

## EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS PARA EL MODELADO DE LA ECUACION DE ONDAS CON UN PROCESADOR VECTORIAL

F.J. SERON\*  
F.J. SANZ\*  
M. KINDELAN\*\*  
y  
C. PEREZ\*\*\*

*\*Dpto. Matemática Aplicada,  
Centro Politécnico Superior,  
Universidad de Zaragoza,  
María de Luna 3,  
50015 Zaragoza.*

*\*\*IBM ECSEC, Via Giorgione 159,  
00147 Roma (Italia).*

*\*\*\*Grupo de Mecánica de Fluidos,  
Dpto. Ciencia y Tecnología,  
de Materiales y Fluidos,  
Centro Politécnico Superior,  
Universidad de Zaragoza,  
María de Luna 3,  
50015 Zaragoza.*

### RESUMEN

El objetivo de este trabajo es analizar los aspectos computacionales del Método de los Elementos Finitos para la resolución de las ecuaciones de onda elásticas. Se analizan las técnicas numéricas necesarias desde el punto de vista de la precisión, prestaciones y necesidades de almacenamiento cuando se implementan en procesadores escalares y vectoriales con gran capacidad de almacenamiento.

El método se ha implementado en un IBM 3090 con procesador vectorial usando diferentes algoritmos para la integración temporal: Houbolt, Wilson y tres métodos tipo Newmark: Diferencias Centradas Explícitas, Diferencias Centradas Implícitas y Aceleración Media Constante. Los grandes sistemas huecos de ecuaciones lineales que se obtienen se resuelven usando métodos directos e iterativos, y la matriz del sistema se representa usando los esquemas de línea de horizonte (skyline), por filas (row wise) y de la diagonal comprimida (compressed diagonal).

De nuestros resultados se concluye que la Aceleración Media Constante y las Diferencias Centradas Explícitas son los métodos más apropiados y que Jacobi Gradiente Conjugado es el método de resolución más eficiente.

Recibido: Enero 1990

## SUMMARY

The objective of this work is to analyze the computational aspects of the Finite Element Method for the elastic wave equations. The necessary numerical techniques are analyzed from the point of view of accuracy, performance and storage requirements when implemented in scalar and vector processors with large storage capacity.

The method is implemented on an IBM 3090 with vector facility using several algorithms for time integration: Houbolt, Wilson and three Newmark type methods; Central Difference Explicit, Central Difference Implicit and Constant Average Acceleration. The resulting large sparse system of linear equations is solved using both direct and iterative methods, and the system matrix is represented using skyline, row wise and compressed diagonal schemes.

From our results it is concluded that Constant Average Acceleration and Explicit Central Difference are the most adequate integration methods and Jacobi Conjugate Gradient is the most efficient solver.

## Palabras Clave

*Método de los Elementos Finitos, métodos numéricos con superordenadores, elastodinámica lineal, modelado de la ecuación de ondas sísmicas, métodos numéricos es sismología, física computacional.*

## INTRODUCCION

En este trabajo se aplica la técnica de los Elementos Finitos al problema de la propagación de las ondas elásticas. Este problema es de interés porque:

- Para los geofísicos es una herramienta muy útil para predecir y comprender la propagación de ondas sísmicas.
- Para los expertos en informática es un problema interesante que requiere una gran capacidad de almacenamiento y de tiempo de CPU que solo puede alcanzarse mediante los modernos superordenadores.
- Para los ingenieros es un problema interesante porque la aproximación numérica a la solución de las ecuaciones de la elastodinámica lineal que aparecen en los campos del diseño en ingeniería, ingeniería civil, mecánica, aeronáutica y astronáutica todavía presenta un amplio espectro de problemas abiertos.

La prospección sísmica consiste básicamente en la generación de trenes de ondas en la superficie terrestre, y en la medición del tiempo de propagación desde la fuente a un número de geófonos receptores. El registro sísmico resultante representa la superposición de las ondas que han sido reflejadas y refractadas desde las inhomogeneidades terrestres hacia los receptores. El objetivo del trabajo sísmológico es la interpretación de estos registros sísmicos con objeto de obtener información geológica. Para llevar a cabo esta tarea, se emplean varias técnicas de procesado de datos que facilitan el difícil trabajo del intérprete. De hecho, los registros sísmicos contienen tal cantidad de información que su interpretación es bastante subjetiva. Por esta razón, la industria geofísica se ha visto implicada activamente, durante las últimas dos décadas, en el desarrollo y uso del modelado sísmico.

Al evaluar varios métodos de modelado elástico directo es evidente que los métodos analíticos no son efectivos, pues están restringidos a geometrías simples con estructuras homogéneas. Por contra, los métodos numéricos (Diferencias Finitas<sup>1,2</sup>, Elementos Finitos<sup>3,4</sup>, y Seudo-Espectrales<sup>5,6,7</sup> logran la precisión deseada permitiendo una dependencia espacial arbitraria en las propiedades de los materiales. En este trabajo, consideramos el Método de los Elementos Finitos (MEF) para la solución de las ecuaciones completas de onda elásticas. La ventaja principal del uso del MEF es su versatilidad para ajustarse a las características de cada problema<sup>8</sup>: en particular, permite el uso de mallas no uniformes, con elementos de tamaño característico, geometría y orden de aproximación variables. De este modo es posible conseguir la precisión deseada en las diferentes regiones del dominio de integración e incorporar simultáneamente, de modo simple, condiciones de contorno definidas en geometrías complejas.

