

# MODELOS DE DAÑO CONCENTRADO PARA LA SIMULACION NUMERICA DEL COLAPSO DE PORTICOS PLANOS

JULIO FLOREZ LOPEZ

*Dpto. de Estructuras, Centro de Investigación y  
Proyectos en Simulación y Modelado,  
Facultad de Ingeniería, Universidad de los Andes,  
Mérida 5101, Venezuela.*

## RESUMEN

En este artículo se propone un método para el análisis no lineal de estructuras aporricadas basado en los conceptos de la Mecánica de la Degradación (Continuum Damage Mechanics). El método consiste en la introducción de un conjunto de variables internas, los índices de daño, que miden la pérdida de rigidez de cada una de las barras de la estructura. La dependencia de estas variables con respecto a la historia de deformaciones de cada barra se describe mediante las leyes de evolución de los índices de daño. El problema a resolver está constituido por las ecuaciones matriciales clásicas del cálculo de estructuras y las leyes de evolución.

## SUMMARY

In this paper an attempt is made to introduce the notions and methods of continuum damage mechanics into the analysis of framed structures. In order to characterize the state of damage of each element a new set of damage variables is introduced. The damage parameters measure the loss of stiffness of each bar. A set of damage evolution laws is introduced too, they characterize the dependence of the damage state on the loading history. This kind of nonlinear analysis have similar characteristics of those of the elastic frame analysis.

## INTRODUCCION

La mecánica de la degradación clásica (M.D.), iniciada por Kachanov<sup>1</sup>, fue formulada en el marco de la mecánica de los medios continuos. La idea fundamental es la introducción de una nueva variable interna que mide el estado de degradación local del material: el índice de daño. La idea de base es tan simple y al mismo tiempo tan general que ha podido ser aplicada al modelado del comportamiento, hasta la fractura local, de una gran variedad de materiales tanto dúctiles como frágiles (Ver por ejemplo la referencia [2]).

Recibido: Marzo 1991

Sin embargo el formalismo de la mecánica de los medios continuos no siempre es el más adecuado para el análisis de las estructuras de la construcción civil. Muchas estructuras suelen modelarse como pórticos o reticulados puesto que los modelos continuos bi o tridimensionales sólo pueden aplicarse al estudio de estructuras relativamente simples.

Este trabajo constituye una tentativa para introducir los métodos y las nociones de la M.D. en el análisis de estructuras aporticadas. El enfoque empleado es similar al de los modelos de plasticidad concentrada (Ver [3], [4] y las referencias allí citadas). Es decir, se considera que el comportamiento inelástico se concentra en los extremos de las barras o elementos que constituyen la estructura. Estos puntos se modelan como resorte de flexión.

En los artículos antes mencionados los resortes no lineales tienen un comportamiento rígido-plástico y no permiten por lo tanto la caracterización de la pérdida de rigidez de la barra debido a fenómenos degradantes tales como el agrietamiento. El objetivo fundamental de este trabajo es el de desarrollar una metodología que permita la simulación numérica de este fenómeno.

Las variables de daño que se obtienen de esta manera miden el estado de degradación de la barra que se convierte en la unidad fundamental ("el elemento de volumen") de la estructura. Estas variables se sitúan por lo tanto a un nivel intermedio entre la variable de daño continuo de la M.D. clásica y el índice de daño global de la estructura que definen algunos autores (ver por ejemplo [5]). En la referencia [5] se demuestra además una relación formal entre la variable de daño continuo y el índice de daño global propuesto. El índice de daño global es obtenido a fines de "evaluación de la estructura". En otras palabras, este índice permite cuantificar la resistencia de la estructura ante futuras solicitaciones.

El objetivo de este trabajo es diferente. Aquí se introducen variables de daño para la "simulación de la estructura" es decir, para la representación numérica del comportamiento de la estructura. Es por ello que las variables aquí definidas pueden considerarse como "variables internas" o "variables de estado".

Existen en la literatura otros modelos que incluyen la degradación de rigidez (ver por ejemplo [6,7,8]). La diferencia entre estos y el trabajo aquí presentado consiste en la expresa referencia a la M.D. clásica y a la termodinámica de medios continuos, en otras palabras: definición de variables de estado y sus fuerzas termodinámicas asociadas, formulación de leyes de estado, análisis de la disipación e identificación de leyes de evolución. De esta manera tal vez se obtenga una mayor generalidad y simplicidad en la formulación de los modelos.

En este artículo, a diferencia de los últimos tres citados, no se propone un modelo concreto para un material particular. Por el contrario se pretende desarrollar un marco teórico general en el que se pueda incluir cualquier modelo específico de daño.

## **MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA BARRA ELASTICA DEGRADABLE**

### **Ley de comportamiento de una barra elástica**

En el análisis elástico de pórticos y reticulados, la ley de comportamiento relaciona

los elementos linealmente independientes del vector de fuerzas generalizadas de la barra con el vector de deformaciones generalizadas. Por ejemplo en el caso de un pórtico plano y en las condiciones locales usuales, se tiene:

$$\begin{bmatrix} M_i \\ M_j \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^0 & S_{12}^0 & 0 \\ S_{21}^0 & S_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{33}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \delta \end{bmatrix} \quad \text{es decir} \quad \{M\}_b = [S^0]_b \cdot \{\Phi\}_b \quad (1)$$

donde  $M_i$  y  $M_j$  designan los momentos en los extremos  $i$  y  $j$  de la barra,  $\Phi_i$  y  $\Phi_j$  los giros medidos con respecto a la cuerda  $i-j$  desplazada,  $N$  es la fuerza axial y  $\delta$  el alargamiento de la cuerda (ver Figura 1). A  $[S^0]_b$  se le llama matriz de rigidez de la barra  $b$ . Todos los elementos de la matriz de rigidez son positivos o nulos.

