Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 8, 1, 3–9(1992)

SOLUCION EN FORMA CERRADA DE SISTEMAS ACOPLADOS DE RICCATI EN TEORIA DE JUEGOS DISCRETOS*

E. NAVARRO
L. JODAR
y
A. HERVAS

Dpto. de Matemática Aplicada,
Universidad Politécnica de Valencia.

RESUMEN

En este artículo se propone una solución no iterativa de sistemas acoplados matriciales de Riccati que aparecen en la resolución de teoría de juegos discretos cuando se aplica la estrategia de Nash en bucle abierto. Mediante el uso de transformaciones algebraicas apropiadas el problema se transforma en otro desacoplado para el que una solución en forma cerrada es viable.

SUMMARY

In this paper a non recursive solution for coupled Riccati equations appearing in open-loop Nash discrete time linear quadratic terms is given. By means of appropriate algebraic transformations the problem is decoupled so that an explicit closed form solution is available.

INTRODUCCION

En el estudio de problemas de control no cooperativos la teoría de juegos es un enfoque necesario, cada controlador (jugador) trata de optimizar su propia función de coste que puede estar más o menos en conflicto con los otros jugadores. Entonces se hace necesaria una solución de equilibrio y la estrategia de Nash es una elección natural. En este caso, un jugador no puede desviarse unilateralmente de su estrategia de Nash. Debido al carácter no cooperativo, el problema de optimización para varios jugadores está fuertemente acoplado y las condiciones necesarias para aplicar la estrategia de Nash conduce a la resolución de ecuaciones de Riccati acopladas. Nosotros consideraremos la estrategia de Nash en bucle abierto para juegos lineales cuadráticos en tiempo discreto. Consideremos un juego lineal cuadrático en tiempo discreto con p jugadores, descrito por

* Este artículo ha sido financiado con la ayuda de la D.G.I.C.Y.T. proyecto PS87-0064

Recibido: Septiembre 1990

$$x(k+1) = Ax(k) + \sum_{i=1}^{p} B_i u_i(k) \ , \tag{1}$$

donde $x(k) \in \mathbb{R}^n, u_i \in \mathbb{R}^{r_i}, B_i \in \mathbb{R}^{n \times r_i}$, para $l \leq i \leq p$, siendo A una matriz invertible en $\mathbb{R}^{n \times n}$. El índice de coste asociado al jugador i-ésimo ($l \leq i \leq p$) viene dado por

$$J_i = \frac{1}{2}\left\{ x(N)^T K_{if} x(N) + \sum_{k=0}^{N-1} \left[x(k)^T Q_i x(k) + \sum_{j=1}^{p} u_j(k)^T R_{ij} u_j(k) \right] \right\} \tag{2}$$

donde todas las matrices de ponderación son simétricas y R_{ii} es definida positiva para $l \leq i \leq p$.

Cuando se busca una estrategia de Nash en bucle abierto, las condiciones necesarias y suficientes a satisfacer son ([1], [2]) :

$$u_i(k) = -R_{ii}^{-1} B_i^T \ \Psi_i(k+1) \ , \ l \leq i \leq p \tag{3}$$

y los vectores $\Psi_i(k)$ satisfacen

$$\Psi_i(k) = Q_i x(k) + A^T \ \Psi_i(k+1), \quad \Psi_i(N) = K_{if} x(N), \quad l \leq i \leq p \tag{4}$$

Cuando se introducen las transformaciones lineales $\Psi_i(k) = K_i(k)x(k), \quad l \leq i \leq p$, y se tiene en cuenta (3), el sistema (1) toma la forma

$$x(k+1) = \{I + S_1 K_1(k+1) + S_2 K_2(k+1) + \cdots + S_p K_p(k+1)\}^{-1} A x(k) \tag{5}$$

donde I es la matriz identidad de orden n y $S_i = B_i R_{ii}^{-1} B_i^T, \quad l \leq i \leq p$.

Sustituyendo (5) en (4) y utilizando la relación $\Psi_i = K_i x$, se obtienen las ecuaciones de Riccati acopladas

$$K_i(k) = Q_i + A^T K_i(k+1) \left\{ I + \sum_{i=1}^{p} S_i K_i(k+1) \right\}^{-1} A \ ; \ K_i(N) = K_{if}, \quad l \leq i \leq p \tag{6}$$

Estas ecuaciones pueden resolverse recursivamente partiendo del conocimiento del valor final $K_i(N) = K_{if}, \quad l \leq i \leq p$, y obteniendo posteriormente el valor de la solución $K_i(k)$, para $k < N$, véase la referencia [3]. Sin embargo, esto presenta algunos inconvenientes numéricos. En primer lugar requiere el almacenamiento de todos los valores $K_i(k)$ a lo largo de todo el dominio y para cada i entre l y p. Además, obsérvese que el cálculo de cada $K_i(k)$ involucra la inversión de muchas matrices que cuando estan mal condicionadas dan lugar a pésimos resultados numéricos debido a la acumulación de errores. Finalmente, las soluciones iterativas no son interesantes para el estudio de propiedades de estabilidad, por ejemplo si se cambian las condiciones de contorno y se quiere observar el comportamiento después del cambio, se tienen que efectuar todos los cálculos para observar la variación resultante.