Otras ventajas que proporciona el MEF son la posibilidad de usar mallas móviles para seguir en detalle ciertas áreas de interés<sup>9</sup>, mejor precisión para coeficientes de Poisson entre 0.23 y 0.45<sup>10</sup>, tratamiento adecuado de los términos no lineales<sup>11</sup> e incorporación de discontinuidades en las propiedades del material dentro de los elementos<sup>12</sup>. Sin embargo el MEF tiene varias desventajas, en especial cuando la malla espacial o temporal no se ha generado apropiadamente, posibles ejemplos son la atenuación o amplificación numérica<sup>10</sup>, anisotropía numérica<sup>10,13</sup>, polarización de onda<sup>10</sup>, errores en las velocidades de fase y de grupo<sup>13-15</sup> y ondas espúreas<sup>16-18</sup>.

El MEF conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en el tiempo que puede integrarse con diferentes métodos. Según el método usado se obtienen formulaciones explícitas o implícitas. En este último caso, es necesario resolver un sistema de ecuaciones algebraicas lineales para cada paso temporal, lo que lleva, para problemas realistas, a necesidades de computación muy elevadas. Para obtener un esquema explícito es necesario usar diferencias centradas para la integración temporal y matrices de amortiguamiento y de masa diagonales (lumped mass y lumped damping)<sup>19,10</sup>. En este caso la solución puede obtenerse sin resolver un sistema de ecuaciones lineales.

En este estudio se consideran 5 esquemas diferentes de integración temporal. (Diferencias Centradas Implícitas y Explícitas, Houbolt, Aceleración Media Constante y Wilson), y en el caso implícito, métodos directos (Descomposición Gaussiana) o iterativos (Sobrerrelajación Sucesiva SOR, Jacobi Semiiterativo, Jacobi Gradiente Conjugado) de resolución de sistemas lineales huecos. Estos métodos de resolución se toman de las bibliotecas ITPACK-2C<sup>21</sup> y ESSL<sup>22</sup> usando en cada caso el esquema de representación adecuado, línea de horizonte (skyline), por filas (row wise) o diagonal comprimida (compressed diagonal).

Las técnicas numéricas consideradas en este trabajo se analizan desde el punto de vista de precisión, prestaciones y necesidades de almacenamiento implementándolo en un IBM 3090 con capacidades vectoriales. Como ejemplo de aplicación del método se presenta un common shot gather para un experimento de simulación. Los resultados de este trabajo pueden usarse para diseñar un programa eficiente de Elementos Finitos para el modelado de la propagación de ondas elásticas.

### Formulación

Consideremos un medio sólido continuo, lineal, elástico, no homogéneo e isótropo con dominio  $\Omega$  y límite  $\Gamma$ , y supongamos que  $\Omega$  es una región abierta acotada y conexa de  $R^3$ , y que  $\Gamma$  es  $C^1$  a trozos y puede ser descompuesta en dos partes  $\Gamma_g$ ,  $\Gamma_h$ , cada una con una medida superficial estrictamente positiva tal que

$$\Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_h \quad \Phi = \Gamma_g \cap \Gamma_h$$

Denotando por  $r$  el vector de posición definido en  $\Omega$ ,  $t$  la variable temporal definida en el intervalo  $(0, T)$  con  $T > 0 \in R$  e introduciendo

$$\hat{\Omega} = \Omega \cup \Gamma \quad Q_T = \Omega \times (0, T) \quad \sum_T = \Gamma \times (0, T)$$

el modelado sísmico puede ser formulado como el problema de encontrar una función de desplazamiento

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = [u_1(\mathbf{r}, t), u_2(\mathbf{r}, t), u_3(\mathbf{r}, t)] \quad \text{con } u_i : \hat{\Omega} \times [0, T] \rightarrow |R; \quad i = 1, 2, 3$$

tal que  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  satisface las ecuaciones de la elastodinámica clásica

$$\rho u_{i,tt} = \sigma_{ij,j} + f_i \text{ en } Q_T \quad \text{ecuación de movimiento} \quad (1)$$

$$u_i = g_i \text{ en } \sum_{gT} \quad \text{Condición de Dirichlet} \quad (2)$$

$$\sigma_{ii} n_j = h_i \text{ en } \sum_{hT} \quad \text{Condición de Neuman} \quad (3)$$

$$u_i(\mathbf{r}, 0) = u_{oi}(\mathbf{r}) \quad \forall \mathbf{r} \text{ en } \Omega \quad \text{Condición inicial} \quad (4)$$

$$u_{i,t}(\mathbf{r}, 0) = \dot{u}_{oi}(\mathbf{r}) \quad \forall \mathbf{r} \text{ en } \Omega \quad \text{Condición inicial} \quad (5)$$

donde

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}, t) : Q_T &\rightarrow |R^3 && ; && \text{son las fuerzas de volumen} \\ g(\mathbf{r}, t) : \sum_{gT} &\rightarrow |R^3 && ; && \text{son los desplazamientos en el contorno } \Gamma_g \\ h(\mathbf{r}, t) : \sum_{hT} &\rightarrow |R^3 && ; && \text{son los esfuerzos en el contorno } \Gamma_h \\ \rho(\mathbf{r}) : \Omega &\rightarrow |R && ; && \text{es la densidad} \\ \lambda(\mathbf{r}) \text{ y } \mu(\mathbf{r}) : \Omega &\rightarrow |R && ; && \text{son los parámetros elásticos de Lamé} \end{aligned}$$

$\sigma$  es el tensor de tensiones de Cauchy,  $\varepsilon$  es el tensor de deformaciones y las componentes del tensor de deformaciones están relacionadas con las componentes del tensor de tensiones mediante la ley de Hooke.

$$\sigma_{ij} = \lambda(\text{div} \mathbf{u}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (6)$$

Las ecuaciones (1)–(6) modelan la evolución temporal del campo de desplazamientos en un medio lineal, elástico, no homogéneo e isótropo, sujeto a un campo de fuerzas  $\mathbf{f}$  y con condiciones de contorno de Dirichlet y Neumann.