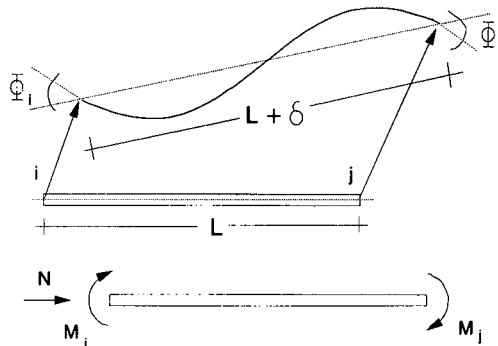


Figura 1. Fuerzas y deformaciones en un elemento de un pórtico plano.

### Modelo mecánico de una barra elástica-degradable

En el caso de un pórtico elástico los coeficientes  $S_{lm}^0$  permanecen constantes durante toda la historia de carga y las fuerzas son siempre proporcionales a las deformaciones. Sin embargo en una estructura real sometida a sobrecargas de gran intensidad (como por ejemplo en el caso de un sismo) la rigidez de los elementos disminuye como consecuencia del agrietamiento del concreto, el daño del acero o cualquier otro fenómeno degradante que esté teniendo lugar localmente en la estructura.

A fin de caracterizar globalmente este estado de deterioro se considerarán las siguientes hipótesis:

- Se supondrá que el daño de flexión se concentra en los extremos de las barras.
- No se tomará en cuenta la existencia de deformaciones o giros permanentes.

Para caracterizar el estado de degradación de la barra se utilizará un modelo similar al empleado en los modelos de plasticidad concentrada<sup>3,4</sup>, es decir: un elemento tipo viga elástica en el cual la no linealidad (es decir el daño) se concentra en los extremos del elemento. Estos se modelan como resortes degradables de flexión combinados con un resorte axial (ver Figura 2). El comportamiento a flexión del elemento viga es

descrito, como en el análisis elástico clásico, mediante la relación momento-curvatura. El comportamiento de los resortes se representa mediante la ley momento-rotación o fuerza-desplazamiento. A esta representación de la barra se le llamará “modelo de daño concentrado” por analogía con la terminología empleada en el análisis de estructuras elasto-plásticas.

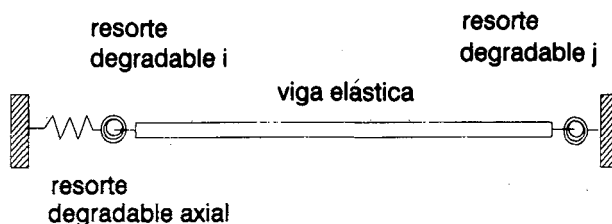


Figura 2. Modelo de daño concentrado.

El uso de este modelo significa que el estado de daño de la estructura se mide mediante un conjunto discreto de escalares y no por medio de funciones continuas. El daño sólo puede concentrarse en ciertos puntos del sólido que son predeterminados por el analista al descomponer la estructura en “barras”. Los modelos aquí introducidos pueden por lo tanto calificarse como pertenecientes a una “teoría de pórticos” por contraposición a la teoría de vigas. La misma observación podría hacerse en referencia al análisis elasto-plástico de estructuras aporticadas. En la teoría de vigas se determina una zona plástica de volumen no nulo. Por el contrario los modelos elasto-plásticos para pórticos se basan en representaciones de la barra como la indicada en la Figura 2. El concepto de zona plástica se substituye por el de “articulación plástica” (las articulaciones plásticas que se definen en el modelo elasto-plástico perfecto son de hecho resortes de flexión de longitud nula). En la práctica este tipo de modelos es mucho más empleado que aquellos basados en la teoría de vigas. La información que se pierde al pasar de un modelo de tipo “viga” a un modelo de tipo “pórtico” no es, en la mayoría de los casos, esencial. La noción de “articulación plástica” permite representar con suficiente exactitud los fenómenos que están ocurriendo en la estructura y se gana en simplicidad y facilidad de implementación en los programas de cálculo existentes. Otro argumento adicional para justificar la validez del modelo de daño concentrado es el fenómeno de “localización” del daño y la deformación en ciertas zonas de pequeño volumen que se observa experimentalmente. Este fenómeno puede caracterizarse matemáticamente en modelos que presentan “ablandamiento por deformación” (strain-softening)<sup>9</sup> y es característico de todos los modelos continuos locales de la M.D. clásica<sup>10</sup>.

Por otra parte, en el caso del análisis de pórticos elasto-plásticos, el ingeniero sabe descomponer la estructura en “barras” de tal manera que todos los lugares donde las articulaciones plásticas pudieran aparecer, sean representados en el modelo como resortes inelásticos. Es razonable suponer que este será igualmente el caso cuando se considere el daño en lugar de la plasticidad.

### Ley de Hooke para un material degradado

En la teoría clásica de la degradación, (ver por ejemplo [2], para una presentación general detallada de la M.D.) el índice de daño se define como la relación entre el área de microfisuras o microcavidades y el área total nominal de la cara orientada según la normal  $n$  del elemento de volumen:

$$D_n = \frac{\delta A_d}{\delta A} \quad (2)$$

donde  $D_n$  es la variable índice de daño (en el sentido de la mecánica de los medios continuos)  $\delta A_d$  el área de microfisuras multiplicada por un factor de intensidad de esfuerzos y  $\delta A$  el área total. Si no existen direcciones privilegiadas de degradación, el estado de daño puede ser representado mediante un escalar:

$$D_n = D \quad \forall n \quad (3)$$

Esta variable puede tomar valores únicamente entre 0 (material intacto sin microfisuras) y 1 (material completamente degradado o fisurado en el punto considerado). En el caso de un medio continuo, la ley de elasticidad de un material degradado se obtiene introduciendo la noción del "esfuerzo efectivo" y mediante la hipótesis de "equivalencias en deformación"<sup>2</sup>. De esta manera se obtiene la siguiente relación entre el esfuerzo y la deformación:

$$\sigma = (1 - D)E\varepsilon \quad (4)$$

donde  $\sigma$  es el esfuerzo normal,  $D$  el índice de daño,  $E$  el módulo de elasticidad inicial y  $\varepsilon$  la deformación unitaria.

