciona valores con una buena precisión desde el punto de vista práctico y que se caracteriza por una notable simplicidad tanto en el trabajo analítico como en el numérico.

r/l	Extremos rígidamente empotrados		Extremos simplemente apoyados	
	(I)	(II)	(I)	(II)
0.01	22.26		9.85	
0.02	21.74		9.79	
0.04	19.99	19.93	9.57	9.57
0.06	17.85		9.24	
0.08	15.77	15.74	8.84	8.84
0.10	13.93		8.40	
0.12	12.38	12.37	7.96	7.96

Tabla II. Valores del coeficiente de frecuencia fundamental $\Omega = \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} w l^2$, en función de la relación r/l $s = (\sqrt{\frac{E}{KG}})r$, $K = 0.85$, $s = 1.7489r$, $\mu = 0.3$.
(I): valores obtenidos en el presente trabajo.
(II): valores de referencia [14].

CONCLUSIONES

Mediante el uso del cálculo de variaciones, se obtuvieron las ecuaciones diferenciales y las correspondientes condiciones de contorno, que describen el comportamiento dinámico de vigas Timoshenko, cuando sus extremos están elásticamente restringidos contra rotación y translación. Este problema es general y contempla como casos particulares a los tipos clásicos de apoyo en los extremos, que normalmente se tratan en los libros de texto. Además, constituye un modelo matemático que permite considerar efectos de flexibilidad en los extremos, hecho que en la práctica es de gran importancia, dado que las características teóricas de los distintos apoyos en realidad no se manifiestan con toda precisión. Así, por ejemplo un apoyo rígidamente empotrado puede ser difícil de lograr en la práctica, y el vínculo en realidad puede presentar algún tipo de flexibilidad. Por otra parte, la aplicación del método de Rayleigh-Ritz con funciones aproximantes polinómicas permitió obtener un algoritmo caracterizado por una gran simplicidad tanto desde el punto de vista analítico como del numérico.

AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan su agradecimiento a los revisores por sus importantes sugerencias. El presente trabajo se realizó con el apoyo del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina (PID Nro. 3-139000/88)

REFERENCIAS

1. O. Storasli, "On the role of minicomputers in structural design", *Computers and Structures*, **7**(1), pp. 117–123, (1977).
2. J. Swanson, "Use of minicomputers for large scale structural analysis programs", *Computers and Structures*, **7**(2), pp. 291–294, (1977).
3. P.A.A. Laura y R.O. Grossi, "Solving some structural dynamics problems using a pocket programable calculator", *International Journal of Mechanical Engineering Education*, **11**(2), pp. 179–187, (1983).
4. C. Dym and I. Shames, *"Solid Mechanics: a variational approach"*, McGraw Hill, New York, (1973).
5. L. Kantorovich and V. Krylov, "Approximate Methods of Higher Analysis", *Interscience*, New York, (1964).
6. R. Szilard, *"Theory and Analysis of Plates"*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., (1974).
7. I. Guelfand and S. Fomin, *"Calculus of Variations"*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., (1963).
8. S. Timoshenko, "On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars", *Philosophical Magazine*, **41**, pp. 744–746, (1921).
9. R. Grossi, "On the variational derivation of boundary-value problems in the dynamics of beams and plates", *International Journal of Mechanical Engineering Education*, **16**(1), pp. 57–63, (1988).
10. R. Grossi, "A note on boundary conditions in the study of beams and plates", *Journal of Sound and Vibration*, **24**(3), pp. 577–581, (1988).
11. S. Timoshenko, "On the transverse vibrations of bars of uniform cross sections", *Philosofical magazine*, **43**(6), pp. 125–131, (1922).
12. T. Huang, "Effect of rotatory inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with simple end conditions", Transaction of the ASME, *Journal of Applied Mechanics*, **28**(4), (1961).
13. R. Anderson, "Flexural vibrations in uniform beams according to the Timoshenko theory", *Journal of Applied Mechanics*, Trans. ASME, **75**, pp. 504–510, (1953).
14. G. Bhashyam and G. Prathap, "The second frequency spectrum of Timoshenko beams", *Journal of Sound and Vibration*, **76**(3), pp. 407–420, (1981).