Suponiendo que el campo solución es suficientemente regular, es posible introducir una formulación variacional de las ecuaciones (1)–(6) usando métodos clásicos<sup>24</sup>, que representa el problema en términos de expresiones integrales extendidas sobre todo el dominio  $\Omega$ . Puede mostrarse que ambas formulaciones son equivalentes (teorema de representación de Ritz<sup>25</sup>) y que la solución de la formulación variacional existe y es única en un espacio de funciones de Sobolev  $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = \{ \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \mid u_i(\mathbf{r}, t) \in C^m(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)), u_i(\mathbf{r}, t) = g_i(\mathbf{r}, t) \forall \mathbf{r} \in \Gamma_g \}$$

si se cumplen las siguientes condiciones<sup>24</sup>

$$\rho(\mathbf{r}) \geq \rho_0 > 0, \rho \in \mathbf{L}^\infty(\Omega) \quad \lambda(\mathbf{r}) \geq \lambda_0 > 0, \lambda \in \mathbf{L}^\infty(\Omega) \quad \mu(\mathbf{r}) \geq \mu_0 > 0, \mu \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$$

$$\mathbf{u} \in [\mathbf{H}^1(\Omega)]^3, \dot{u}_0 \in [\mathbf{L}^2(\Omega)]^3, \mathbf{f} \in [\mathbf{L}^2(\mathbf{Q}_T)]^3, \mathbf{h} \in [\mathbf{L}^2(\sum_T)]^3, \mathbf{g} \in [\mathbf{L}^2(\sum_T)]^3$$

donde

$\mathbf{L}^\infty(\Omega)$  es el espacio de las funciones esencialmente acotadas

$\mathbf{L}^2(\Omega)$  es el espacio de Sobolev de funciones

de cuadrado integrable en el sentido de Lebesgue

$\mathbf{H}^1(\Omega)$  es el espacio de Sobolev de orden 1

$C^m(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$ ,  $0 < T < +\infty$  es el espacio de las funciones continuas  $C^m$  en  $[0, T]$

$\mathbf{S}$  es el espacio de funciones en el que buscamos la solución del problema. Esta solución existe porque se puede mostrar que la forma continua, simétrica y bilineal de la formulación variacional es V-elíptica (desigualdad de Korn<sup>26</sup>).

### El método de los elementos finitos

El Método de los Elementos Finitos es un método para obtener aproximaciones a problemas formulados variacionalmente<sup>27</sup>. El método aproxima la dependencia espacial de un espacio funcional de dimensión infinita  $\mathbf{S}$ , con un subespacio  $\mathbf{S}^h$  de dimensión finita  $\eta$  igual al número de nodos. La base del espacio  $\mathbf{S}^h$  se compone de funciones  $N_i(\mathbf{r})$   $i = 1, 2 \dots \eta$ , que se caracterizan por tener soporte local, es decir, el soporte de las funciones  $N_i(\mathbf{r})$  se compone sólo de elementos que incluyen el nodo  $i$ . Además, las funciones  $N_i(\mathbf{r}_j) = \delta_{ij}$ .

Si  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \in \mathbf{S}$  es la solución que buscamos, el Método de los Elementos Finitos proporciona una solución aproximada  $\mathbf{u}^h(\mathbf{r}, t) \in \mathbf{S}^h$  dada por

$$u_i^h(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^{\eta} N_j(\mathbf{r}) a_{ij}(t) \quad i = 1, 2, 3 \quad (7)$$

es decir, las funciones  $u_i^h(\mathbf{r}, t)$  son una combinación lineal *adecuada* de los desplazamientos en los nodos ( $a_{ij}$ ) para el tiempo  $t$ .

Por lo tanto, el Método de los Elementos Finitos nos permite ir de un dominio continuo (infinitos puntos) y un espacio de dimensión infinita  $\mathbf{S}$  a un dominio discreto ( $\eta$  nodos) y un espacio de dimensión finita  $\mathbf{S}^h$ . El parámetro  $h$  hace referencia a una longitud característica asociada con el tamaño de la discretización del dominio  $\Omega$ . La dimensión de  $\mathbf{S}^h$  es función de  $h$  y si el método converge se alcanza la dimensión del espacio  $\mathbf{S}$  mediante refinamientos sucesivos de la malla,  $\lim_{h \rightarrow 0} \eta(h) = \infty$ .