### Ley de estado (relaciones fuerza-deformación) de los resortes degradables

En el modelo considerado, el daño se concentra en los resortes degradables. A fin de caracterizar el estado de degradación de cada uno de los resortes se introducirá el siguiente conjunto de índices de daño:

$$\{D\}_b^T = \{d_a, d_i, d_j\} \quad (5)$$

donde  $d_a$  caracteriza la degradación del resorte axial,  $d_i$  y  $d_j$  el daño de los resortes de flexión.

La relación fuerza axial-alargamiento para la barra degradada se obtiene fácilmente a partir de la relación (4):

$$N = (1 - d_a) S_{33}^0 \delta \quad (6)$$

Sin embargo en el modelo considerado la barra está compuesta por una viga elástica y un resorte degradable. Por lo tanto, para obtener el comportamiento descrito por la expresión precedente, es necesario adoptar la siguiente ley de estado para el resorte axial:

$$N = \frac{(1 - d_a)}{d_a} S_{33}^0 \delta_r \quad (7)$$

donde  $\delta_r$  representa el alargamiento del resorte. Se puede observar que para  $d_a = 0$  se tiene un resorte infinitamente rígido y las únicas deformaciones experimentadas por la barra son las de viga elástica.  $d_a = 1$  caracteriza un resorte de rigidez nula. En otras palabras, una barra completamente desconectada de la estructura en uno de sus extremos.

Se admite que el índice de daño  $d_a$  varía continuamente entre 0 (o un valor inicial) y 1. Esta variación es caracterizada por la "ley de evolución del índice de daño" que será introducida en las próximas secciones.

De la misma manera se adoptará la siguiente relación momento-rotación para cada uno de los resortes a flexión:

$$M_i = \frac{(1 - d_i)}{d_i} S_{11}^0 \Phi_i^r; \quad M_j = \frac{(1 - d_j)}{d_j} S_{22}^0 \Phi_j^r \quad (8)$$

$d_i = 0$  representa de nuevo un resorte infinitamente rígido y  $d_i = 1$  caracteriza a un resorte completamente degradado sin rigidez alguna.

Este último caso permite introducir la noción de "articulación interna degradada" que es el equivalente del concepto de "articulación plástica" que se define en el análisis elasto-plástico perfecto de estructuras aporticadas.

Las articulaciones plásticas se comportan como rótulas internas "verdaderas" sólo cuando se considera el problema de estructuras en velocidades. Es decir, en una articulación plástica la velocidad de incremento del momento flector es cero. Por el contrario, una articulación "degradada" tiene el mismo efecto sobre el comportamiento de la estructura que una articulación interna "real". En otras palabras, en el punto de la estructura donde el índice de daño toma el valor 1 el momento flector debe ser nulo.

En este trabajo no se consideran las deformaciones permanentes, pero puede constatarse que éstas podrían incluirse en (7) y (8) simplemente substituyendo las rotaciones y el desplazamiento de los resortes por sus equivalentes elásticos. Es decir:

$$M_i = \frac{(1 - d_i)}{d_i} S_{11}^0 (\Phi_i^r - \Phi_i^{rp}); \quad M_j = \frac{(1 - d_j)}{d_j} S_{22}^0 (\Phi_j^r - \Phi_j^{rp}) \quad (9)$$

donde  $\delta^{rp}$ ,  $\Phi_i^{rp}$  y  $\Phi_j^{rp}$  representan las deformaciones generalizadas plásticas de los resortes. En ese caso habría que incluir igualmente las leyes de evolución que corresponden a las nuevas variables internas mencionadas.

### Cálculo de la matriz de rigidez

Para una barra dañada, la matriz de rigidez se determina analizando la estructura formada por la viga elástica y los resortes (ver Figura 2), es decir resolviendo:

$$\begin{aligned} \{M\}_b &= [S^0]_b \cdot \{\Phi^v\}_b \\ \{\Phi\}_b &= \{\Phi^v\}_b + \{\Phi^r\}_b \\ \{M\}_b &= [R]_b \cdot \{\Phi^r\}_b \end{aligned} \quad (10)$$

donde  $\{\Phi^v\}_b$  es el vector de deformaciones generalizadas de la viga elástica. La primera de las relaciones (10) es por lo tanto la ley de comportamiento de la viga elástica.

La matriz  $\{\Phi^r\}_b$  es el vector de giros y desplazamientos de los resortes degradables y  $[R]_b$  es una matriz diagonal que contiene los términos adecuados para poder describir las relaciones fuerza-desplazamiento y momento-rotación de los resortes definidas por las expresiones (7) y (8). Los elementos no nulos de la matriz  $[R]_b$  son en consecuencia:

$$R_{11} = \frac{(1 - d_i)}{d_i} S_{11}^0; \quad R_{22} = \frac{(1 - d_j)}{d_j} S_{22}^0; \quad R_{33} = \frac{(1 - d_a)}{d_a} S_{33}^0$$

La tercera de las ecuaciones (10) es por lo tanto la ley de comportamiento de los resortes inelásticos.

La segunda ecuación de las relaciones (10) corresponde a la compatibilidad de deformaciones de la barra, los resortes y la viga elástica.

Combinando estas tres ecuaciones se obtiene la "ley de estado" de la barra, es decir la relación entre las fuerzas y deformaciones generalizadas de la barra:

$$\{M\}_b = [S(D)]_b \{\Phi\}_b \quad (11)$$

donde:  $[S(D)]_b = [S^0]_b([0] + [R]_b^{-1}[S^0]_b)^{-1}$

El símbolo  $[0]$  indica una matriz unitaria de dimensiones adecuadas.

La matriz  $[S(D)]_b$  es por lo tanto la matriz de rigidez local de la barra degradada.