En la referencia [4] se obtiene una solución explicita del problema (6) para el caso $p = 2$ y cuando las matrices de ponderación Q_i que aparecen en las funciones de coste son proporcionales, es decir, existe un escalar α tal que $Q_2 = \alpha Q_1$. El objetivo de este artículo es el de obtener una solución en forma cerrada y computable para una clase de juegos donde las matrices R_{ii}, B_i, satisfacen una cierta propiedad para $l \leq i \leq p$.

TRANSFORMACIONES ALGEBRAICAS Y SOLUCION EN FORMA CERRADA

Consideremos un nuevo índice m definido por

$$m = N - k \tag{7}$$

y el cambio de variables definido por

$$\hat{x}(m) = x(N-m) = x(k); \quad \hat{\Psi}_j(m) = \Psi_j(N-m) = \Psi_j(k), \quad l \leq i \leq p \tag{8}$$

Agrupando convenientemente las ecuaciones (3) – (6), resulta que las condiciones necesarias y suficientes a satisfacer por una estrategia de Nash en bucle abierto pueden escribirse en la forma

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(m+1) \\ \hat{\Psi}_1(m+1) \\ \vdots \\ \hat{\Psi}_p(m+1) \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \hat{x}(m) \\ \hat{\Psi}_1(m) \\ \vdots \\ \hat{\Psi}_p(m) \end{bmatrix} \quad ; \quad \hat{\Psi}_j(0) = K_{jf}\hat{x}(0), \quad l \leq j \leq p \tag{9}$$

donde M es la matriz

$$M = \begin{bmatrix} A^{-1} & A^{-1}S_1 & A^{-1}S_2 & \cdots & A^{-1}S_p \\ Q_1A^{-1} & A^T + Q_1A^{-1}S_1 & Q_1A^{-1}S_2 & \cdots & Q_1A^{-1}S_p \\ Q_2A^{-1} & Q_2A^{-1}S_1 & A^T + Q_2A^{-1}S_2 & \cdots & Q_2A^{-1}S_p \\ \vdots & & & & \vdots \\ Q_pA^{-1} & Q_pA^{-1}S_1 & Q_pA^{-1}S_2 & \cdots & A^T + Q_pA^{-1}S_p \end{bmatrix} \tag{10}$$

Supongamos que introducimos un cambio de base definido por

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(m+1) \\ \hat{\Psi}_1(m+1) \\ \hat{\Psi}_2(m+1) \\ \vdots \\ \hat{\Psi}_p(m+1) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \hat{x}(m) \\ \hat{w}(m) \\ \hat{\Psi}_2(m) \\ \vdots \\ \hat{\Psi}_p(m) \end{bmatrix} \quad , \quad T = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & L_2 & L_3 & & L_p \\ 0 & 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & I & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I \end{bmatrix} \tag{11}$$

donde $L_2, \cdots, L_p$ son matrices en $\mathbb{R}^{n\times n}$ a determinar. Con este cambio el problema (9) es equivalente al siguiente

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(m+1) \\ \hat{w}(m+1) \\ \hat{\Psi}_2(m+1) \\ \vdots \\ \hat{\Psi}_p(m+1) \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} \hat{x}(m) \\ \hat{w}(m) \\ \hat{\Psi}_2(m) \\ \vdots \\ \hat{\Psi}_p(m) \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{aligned} &\hat{w}(0) = (K_{lf} - \sum_{j=2}^{p} L_j K_{jf})\hat{x}(0), \\ &\hat{\Psi}_j(0) = K_{jf}\hat{x}(0), \quad 2 \leq j \leq p \end{aligned} \tag{12}$$

donde

$$S = \begin{bmatrix} A^{-1} & A^{-1}S_1 & A^{-1}(S_1L_2 + S_2) & \cdots & A^{-1}(S_1L_p + S_p) \\ VA^{-1} & A^T + VA^{-1}S_1 & \begin{array}{c} A^TL_2 - L_2A^T + \\ +VA^{-1}(S_1L_2 + S_2) \end{array} & \cdots & \begin{array}{c} A^TL_p - L_pA^T + \\ +VA^{-1}(S_1L_p + S_p) \end{array} \\ Q_2A^{-1} & Q_2A^{-1}S_1 & A^T + Q_2A^{-1}(S_1L_2 + S_2) & \cdots & Q_2A^{-1}(S_1L_p + S_p) \\ \vdots & & & & \vdots \\ Q_pA^{-1} & Q_pA^{-1}S_1 & Q_pA^{-1}(S_1L_2 + S_2) & \cdots & A^T + Q_pA^{-1}(S_1L_p + S_p) \end{bmatrix}$$

y la matriz V que aparece en las entradas de S viene dada por la expresión $V = Q_1 - L_2Q_2 - L_3Q_3 - \cdots - L_pQ_p$.