La técnica de discretización de los Elementos Finitos, denotada usualmente como formulación Galerkin semidiscreta, reduce la formulación variacional al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden<sup>28</sup>:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{f}} \quad \forall t \in (0, T) \quad (8)$$

$$\mathbf{d}(0) = \mathbf{d}_0 \quad (9)$$

$$\dot{\mathbf{d}}(0) = \dot{\mathbf{d}}_0 \quad (10)$$

donde

$\mathbf{M}$  es la matriz de masa     $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez  
 $\hat{\mathbf{f}}$  es el vector de cargas     $\mathbf{d}$  es el vector de desplazamientos

La matriz  $\mathbf{M}$  viene determinada por la distribución de densidades dentro del dominio, la matriz  $\mathbf{K}$  se obtiene de las propiedades elásticas del medio y el vector  $\hat{\mathbf{f}}$  a partir de la fuente usada para generar las ondas y por las condiciones de contorno. Ambas matrices  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{K}$  son matrices huecas, simétricas y definidas positivas.

Puede mostrarse que usando una malla generada *correctamente*<sup>29</sup> y eligiendo la base apropiada para  $\mathbf{S}^h$  el problema semidiscreto admite una solución única  $\mathbf{u}^h$ <sup>24</sup> y la aproximación por Elementos Finitos converge a la solución con una velocidad de convergencia dada por

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}^h(t) - \mathbf{u}(t)\|_{1,\Omega} + \left\| \frac{d}{dt} \{\mathbf{u}^h(t) - \mathbf{u}(t)\} \right\|_{0,\Omega} = \\ & = O\{\mathbf{u}_{0,h}(t) - \mathbf{u}_0(t)\|_{1,\Omega} + \|\dot{\mathbf{u}}_{0,h}(t) - \dot{\mathbf{u}}_0(t)\|_{0,\Omega} + h^k\} \end{aligned} \quad (11)$$

donde  $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^2(0, T; \mathbf{H}^{k+1})$  y ( $k$ ) es el grado del polinomio completo que aparece en las funciones de base elegidas para la discretización.

Esta ecuación muestra que el error en desplazamientos y velocidades es una función de la aproximación matemática ( $h^k$ ) y de la aproximación de las condiciones iniciales.

Uno de los problemas que aparecen en la modelización numérica de la propagación de ondas en la tierra es la necesidad de usar un dominio acotado que genera reflexiones no deseadas. Un modo de evitarlo es usar un dominio muy grande, pero esta solución

queda excluida en la práctica porque requiere una enorme cantidad de almacenamiento. Para eliminar las reflexiones no deseadas se introduce un término de amortiguamiento  $A(x, y, z)u_{i,t}$  para  $i = 1, 2, 3$  en la ecuación diferencial (1), definido únicamente en una zona que rodea al dominio<sup>20,30</sup>. Este método puede ser muy preciso pero se requiere un ajuste del término de amortiguamiento.

La formulación Galerkin semidiscreta, incluyendo el término de amortiguamiento, es

$$M\ddot{d} + C\dot{d} + Kd = \hat{f} \quad \forall t \in (0, T) \tag{12}$$

$$d(0) = d_0 \tag{13}$$

$$\dot{d}(0) = \dot{d}_0 \tag{14}$$

donde la matriz de amortiguamiento  $C$  es también hueca, simétrica y definida positiva.

**Esquemas de Integración Temporal**

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden con coeficientes constantes que se acaba de obtener (12)–(14) hay que integrarlo en el intervalo de tiempo  $(0, T)$  discretizando la variable temporal como  $t_n = n\Delta t$   $0 \leq n \leq N$ , donde  $\Delta t = T/N$ . La solución  $d(t_n)$  se representará por  $d_n$ .

Se han analizado cinco esquemas diferentes para la integración temporal.

Los métodos NEWMARK<sup>31</sup> son esquemas lineales multipaso para ecuaciones de segundo orden, con dos pasos<sup>32</sup>. Entre los diferentes esquemas Newmark, se han escogido para el análisis el Método de las Diferencias Centradas (Central Difference C.D.) y el método de la Aceleración Media Constante (C.A.A.).

La ecuación de integración temporal para el esquema de DIFERENCIAS CENTRADAS<sup>33</sup> es

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2}M + \frac{1}{2\Delta t}C\right) d_{n+1} = \hat{f}_n - \left(K - \frac{2}{\Delta t^2}M\right) d_n - \left(\frac{1}{\Delta t^2}M + \frac{1}{2\Delta t}C\right) d_{n-1} \tag{15}$$

El método de las Diferencias Centradas es condicionalmente estable y tiene una precisión de orden 2.

Si las matrices de masa y amortiguamiento son diagonales,  $d_{n+1}$  puede obtenerse *explícitamente* mediante una simple división. En este caso el método se llama Diferencias Centradas Explícitas (Explicit Central Difference ECD). En caso contrario el método se denomina Diferencias Centradas Implícitas (Implicit Central Difference ICD).

Las condiciones de estabilidad están relacionadas con las velocidades de propagación de onda<sup>13</sup> mediante

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{\Delta x}{V_p} \quad \text{para ECD} \tag{16}$$

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{\Delta x}{\sqrt{3(V_p^2 + V_s^2)}} \quad \text{para ICD} \quad (17)$$

Para calcular  $\mathbf{d}_{n+1}$  es necesario conocer  $\mathbf{d}_n$  y  $\mathbf{d}_{n-1}$ , y por lo tanto se necesita un procedimiento de arranque diferente.

La ecuación de integración temporal para el método de la Aceleración Media Constante (Constant average Acceleration C.A.A.) es

$$\left( \mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} + \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{K} \right) \mathbf{d}_{n+1} = \frac{\Delta t^2}{4} \hat{\mathbf{f}}_{n+1} + \mathbf{M} \left( \mathbf{d}_n + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_n + \frac{\Delta t^2}{4} \ddot{\mathbf{d}}_n \right) + \mathbf{C} \left( \frac{\Delta t}{2} \mathbf{d}_n + \frac{\Delta t^2}{4} \dot{\mathbf{d}}_n \right) \quad (18)$$

Este esquema es incondicionalmente estable y no necesita de un procedimiento de arranque especial.