En la ecuación (11) y en el cálculo de estructuras posterior desaparecen las nociones de "viga elástica" y "resortes inelásticos" y sólo se consideran las fuerzas y deformaciones generalizadas clásicas. El efecto del daño interviene en el cálculo mediante la modificación de la matriz de rigidez de la barra.

## LEYES DE EVOLUCION DE LA DEGRADACION

En la ley de estado (11) se introdujo una variable adicional, el vector  $\{D\}_b$ . Para definir completamente la ley de comportamiento hace falta en consecuencia introducir una ecuación suplementaria. Esta última debe describir la evolución de la degradación de la barra en función de las sollicitaciones que le han sido aplicadas. La ecuación suplementaria o "ley de evolución de la degradación" caracteriza el tipo de daño que se desea modelar: modelos independientes del tiempo para sollicitaciones monotónicas o de pocos ciclos, modelos de daño por fatiga para sollicitaciones cíclicas, modelos dependientes del tiempo para la degradación debida a efectos de fluencia o relajación.

### Restricciones a la evolución de la degradación

El método del estado local (ver por ejemplo [11]) permite determinar en forma general las limitaciones impuestas a la evolución de las variables internas por los principios de la termodinámica. Estos principios se expresan en función de los diferentes términos de energía que intervienen durante el proceso de carga.

En el caso que nos ocupa, la energía de deformación acumulada en una barra de la estructura se expresa como la suma de la energía reversible de los resortes más la energía de la viga elástica:

$$W_b = \frac{1}{2}\{\Phi^r\}_b^T [R]_b \{\Phi^r\}_b + \frac{1}{2}\{\Phi^v\}_b^T [S^0]_b \{\Phi^v\}_b = \frac{1}{2}\{\Phi\}_b^T [S(D)]_b \{\Phi\}_b \quad (12)$$

Si se desprecian los términos relacionados con los efectos térmicos, los dos principios de la termodinámica conducen a las siguientes relaciones:

$$dW_b + d\Psi_b = dT_b \quad (13)$$

$$d\Psi_b \geq 0 \quad (14)$$

donde  $\Psi$  representa la energía disipada durante el proceso y  $dT$  el incremento en el trabajo realizado sobre la barra en cuestión, es decir:

$$dT_b = \{M\}_b^T \{d\Phi\}_b \quad (15)$$

Introduciendo la expresión de la energía elástica (12) en la relación (13) y teniendo en cuenta que el vector de fuerzas  $\{M\}_b$  es igual a la derivada parcial de la energía elástica con respecto al vector de deformaciones  $\{\Phi\}_b$ , se obtiene:

$$d\Psi_b = \{G\}_b^T \cdot \{dD\}_b \geq 0 \quad (16)$$

donde:

$$\{G\}_b = - \left\{ \frac{\partial W}{\partial \{D\}} \right\}_b \quad (17)$$

En la terminología clásica del método del estado local, a las componentes de  $\{G\}_b$  se les llama "variables asociadas" o "fuerzas termodinámicas asociadas" a los índices de daño. Esta variable es por lo tanto el equivalente de la "tasa de restitución de energía" o del "factor de intensidad de esfuerzos" que se definen en la M.D. clásica y en la mecánica de la fractura.

Considerando la desigualdad (14) se observa que para que la evolución del conjunto  $\{D\}_b$  de índices de daño sea termodinámicamente admisible, hace falta que el "producto escalar" de los "vectores"  $\{G\}_b$  y  $\{D\}_b$  sea siempre positivo o nulo.

Si se expresa el vector  $\{G\}_b$  en términos de los desplazamientos de los resortes se obtiene:

$$G_i = \frac{1}{2}S_{11}^0(\Phi_i^r/d_i)^2; \quad G_j = \frac{1}{2}S_{22}^0(\Phi_j^r/d_j)^2; \quad G_a = \frac{1}{2}S_{33}^0(\delta^r/d_a)^2 \quad (18)$$

Lo que demuestra que las fuerzas termodinámicas asociadas a los índices de daño son siempre positivas. En consecuencia una condición suficiente para que la desigualdad (12) sea respetada es:



$$\dot{d}_i \geq 0 \quad \dot{d}_j \geq 0 \quad \dot{d}_a \geq 0 \quad (19)$$

Si se admite que los mecanismos de degradación axial y de flexión son independientes entre sí, entonces la condición (19) es también necesaria. En ese caso las leyes de evolución escogidas deben verificar las desigualdades (19) para ser termodinámicamente admisibles.

### Modelos de daño independiente del tiempo

Para la obtención de un modelo de degradación independiente del tiempo basta con repetir el formalismo elasto-plástico clásico:

Se definen las siguientes funciones de elasticidad:

$$\begin{aligned} h_i(G_i, d_i) &= G_i - K_i(d_i) \leq 0 \\ h_j(G_j, d_j) &= G_j - K_j(d_j) \leq 0 \\ h_a(G_a, d_a) &= G_a - K_a(d_a) \leq 0 \end{aligned} \quad (20)$$

La evolución de los índices de daño se define ahora de la manera siguiente:

$$\dot{d}_i \begin{cases} = 0 & \text{si } h_i < 0 \quad \text{o} \quad \dot{h}_i < 0 \quad \text{o} \quad d_i = 1 \\ > 0 & \text{si } h_i = 0 \quad \text{y} \quad \dot{h}_i = 0 \quad \text{y} \quad d_i < 1 \end{cases} \quad (21)$$

La ley de evolución (20), (21) puede ser considerada como el equivalente al criterio de Griffith de la mecánica de la ruptura. El estado de degradación del resorte en cuestión aumentará sólo si la fuerza termodinámica asociada al daño alcanza el valor crítico  $K$ . Este valor crítico puede, en el caso general, depender del estado de la barra representado por el índice de daño. De esta manera es posible caracterizar la influencia de fenómenos de endurecimiento por deformación de los materiales en el comportamiento de la barra.