Supongamos por un momento que las matrices $L_2, L_3, \cdots, L_p$, satisfacen

$$S_1L_j + S_j = 0, \quad A^TL_j - L_jA^T = 0, \quad 2 \leq j \leq p \tag{13}$$

entonces el problema (12) toma la forma

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(m+1) \\ \hat{w}(m+1) \\ \hat{\Psi}_2(m+1) \\ \vdots \\ \hat{\Psi}_p(m+1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|ccc} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{W}} & 0 & \cdots & 0 \\ & & 0 & & 0 \\ \hline Q_2A^{-1} & Q_2A^{-1}S_1 & A^T & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ Q_pA^{-1} & Q_pA^{-1}S_p & 0 & \cdots & A^T \end{array}\right] \begin{bmatrix} \hat{x}(m) \\ \hat{w}(m) \\ \hat{\Psi}_2(m) \\ \vdots \\ \hat{\Psi}_p(m) \end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$\hat{w}(0) = (K_{lf} - \sum_{j=2}^{p} L_j K_{jf})\hat{x}(0)$$

$$\hat{\Psi}_j(0) = K_{jf}\hat{x}(0), \ 2 \leq j \leq p$$

donde

$$W = \begin{bmatrix} A^{-1} & A^{-1}S_1 \\ VA^{-1} & A^T + VA^{-1}S_1 \end{bmatrix}, \quad V = Q_1 - L_2Q_2 - L_3Q_3 - \cdots - L_pQ_p \tag{15}$$

Resolviendo (14) tenemos que

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(m) \\ \hat{w}(m) \end{bmatrix} = W^m \begin{bmatrix} \hat{x}(0) \\ \hat{w}(0) \end{bmatrix} = W^m \begin{bmatrix} I \\ K_{lf} - \sum_{j=2}^{p} L_j K_{jf} \end{bmatrix} \hat{x}(0) = G(m)\hat{x}(0) \tag{16}$$

donde

$$G(m) = W^m \begin{bmatrix} I \\ K_{lf} - \sum_{j=2}^{p} L_j K_{jf} \end{bmatrix} \tag{17}$$

y

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_j(m) &= (A^T)^m \hat{\Psi}_j(0) + \sum_{r=0}^{m-1} (A^T)^r (Q_j A^{-1} Q_j A^{-1} S_1) G(m-1-r)\hat{x}(0) \\ &= \left\{ (A^T)^m K_{jf} + \sum_{r=0}^{m-1} (A^T)^r (Q_j A^{-1} Q_j A^{-1} S_1) G(m-1-r) \right\} \hat{x}(0) \quad ; \quad 2 \le j \le p \end{aligned} \tag{18}$$

De (16) tenemos que

$$\hat{x}(m) = [I, 0] G(m)\hat{x}(0) \; ; \; \hat{w}(m) = [0, I] G(m)\hat{x}(0) \tag{19}$$

Si suponemos que

$$[I, 0]\ G(m) \ \text{ es invertible} \tag{20}$$

entonces de (19) y (18) tenemos que

$$\hat{w}(m) = [0, I] G(m) \left\{ [I, 0] G(m) \right\}^{-1} \hat{x}(m) \tag{21}$$

$$\hat{\Psi}_j(m) = \left\{ (A^T)^m K_{jf} + \sum_{r=0}^{m-1} (A^T)^r (Q_j A^{-1} Q_j A^{-1} S_1) G(m-1-r) \right\} \left\{ [I, 0] G(m) \right\}^{-1} \hat{x}(m) \tag{22}$$

Ahora de la relación $\Psi_i = K_i x$, de (7), (8) y (22), para $2 \le j \le p$ se verifica

$$K_j(k) = \left\{ (A^T)^{N-k} K_{lf} + \sum_{r=0}^{N-k-1} (A^T)^r (Q_j A^{-1} Q_j A^{-1} S_1) G(N-k-l-r) \right\} \left\{ [I, 0] G(N-k) \right\}^{-1} \tag{23}$$