El método Houbolt<sup>34</sup> es uno de los esquemas más antiguos usados para problemas dinámicos. El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias se aproxima con el siguiente esquema

$$\left( \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{11}{6\Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) \mathbf{d}_{n+1} = \hat{\mathbf{f}}_{n+1} + \left( \frac{5}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{3}{3\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{d}_n - \left( \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{3}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{d}_{n-1} + \left( \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{3\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{d}_{n-2} \quad (19)$$

El método de Houbolt es un método multipaso lineal para ecuaciones de segundo orden, con tres pasos<sup>32</sup>, incondicionalmente estable y con precisión de segundo orden.

Para calcular  $\mathbf{d}_{n+1}$  es necesario conocer  $\mathbf{d}_n$ ,  $\mathbf{d}_{n-1}$  y  $\mathbf{d}_{n-2}$ , y por lo tanto se necesita un procedimiento de inicialización diferente. Generalmente se usa un esquema de Diferencias Centradas para ese propósito.

El método  $\Theta$  de Wilson<sup>35</sup> es un tipo especial de método de colocación<sup>36</sup> definido del modo siguiente

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}}_{n+\theta} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}}_{n+\theta} + \mathbf{K} \mathbf{d}_{n+\theta} = \hat{\mathbf{f}}_{n+\theta} \quad (20)$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_{n+\theta} = (1 - \theta) \ddot{\mathbf{d}}_n + \theta \ddot{\mathbf{d}}_{n+1} \quad (21)$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{n+\theta} = (1 - \theta) \hat{\mathbf{f}}_n + \theta \hat{\mathbf{f}}_{n+1} \quad (22)$$

$$\mathbf{d}_{n+\theta} = \mathbf{d} + \theta \Delta t \dot{\mathbf{d}}_n + \frac{(\theta \Delta t)^2}{2} \{ (1 - 2\beta) \ddot{\mathbf{d}}_n + 2\beta \ddot{\mathbf{d}}_{n+\theta} \} \quad (23)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_{n+\theta} = \dot{\mathbf{d}}_n + \theta \Delta t \{ (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{d}}_n + \gamma \ddot{\mathbf{d}}_{n+\theta} \} \quad (24)$$

donde  $\theta$  es el parámetro de colocación.

Los métodos de colocación son esquemas multipaso lineales con tres pasos. Para  $\beta = 1/6$  y  $\gamma = 1/2$  el esquema resultante es el método  $\theta$  de Wilson. En nuestros



experimentos se ha escogido  $\theta = 1.4$ . Este método es incondicionalmente estable y con precisión de segundo orden. Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (20-24) y expresando  $\ddot{\mathbf{d}}_{n+\theta}$  y  $\dot{\mathbf{d}}_{n+\theta}$  como una función  $\mathbf{d}_{n+\theta}$  mediante (23,24) se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\ddot{\mathbf{d}}_{n+\theta} = \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} (\mathbf{d}_{n+\theta} - \mathbf{d}_n) - \frac{6}{\theta \Delta t} \dot{\mathbf{d}}_n - 2\ddot{\mathbf{d}}_n \tag{25}$$

$$\dot{\mathbf{d}}_{n+\theta} = \frac{3}{\theta \Delta t} (\mathbf{d}_{n+\theta} - \mathbf{d}_n) - 2\dot{\mathbf{d}}_n - \frac{\theta \Delta t}{2} \ddot{\mathbf{d}}_n \tag{26}$$

Introduciendo (25,26) en (20) se obtiene un sistema de ecuaciones para  $\mathbf{d}_{n+\theta}$ .

$$\left( \mathbf{M} + \frac{\theta \Delta t}{2} \mathbf{C} + \frac{\theta^2 \Delta t^2}{6} \mathbf{K} \right) \mathbf{d}_{n+\theta} = \frac{\theta^2 \Delta t^2}{6} \hat{\mathbf{f}}_{n+\theta} + \mathbf{M} \left( \mathbf{d}_n + \theta \Delta t \dot{\mathbf{d}}_n + \frac{\theta^2 \Delta t^2}{3} \ddot{\mathbf{d}}_n \right) + \mathbf{C} \left( \frac{\theta \Delta t}{2} \mathbf{d}_n + \frac{\theta^2 \Delta t^2}{3} \dot{\mathbf{d}}_n + \frac{\theta^3 \Delta t^3}{12} \ddot{\mathbf{d}}_n \right) \tag{27}$$

Calculando  $\mathbf{d}_{n+\theta}$  mediante (27) y sustituyendo en (25,26), se obtienen los valores de  $\ddot{\mathbf{d}}_{n+\theta}$  y  $\dot{\mathbf{d}}_{n+\theta}$ . Con la ecuación (21) se calcula el valor de  $\ddot{\mathbf{d}}_{n+1}$ , que es usado con  $\theta = 1$  en la ecuación (23) para obtener el valor de  $\mathbf{d}_{n+1}$ . No se requiere un procedimiento especial de arranque.