Esta ley de evolución puede también ser comparada con los modelos elasto-plásticos clásicos. En estos, las fuerzas termodinámicas asociadas a las deformaciones plásticas son las fuerzas generalizadas representadas por el vector  $\{M\}_b$ , y sólo hay evolución de las deformaciones plásticas si el momento alcanza un valor crítico que en ese caso es el momento de fluencia.

En la ley de evolución (20), (21) se ha admitido implícitamente la hipótesis de desacoplamiento de los efectos axiales y de flexión que es usualmente aceptada en la mecánica de pórticos. Probablemente en muchas aplicaciones el resorte inelástico axial puede ser ignorado sin cometer errores apreciables. Esta hipótesis no es, por supuesto, esencial. El acoplamiento de efectos axiales y de flexión puede ser representado modificando las funciones de elasticidad de la misma manera que en los modelos elasto-plásticos clásicos.

Las funciones  $K$  deben ser identificadas en base a resultados experimentales como por ejemplo los obtenidos en ensayos sobre uniones viga-columna como la mostrada en la Figura 3.

Escogiendo adecuadamente la expresión de  $K$  es posible representar prácticamente cualquier curva momento-rotación o fuerza-desplazamiento obtenida experimentalmente.

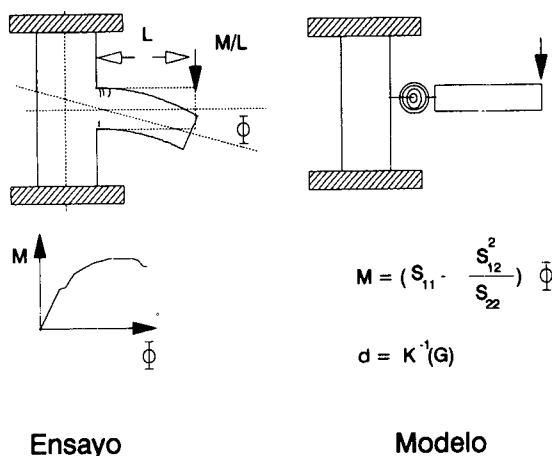


Figura 3. Ensayo en una junta viga-columna para la identificación de la ley de evolución.

Las funciones  $K$  dependen en general del tipo de material utilizado, de la sección transversal, del porcentaje y tipo de refuerzo en el caso de una estructura de concreto armado, etc.. La formulación de un modelo válido para un material particular es por lo tanto un problema complejo de naturaleza esencialmente experimental que no será considerado en este artículo.

### Modelos de daño por fatiga

Los modelos independientes del tiempo reproducen correctamente la irreversibilidad del fenómeno de la degradación, sin embargo son inadecuados para caracterizar la degradación en el caso de cargas cíclicas. Para describir la degradación por fatiga es necesario emplear otro tipo de ley de evolución. Por ejemplo:

$$\dot{d}_i = A_i(G_i, d_i) \langle \dot{G}_i \rangle \quad d_i < 1 \quad (22)$$

donde el simbolo  $\langle x \rangle$  indica la parte positiva de  $x$  y  $A_i$  es una función suficientemente regular que se determina en base a resultados experimentales. Al igual que para los modelos independientes del tiempo, la identificación de la función  $A$  para un material particular no será discutida en este artículo.

En este modelo el índice de daño aumenta únicamente durante la "fase de carga", que se define como el conjunto de instantes durante los cuales la velocidad de incremento de la fuerza termodinámica  $G_i$  es positiva. El índice de daño permanece constante durante la "fase de descarga".

La ley de evolución puede ser determinada para que en el caso particular de una sollicitación monótona el comportamiento previsto sea similar al de los modelos independientes del tiempo como es el caso en ciertos modelos de la M.D. clásica<sup>12</sup>. Para ello la velocidad de la degradación debe tener la siguiente expresión:

$$\dot{d}_i = -(G_i/K_i)^p (\partial h_i / \partial d_i)^{-1} \langle \dot{G}_i \rangle \quad (23)$$

donde  $G_i$  es la fuerza termodinámica asociada a  $d_i$ ,  $K_i$  y  $h_i$  son las funciones definidas en la sección precedente y  $p$  es un nuevo coeficiente que caracteriza el incremento de la degradación por ciclo. Para grandes valores de  $p$  puede demostrarse que el caso de una sollicitación monotónica, la ley de evolución (23) tiende hacia el comportamiento independiente del tiempo del modelo precedente<sup>12</sup>. La ventaja de este tipo de modelos consiste en que sólo sería necesario identificar un coeficiente adicional, la constante  $p$ , para obtener un modelo de fatiga a partir de un modelo independiente del tiempo.

### Modelos dependientes del tiempo

En los dos casos anteriores los índices de daños permanecen invariables a carga constante. En otras palabras sólo permiten caracterizar la degradación "instantánea". Para evaluar los efectos diferidos en el tiempo como por ejemplo los efectos de fluencia o relajación basta con emplear leyes de evolución del tipo siguiente:

$$\dot{d}_i = B_i(G_i, d_i) \quad d_i < 1 \quad (24)$$

donde  $B_i$  es una función suficientemente regular de la fuerza termodinámica  $G$  y del índice de daño.

## MODELO MATEMATICO DE UNA ESTRUCTURA DEGRADABLE

El cálculo de estructuras degradables consiste en resolver el sistema de ecuaciones formado por la ley de comportamiento descrita en las secciones precedentes (ley de estado y ley de evolución), las ecuaciones de equilibrio de cada uno de los nudos y cada una de las barras de la estructura y las ecuaciones de compatibilidad.