De (19) y (21) podemos escribir

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_1(m) = \hat{w}(m) + \sum_{j=2}^{p} L_j \hat{\Psi}_j(m) = [0, I] G(m) \left\{ [I, 0] G(m) \right\}^{-1} \hat{x}(m) + \\ + \sum_{j=2}^{p} L_j \hat{\Psi}_j(m) \end{aligned} \tag{24}$$

y de la relación $\Psi_j = K_i x$, de (7), (8) y (24) se sigue que

$$K_1(k) = [0, I]G(N-k)\left\{[I, O]G(N-k)\right\}^{-1} + \sum_{j=2}^{p} L_j K_j(k) \tag{25}$$

Ahora consideraremos el problema de la existencia de las matrices L_j, para $2 \leq j \leq p$, satisfaciendo el sistema (13), así como su computación. Con esta finalidad recordamos el concepto de producto de Kronecker de dos matrices. Si A, B son matrices en $\mathbb{R}^{m\times n}$ y $\mathbb{R}^{k\times s}$, respectivamente, entonces el producto de Kronecker de A y B, denotado por $A \otimes B$, se define por la matriz

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, denotaremos

$$A_{.j} = \begin{bmatrix} a_{lj} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \; l \leq j \leq n \; ; \; vec\, M = \begin{bmatrix} M_{.l} \\ \vdots \\ M_{.n} \end{bmatrix}$$

y para matrices M, N y P de dimensiones apropiadas, por el lema columna[5,p.410] se verifica que

$$vec(MNP) = (P^T \otimes M) vec\, N \tag{26}$$

Si aplicamos productos de Kronecker a cada miembro de cada ecuación de (13) y tenemos en cuenta (26), el sistema (13) es equivalente al siguiente

$$C\; vec\, L_j = vec\,[0, -S_j] \;\;,\;\; 2 \leq j \leq p \tag{27}$$

donde

$$C = \begin{bmatrix} I \otimes A^T - A \otimes I \\ I \otimes S_1 \end{bmatrix} \tag{28}$$

Ahora si denotamos por C^+ la inversa Moore-Penrose de C, por el teorema 2.3.3 de[7,p.24], el sistema (27) admite solución si y sólo si se satisface la condición

$$CC^+ vec[0, -S_j] = vec[0, -S_j] \;\;,\;\; 2 \leq j \leq p \tag{29}$$

y bajo la condición (29), una solución de este sistema viene dada por $vecL_j = C^+\; vec[0, -S_j]$. De aquí y de los comentarios previos el siguiente resultado queda demostrado:

TEOREMA. Consideremos el sistema de Riccati acoplado (6) donde A es invertible Q_i es simétrica, R_{ii} es definida para $l \leq i \leq p$, y las matrices $S_i = B_i R_{ii}^{-1} B_i$ satisfacen la condición (29) para $l \leq i \leq p$, donde C está definida por (28). Si $G(m)$ está definida por (17), entonces si en k la matriz $[I,0]G(N-k)$ es invertible, la solución del sistema (6) en k viene dada por (23), (25).

NOTA 1. Es interesante recordar que la computación de la inversa Moore-Penrose de una matriz puede calcularse con paquetes comercializados como el MATLAB por ejemplo. Nótese también que en el punto $k = N$ la matriz $[I,0]G(N-k) = I$ siempre es invertible, y que si en algún punto k la matriz $[I,0]G(N-k)$ no lo es, se puede calcular en dicho punto la solución de (16) utilizando el método iterativo y la solución previamente calculada en los puntos $j > k$ donde $[I,0]G(N-j)$ es invertible. El cálculo de la solución del sistema (16) obtenida mediante el teorema anterior puede realizarse automáticamente con un ordenador utilizando un lenguaje algebraico como son el REDUCE o MACSYMA.

REFERENCIAS

1. H. Abou-Kandil, P. Bertrand y M. Drouin, "A closed form solution for discrete time linear quadratic Nash games", *Proc. 4th IFAC/IFORS Symp. Large Scale Systems: Theory and Appls.*, Zurich, (1986).
2. T. Basar y G.J. Olsder, *"Dynamic non cooperative game theory"*, Academic Press, (1982).
3. R.P. Hämäläinen, "Recursive algorithms for Nash strategies in two-player difference games", *Internat. J. Control*, Vol. **27**, pp. 229–237, (1978).
4. P. Lancaster y M. Tismenetsky, *"Theory of Matrices"*, 2nd ed., Academic Press, New York, (1985).
5. R.S. Pindyck, "Optimal economic stabilization under decentralized control and conflicting objectives", *IEEE Trans Aut. Control*, Vol. **AC-22**, pp. 517–530, (1977).
6. C.R. Rao y S.K. Mitra, *"Generalized Inverse of Matrices and its Applications"*, John Wiley, New York, (1971).