Bajo las hipótesis para las propiedades funcionales de la formulación de las ecuaciones de la elastodinámica, cualquiera de los métodos descritos hasta ahora para la solución del problema totalmente discretizado conduce a una única solución  $\mathbf{u}_n^h \in \mathbf{S}^{h,25}$ . Si la función  $\mathbf{u}$  es suficientemente regular, por ejemplo  $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^2(0, T; \mathbf{H}^{k+1}(\Omega))$ , el orden de convergencia para todos los métodos descritos es

$$\|\mathbf{u}_n^h(t) - \mathbf{u}(t_n)\|_{0,\Omega} \leq O[\|\mathbf{u}_{0,h} - \mathbf{u}_0\|_{0,\Omega} + \|\dot{\mathbf{u}}_{0,h}(t) - \dot{\mathbf{u}}_0\|_{0,\Omega} + h^{k+1} + \Delta t^2] \tag{28}$$

### Errores Numéricos de Discretización

El modelado de la propagación de ondas elásticas en un medio continuo mediante la discretización en tiempo y en espacio, introduce varios errores asociados a efectos numéricos diferentes. Para evitar alguno de estos errores las mallas espaciales y temporales deben escogerse cuidadosamente.

La precisión del modelado de ondas monocromáticas depende fuertemente del número de nodos por longitud de onda, en el caso de propagación de ondas generadas por una fuente sísmica, la respuesta del subsuelo consiste en un conjunto de ondas de diferentes longitudes de onda, periodos y amplitudes, que inciden sobre las interfaces geológicas a ángulos diferentes, generando un gran número de fenómenos de reflexión, refracción, conversión y difracción.

Cuando una onda se propaga en un dominio complejo a través de una malla, ésta atraviesa un número de nodos que depende de la posición y de la dirección. Por ejemplo, en una malla rectangular regular el número de nodos es máximo en la dirección de los ejes de la malla y mínimo en la dirección a 45 grados de los ejes (hay una relación de  $\sqrt{2}$  en el número de nodos).

Entonces, las diferentes longitudes de onda presentes en la onda que se propaga quedan modeladas en una posición dada del dominio con un número diferente de nodos por longitud de onda. Además, cada longitud de onda de la onda que se propaga se modela en cada instante de tiempo de modo diferente según la posición y la dirección.

Desde el punto de vista de la integración temporal, las diferentes frecuencias que están presentes en la onda sísmica se modelan usando un número distinto de pasos temporales. Desde esta óptica, el modelado numérico puede considerarse como un filtro paso bajo, ya que las bajas frecuencias (longitud de onda grande comparada con el tamaño de la malla) se propagan correctamente, mientras que las altas frecuencias (longitud de onda pequeña comparada con el tamaño de la malla) no se propagan bien.

La precisión del modelado de ondas mediante discretización en el espacio y el tiempo es una función decreciente de la resolución espacial y temporal (11,28). Por lo tanto el espaciado de la malla y el paso temporal deben escogerse de modo que optimicen la relación entre coste computacional y precisión.

Los efectos numéricos principales que aparecen son los siguientes:

- Atenuación o amplificación numérica de las ondas durante su propagación en el tiempo<sup>13,28,37</sup>. Este efecto no tiene nada que ver con el término de amortiguamiento en la ecuación diferencial.
- Anisotropía numérica asociada con el cambio en la velocidad de propagación de onda con la dirección<sup>10,13</sup>.
- Dispersión numérica de las velocidades de fase y grupo de ondas no dispersivas<sup>13-15</sup>.
- Polarización numérica de los componentes del vector desplazamiento. Este efecto puede observarse cuando se propaga una onda polarizada longitudinal o transversalmente. En ese caso, los campos de ondas se vuelven quasi-longitudinales y quasi-tangenciales<sup>10-13</sup>.
- Cambios en el tamaño de los elementos (mallas no homogéneas), o el uso de elementos de mayor orden en algunas regiones, pueden introducir modos de vibración parásitos (puramente numéricos), en especial a altas frecuencias, que deben suprimirse<sup>16,17</sup>.

A partir de los artículos referenciados, puede concluirse que para modelar correctamente una onda es necesario aproximarla usando al menos 10 nodos por cada longitud de onda. En este caso todos los efectos mencionados anteriormente son minimizados.

Los efectos asociados con la discretización temporal dependen fuertemente del método de integración escogido y se discutirán en la sección de experimentos numéricos.

### Métodos de resolución para sistemas lineales, simétricos y huecos de ecuaciones algebraicas

Todos los esquemas de integración temporal descritos en la sección previa (excepto

las Diferencias Centradas Explícitas), conducen a un sistema de ecuaciones algebraicas lineal, hueco, simétrico, bien condicionado y definido positivo con coeficientes constantes

$$\mathbf{A}d_{n+1} = \mathbf{b} \quad (29)$$

Este tipo de sistemas pueden resolverse bien por métodos iterativos o por métodos directos. Los métodos directos se basan en la eliminación Gaussiana<sup>38</sup> y generalmente las matrices se almacenan usando métodos línea de horizonte (skyline) o por filas (row wise).

Estos métodos han sido usados frecuentemente en el pasado y producen en general resultados satisfactorios. Sin embargo, para sistemas grandes su efectividad decrece principalmente por la gran cantidad de relleno (fill-in), lo que acarrea unas grandes necesidades de almacenamiento. En este trabajo se han usado:

- El método de Crout (30) usando pivotado para una matriz simétrica, hueca y definida positiva, almacenada en representación línea de horizonte (skyline).

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T \quad (30)$$

donde  $\mathbf{L}$  es una matriz triangular inferior y  $\mathbf{D}$  es una matriz diagonal.