Después de efectuar el proceso de ensamblaje de la matriz de rigidez global de la estructura (siguiendo el procedimiento tradicional del método de rigidez para estructuras elásticas lineales) y del vector de fuerzas nodales se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales que puede ser escrito formalmente de la manera siguiente:

$$\begin{cases} \{F\}_e = [K(D)]_e \cdot \{X\}_e \\ \{\dot{D}\}_e = \{f(\dot{X}, X, D)\} \end{cases} \quad (25)$$

donde  $\{F\}_e$  es el vector de fuerzas nodales,  $[K(D)]_e$  la matriz de rigidez global y  $\{X\}_e$  el vector de desplazamientos generalizados de los nudos de la estructura, todos ellos en coordenadas globales. La matriz  $\{D\}_e$  es la que contiene los índices de daño de todas las barras de la estructura y  $f(\dot{X}, X, D)$  es la expresión que describe la evolución de cada índice de daño en función de las incógnitas  $X$  y  $D$ . El sistema (25) se resuelve empleando algún método numérico adecuado.

## EJEMPLO NUMERICO

Un programa de cálculo ha sido desarrollado para el análisis de estructuras aporticadas en base al método descrito. En el programa se implementó una ley de evolución independiente del tiempo como la descrita en una sección anterior. Para las funciones  $K$  se escogieron (arbitrariamente) expresiones del tipo siguiente:

$$K(d) = m d^n + k_0 \quad (26)$$

donde  $m, n$  y  $k_0$  son constantes de la barra. No se consideró el daño axial ( $\dot{d}_a = 0 \forall t$ ).

El programa fue probado con el ejemplo mostrado en la Figura 4. (Los valores de los parámetros utilizados se indican en el pie de la Figura 4). El pórtico allí indicado es solicitado por una fuerza  $F$  aplicada en el extremo superior de la barra 1. El cálculo fue "pilotado" por el desplazamiento horizontal de ese nudo. Los resultados del cálculo se ilustran en las Figuras 5, 6 y 7.

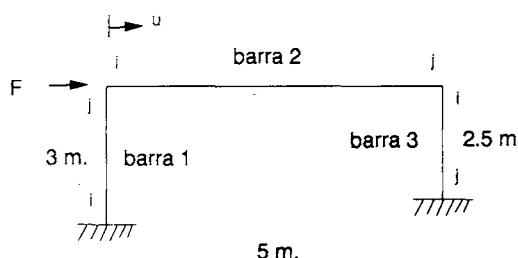


Figura 4. Pórtico plano sometido a una fuerza horizontal, parámetros utilizados en la simulación:  $E = 2000 \text{ t/cm}$ ,  $I = 166 \text{ cm}^2$ ,  $A = 200 \text{ cm}^4$ ,  $m = 9,91 \text{ t-cm}$ ,  $n = 1$ ,  $k_0 = 0,85 \text{ t-cm}$ .

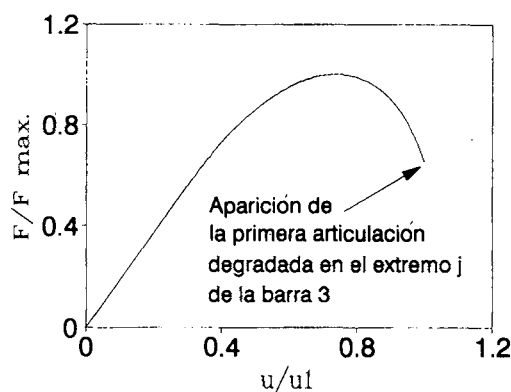


Figura 5.  $F/F \text{ max}$  en función de  $U/U1$ .

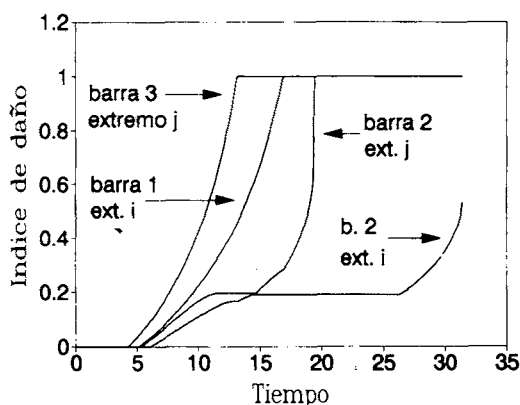


Figura 6. Evolución de los índices de daño de las barras de la estructura en el tiempo.

En la Figura 5 se muestra el gráfico  $F/F_{\max}$  en función de  $U/U_1$ . Donde  $F$  es la fuerza externa (ver Figura 4),  $F_{\max}$  la fuerza máxima aplicada,  $U$  es el desplazamiento horizontal (ver Figura 4) y  $U_1$  es el desplazamiento que corresponde a la aparición de la primera articulación degradada. Puede observarse que la estructura pasa por una fase elástica, una zona de “endurecimiento” hasta que la fuerza alcanza el valor  $F_{\max}$  que es la carga de ruptura del pórtico y finalmente por una fase de “ablandamiento”.

La evolución de los índices de daño de cada una de las barras en función del tiempo se indican en la Figura 6.

En la Figura 7 aparece la evolución de la distribución de momentos flectores en el curso del tiempo. En la Figura 7a se indica el diagrama de momentos para el instante  $t = 4,2$  ( $U_1 = 4,2$  cm) en el que el comportamiento es puramente elástico. En la Figura 7b se muestra la distribución de momentos después de la aparición de la primera articulación degradada ( $U_1 = 13,1$  cm). Comparando las Figuras 7a y 7b puede observarse el efecto de “redistribución de esfuerzos” debido a la evolución del daño en la estructura y a la aparición de la primera articulación degradada.

Las Figuras 7c y 7d indican la distribución de momentos para  $t = 16,9$  ( $U_1 = 16,9$  cm) y  $t = 19,4$  ( $U_1 = 19,4$  cm), es decir inmediatamente después de la aparición de la segunda y la tercera articulación degradadas respectivamente.