- La eliminación Gaussiana (31) usando un contador modificado de Markowitz con pivotado de umbral (threshold pivoting)<sup>39</sup>, para una matriz hueca general  $\mathbf{A}$  almacenada en representación por filas (row wise).

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U} \quad (31)$$

donde  $\mathbf{L}$  es una matriz triangular inferior y  $\mathbf{U}$  es una matriz triangular superior.

Por otro lado los métodos iterativos no generan *relleno* (fill in) y por lo tanto requieren mucho menos almacenamiento cuando se usa un esquema de representación apropiado. Además, si el número de iteraciones necesario para resolver el sistema con la precisión requerida no es elevado, los sistemas iterativos tienen un coste computacional inferior porque solo operan con elementos que son distintos de cero.

De entre los métodos iterativos, la Sobrerrelajación Sucesiva (SOR) el método de Jacobi Semiiterativo (JSI) y el Jacobi Gradiente Conjugado (JCG) se usan frecuentemente. Estos métodos se describen en detalle en<sup>40</sup>, pero en los tres casos el algoritmo empleado consta de los siguientes bloques:

#### • PRECONDICIONADO DIAGONAL

La matriz  $\mathbf{A}$  en (29) puede descomponerse en

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{C}_L - \mathbf{C}_U \quad (32)$$

donde  $\mathbf{D}$  es una matriz,  $\mathbf{C}_L$  en una matriz triangular y  $\mathbf{C}_U$  es una matriz triangular superior.

Escalando la matriz diagonal  $\mathbf{D}^{1/2} = \text{Diag}[(a_{ii})^{1/2}]$  premultiplicando (29) por  $\mathbf{D}^{-1/2}$  obtenemos

$$(\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{A}\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}})(\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{d}_{n+1}) = \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{b} \quad (33)$$

que puede ser escrito como el siguiente sistema preconditionado

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B})\mathbf{u} = \mathbf{c} \quad (34)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{L} + \mathbf{U} \quad \mathbf{L} = \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{C}_L\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \quad \mathbf{U} = \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{C}_U\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{d}_{n+1} \quad \mathbf{c} = \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{b} \end{aligned}$$

Para obtener la solución del sistema original una vez que  $\mathbf{u}$  se ha encontrado, se ha de resolver el sistema

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{u} \quad (35)$$

#### • ESQUEMAS ITERATIVOS BASICOS

Los métodos básicos usados en este trabajo son Jacobi y Sobrerelajación Sucesiva (SOR). Estos métodos son estacionarios, lineales y de primer orden.

$$\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{B}\mathbf{u}^{(n)} + \mathbf{c} \quad \text{Jacobi} \quad (36)$$

$$\mathbf{u}^{(n+1)} = (1 - \omega\mathbf{L})^{-1}[(1 - \omega)\mathbf{I} + \omega\mathbf{U}]\mathbf{u}^{(n)} + \omega(1 - \omega\mathbf{L})^{-1}\mathbf{c} \quad \text{SOR} \quad (37)$$

#### • TECNICAS DE ACELERACION DE LA CONVERGENCIA

Los métodos iterativos pueden mejorar su velocidad de convergencia mediante el uso de técnicas polinomiales de aceleración tales como Chebyshev o Gradiente Conjugado.

Para el método de Jacobi, si  $\mathbf{A}$  es simétrica y definida positiva, los métodos acelerados pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(n+1)} &= \rho_{n+1}[\gamma_{n+1}(\mathbf{G}\mathbf{u}^{(n)} + \mathbf{k}) + (1 - \gamma_{n+1})\mathbf{u}^{(n)}] + \\ &+ (1 - \rho_{n+1})\mathbf{u}^{(n+1)} \quad \text{con } \rho_1 = 1 \end{aligned} \quad (38)$$

El método de aceleración de Chebyshev se obtiene de

$$\rho_{n+1} = \begin{cases} 1 & n = s \\ [1 - 2(\sigma/2)^2]^{-1} & n = s + 1 \\ [1 - (\sigma/2)^2\rho_n]^{-1} & n \geq s + 2 \end{cases} \quad (39)$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{2}{[2 - M(G) - m(G)]}$$

$$\sigma = \frac{[M(G) - m(G)]}{[2 - M(G) - m(G)]}$$

donde  $M$  y  $m$  son el mayor y el menor valor propio de  $\mathbf{G}$  respectivamente.

El método de aceleración del Gradiente Conjugado se obtiene de

$$\begin{aligned}\rho_{n+1} &= \{1 - \gamma_{n+1}(\gamma_n \rho_n)^{-1}(\delta^{(n)}, \mathbf{D}\delta^{(n)})/(\delta^{(n-1)}, \mathbf{D}\delta^{(n-1)})\}^{-1} \\ \gamma_{n+1} &= \{1 - (\delta^{(n)}, \mathbf{D}\mathbf{B}\delta^{(n)})/(\delta^{(n-1)}, \mathbf{D}\delta^{(n-1)})\}^{-1}\end{aligned}\quad (40)$$

donde  $\delta^{(n)} = \mathbf{B}\mathbf{u}^{(n)} + \mathbf{c} - \mathbf{u}^{(n)}$

Para el método SOR se emplea una aproximación heurística descrita en<sup>40</sup> para estimar el parámetro de relajación óptimo.