Puede observarse que el comportamiento de la estructura estudiada es mucho más estable (numéricamente) que el obtenido en análisis estructurales utilizando la M.D. clásica. En estos últimos, al igual que en muchos de los modelos que presentan ablandamiento por deformación, aparecen fenómenos de pérdida masiva de unicidad de la solución, lo que permite afirmar a algunos autores<sup>10</sup> que la M.D. clásica puede conducir a problemas matemáticos “mal formulados” (ill-posed) y sólo es válida hasta la iniciación de la zona completamente degradada. Ninguna de estas dificultades ha sido observada en este ejemplo elemental ni en otros similares. Ello es debido probablemente a que el modelo propuesto no es continuo y a que la discretización de la estructura en barras es uno de los datos del problema a resolver.

Por supuesto no puede afirmarse que en el caso general los modelos aquí propuestos no presentarán dificultades numéricas sin un análisis matemático completo.

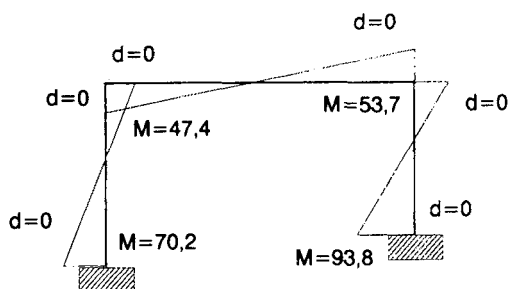


Figura 7a. Distribución de los momentos flectores en la estructura. (Momentos en t-cm.)  $t = 4,2$  Comportamiento elástico.

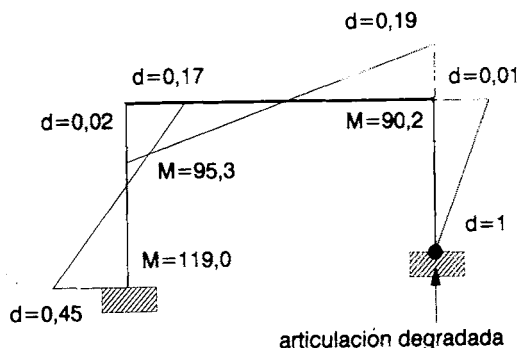


Figura 7b. Distribución de los momentos flectores en la estructura. (Momentos en t-cm.)  $t = 13,1$  Aparición de la primera articulación degradada (A.D.).

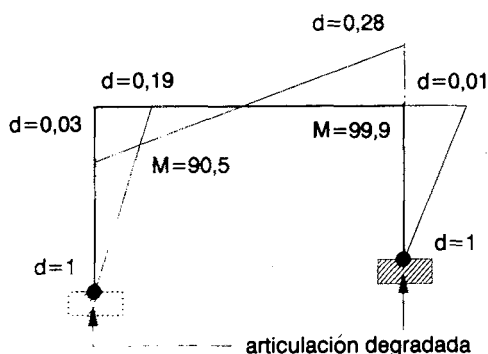


Figura 7c. Distribución de los momentos flectores en la estructura. (Momentos en t-cm.)  $t = 16,9$  Aparición de la segunda A.D.

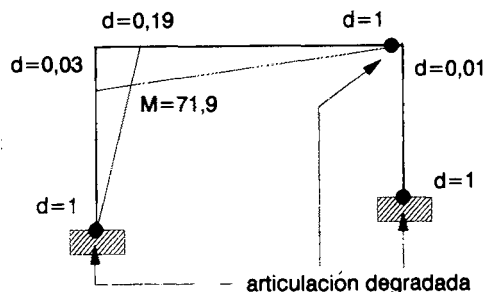


Figura 7d. Distribución de los momentos flectores en la estructura. (Momentos en t-cm.)  $t = 19,4$  Aparición de la tercera A.D.

## CONCLUSIONES

El método presentado en este artículo puede considerarse como una M.D. simplificada para el análisis de pórticos y reticulados. La adaptación de la M.D. clásica a la teoría de pórticos se hace, al igual que para la teoría de la plasticidad, mediante el uso del modelo de daño concentrado. El uso de los conceptos de la M.D. clásica y de la termodinámica de los medios continuos permite definir los modelos de comportamiento de pórticos en términos de "variables de estado" y "fuerzas termodinámicas", "ecuaciones de estado" y "leyes de evolución". En particular en los modelos aquí propuestos se define una nueva variable interna: el índice de daño. Se introduce igualmente la fuerza termodinámica que le es asociada. Este último concepto es similar al de "tasa de restitución de energía" que se introduce en la M.D. clásica y

en la mecánica de la fractura. En este artículo se propone la formulación de leyes de evolución del daño en función de esta fuerza termodinámica.

En el ejemplo de aplicación presentado en este artículo así como en otros similares no se observaron los problemas numéricos usuales de la M.D. clásica. Una explicación posible para ello es el carácter discreto del problema a resolver y el hecho de que los lugares donde podría eventualmente localizarse el daño forman parte de los datos del modelo.

Para una aplicación industrial hace falta identificar las funciones definidas en los diferentes tipos de ley de evolución. Este problema de carácter esencialmente experimental, no presenta a primera vista dificultades teóricas insuperables. De hecho existen numerosas referencias tanto de la M.D. clásica como del análisis no lineal de estructuras aporticadas que describen los pasos a seguir en este caso. El tipo de modelo a escoger depende del problema particular que se desea simular: para solicitaciones monotónicas o de pocos ciclos es preferible emplear el modelo independiente del tiempo que es el más fácil de identificar y el más "económico" desde el punto de vista computacional. Para solicitaciones cíclicas (o sísmicas) y para modelar los efectos diferidos en el tiempo es necesario utilizar modelos como los descritos en secciones anteriores.

## AGRADECIMIENTOS

Los resultados presentados en este artículo fueron obtenidos en el curso de una investigación financiada por el C.D.C.H.T. de la Universidad de los Andes y por el C.O.N.I.C.I.T. de Venezuela.

## ANEXOS

I. Expresiones de la matriz de rigidez  $S$ .

a) En función de los coeficientes de la matriz de rigidez inicial:

$$\begin{aligned} S_{13} &= S_{23} = 0 \\ S_{11} &= \frac{(1 - d_i)(d_j S_{12}^0 S_{12}^0 - S_{11}^0 S_{22}^0) S_{11}^0}{d_i d_j S_{12}^0 S_{12}^0 - S_{11}^0 S_{22}^0} \\ S_{12} &= \frac{(1 - d_i)(d_j - 1) S_{11}^0 S_{12}^0 S_{22}^0}{d_i d_j S_{12}^0 S_{12}^0 - S_{11}^0 S_{22}^0} \\ S_{22} &= \frac{(1 - d_j)(d_i S_{12}^0 S_{12}^0 - S_{11}^0 S_{22}^0) S_{22}^0}{d_i d_j S_{12}^0 S_{12}^0 - S_{11}^0 S_{22}^0} \\ S_{33} &= (1 - d_a) S_{33}^0 \end{aligned}$$

b) En el caso de una barra recta de sección constante  $A$ , de momento de inercia  $I$ , longitud  $l$  y módulo de elasticidad  $E$ , sin articulaciones internas iniciales:

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \frac{(1-d_i)(4-d_j)}{4-d_i d_j} 4EI/l & S_{12} &= \frac{4(1-d_i)(1-d_j)}{4-d_i d_j} 2EI/l \\
 S_{13} &= 0 & S_{22} &= \frac{(1-d_j)(4-d_i)}{4-d_i d_j} 4EI/l \\
 S_{23} &= 0 & S_{33} &= (1-d_a)AE/l
 \end{aligned}$$

II. Expresiones de las fuerzas termodinámicas asociadas a los índices de daño.

a) En función de las deformaciones de los resortes:

$$\begin{aligned}
 G_i &= \frac{1}{2} S_{11}^0 (\Phi_i^r/d_i)^2; & G_j &= \frac{1}{2} S_{22}^0 (\Phi_j^r/d_j)^2; \\
 G_a &= \frac{1}{2} S_{33}^0 (\delta^r/d_a)^2
 \end{aligned}$$

b) En función de los coeficientes de la matriz de rigidez inicial y las deformaciones generalizadas de la barra:

$$\begin{aligned}
 G_i &= \frac{([\Phi_i S_{12}^0 + \Phi_j S_{22}^0] d_j S_{12}^0 - S_{11}^0 S_{22}^0 \Phi_i - S_{11}^0 S_{22}^0 \Phi_j)^2 S_{11}^0}{2(d_i d_j S_{12}^0 - S_{11}^0 S_{12}^0)^2} \\
 G_j &= \frac{([\Phi_i S_{11}^0 + \Phi_j S_{12}^0] d_i S_{12}^0 - S_{12}^0 S_{11}^0 \Phi_i - S_{22}^0 S_{11}^0 \Phi_j)^2 S_{22}^0}{2(d_i d_j S_{12}^0 - S_{11}^0 S_{12}^0)^2} \\
 G_a &= \frac{1}{2} S_{33}^0 \delta^2
 \end{aligned}$$

c) En el caso de una barra recta de sección constante  $A$ , de momento de inercia  $I$ , longitud  $l$  y módulo de elasticidad  $E$

$$\begin{aligned}
 G_i &= \frac{(d_j \Phi_i + 2d_j \Phi_j - 4\Phi_i - 2\Phi_j)^2 2EI}{(d_i d_j - 4)^2 l} \\
 G_j &= \frac{(d_i \Phi_j + 2d_i \Phi_i - 4\Phi_j - 2\Phi_i)^2 2EI}{(d_i d_j - 4)^2 l} \\
 G_a &= \frac{AE}{2l} \delta^2
 \end{aligned}$$

## REFERENCIAS

1. L.M. Kachanov, "On creep rupture time", *Izsv. Akad. Nauk SSSR* 8, pp. 26-31, (1958).
2. J. Lemaitre y J.L. Chaboche, "*Mécanique des matériaux solides*", Dunod, Paris, (1985).
3. Z.M. Cohn y A. Franchi, "STRUPL: A computer system for structural plasticity", *J. Struct. Div. ASCE*, Vol. 105(4), pp. 789-804, (1979).
4. P. Riva y M.Z. Cohn, "Engineering approach to nonlinear analysis of concrete structures", *J. Struct. Div. ASCE*, Vol. 116(8), pp. 2162-2185, (1989).



5. E. Dipasquale, J.W. Ju, A. Askar y A.S. Çamak, "Relation between global damage indices and local stiffness degradation", *J. Struct. Div. ASCE.*, Vol. 116(5), pp. 1440-1456, (1990).
6. M.S.L. Roufaiel y C. Meyer, "Analytical modeling of hysteretic behaviour of R/C frames", *J. Struct. Div. ASCE.*, Vol. 113(3), pp. 429-443, (1987).
7. S.K. Kunnath, A.M. Reinhorn y Y.J. Park, "Analytical modeling of inelastic seismic response of R/C structures", *J. Struct. Div. ASCE.*, Vol. 116(4), pp. 996-1017, (1990).
8. S. Rodriguez Gomez, A.S. Camak, "Evaluation of seismic damage indices for reinforced concrete structures", *NCEER-90-0022*, National Center For Earthquake Engineering Research, State University of New York at Buffalo, (1990).
9. J.R. Rice y J.W. Rudnicki, "A note on some features of the theory of localization of deformation", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 16, pp. 597-605, (1980).
10. A. Benallal, R. Billardon y G. Geymonat, "Some mathematical aspects of the damage softening rate problem", *Strain localization and size effect duo to cracking and damage, France-U.S. Workshop*, Cachan, Francia, (1988).
11. P. Germain, "Mécanique", *Ecole Polytechnique Palaiseau*, Francia, (1986).
12. J.J. Marigo, "Modelling of brittle and fatigue damage for elastic material by growth of microvoids", *Engrg. Fracture Mechanics*, Vol. 21(4), pp. 861-874, (1985).