#### • CRITERIO DE PARADA

Dada una cota para el error  $\varepsilon$ , las iteraciones se detienen cuando

$$\frac{[1 - M(\mathbf{G})^{-1}]\|\delta^{(n)}\|_2}{\|\mathbf{u}^{(n)}\|_2} < \varepsilon \quad (41)$$

#### • CALCULO DE LOS PARAMETROS DE ACELERACION

Los métodos para calcular valores aproximados para  $M(\mathbf{G})$  y  $m(\mathbf{G})$  se basan en la ecuación de Chebyshev y en la relación de Rayleigh. Se pueden encontrar detalles de estos métodos en<sup>41</sup>.

#### • REPRESENTACION DE MATRICES

Se han propuesto varios métodos para almacenar eficientemente las matrices huecas. En los métodos iterativos los procedimientos usados más generalmente son la representación por filas (row wise), que minimiza los requerimientos de almacenamiento y es muy útil para métodos de resolución escalares; la representación de matriz comprimida (compressed matrix), que es muy adecuada para métodos de resolución vectoriales, y la representación diagonal comprimida (compressed diagonal), que solo puede usarse cuando el dominio y la malla son regulares pero que conduce a los métodos de resolución vectoriales más eficientes.

La Tabla I muestra las necesidades de almacenamiento en *Kpalabras* para la matriz  $\mathbf{A}$ . Dicha matriz corresponde a una malla regular con condiciones de contorno y dos grados de libertad por nodo. En la Tabla I aparecen los resultados para tres tamaños de malla diferentes. Se observa que el esquema por filas (row wise) es el más eficiente seguido por la diagonal comprimida (compressed diagonal) y la matriz comprimida (compressed matrix). Sin embargo, para mallas irregulares la representación diagonal comprimida se deteriora mientras que la matriz comprimida mantiene su eficiencia.

### Experimentos numéricos

El objetivo de este trabajo es el análisis de las diferentes técnicas numéricas descritas en las secciones previas desde el punto de vista de la precisión, prestaciones y necesidades de almacenamiento. Para este fin se ha puesto a punto un programa de Elementos Finitos 2D en un multiprocesador vectorial IBM 3090<sup>42</sup>. El programa se ha empleado para comprender los aspectos computacionales del método y su adecuación a arquitecturas escalares y vectoriales.

Método	63 × 63	127 × 127	257 × 257
Skyline	934.2	7922	66781
row wise	70.4	296.2	1234
matriz comprimida	143.7	598.5	2481
diagonal comprimida	83.2	346.5	1436

Tabla I.

La estructura de bloques del programa es la generalmente usada en los paquetes de diseño asistido por ordenador: un preprocesador, un procesador y un postprocesador.

Para analizar las prestaciones de los diferentes métodos, se han empleado elementos isoparamétricos, de cuatro lados, bilineales de clase  $C^0$  y se ha simulado la propagación de una onda  $P$  y una onda  $S$  en un medio homogéneo con propiedades elásticas  $V_p = 6.0 \text{ km/s}$  y  $\rho = 2526 \text{ kg/m}^3$ , usando una malla de resolución espacial  $\Delta x = \Delta y = 30 \text{ m}$ , y paso temporal  $\Delta t = 0.002 \text{ s}$ .

La Tabla II muestra el tiempo en segundos necesario para avanzar la solución un paso temporal con diferentes resoluciones espaciales usando todos los métodos de resolución de ecuaciones lineales considerados en este trabajo y el método de la Aceleración Media Constante para la integración temporal.

Método	63 × 63	127 × 127	257 × 257
<b>Directos</b>			
CROUT (escalar)	1.36		
ESSL			
DGSS (vector)	0.47	2.34	
<b>Iterativos</b>			
<b>ITPACK-2C</b>			
JSI (escalar)	4.87	20.5	86.9
SOR (escalar)	2.07	8.70	35.4
JCG (escalar)	1.48	6.20	26.0
JCG (vector)	1.33	5.61	23.7
ESSL			
DSDCG (vector)	0.30	1.24	5.54

Tabla II.

De entre los métodos directos hemos usado un método de resolución escalar diseñado para matrices que empleen representación línea de horizonte (skyline), y un método de resolución vectorial, DGGS, de la biblioteca ESSL<sup>22</sup>, diseñada para matrices que empleen la representación por filas (row wise). El tiempo asignado a estos métodos no incluye el tiempo necesario para efectuar la descomposición de la matriz, que en el caso de la resolución  $63 \times 63$  es igual a 563.4 segundos para el método de Crout y a 51 segundos para el método DGGS. Por lo tanto, el tiempo por paso debe incrementarse incluyendo el tiempo necesario para descomponer la matriz dividido por el número de pasos temporales. Se observa que para problemas muy pequeños, los métodos directos vectorizados pueden representar una solución eficiente cuando la matriz se factoriza solo una vez al inicio de la simulación. Sin embargo para grandes problemas, las prestaciones se deterioran y especialmente las necesidades de almacenamiento se vuelven más grandes que las de los métodos iterativos, debido al relleno (fill in) introducido por la eliminación Gaussiana. Se puede concluir de la Tabla II que los métodos iterativos requieren menos operaciones y por lo tanto en el caso de grandes sistemas huecos, tales como los que resultan de grandes problemas 2D y todavía más en los casos 3D, los métodos directos son ineficientes.

De entre los métodos iterativos, hemos empleado tres rutinas de la biblioteca ITPACK-2C; SOR, JSI y JCG. La Tabla II muestra que el JCG tiene una mayor eficiencia que el SOR y el JSI. Esto es debido al hecho de que la velocidad de convergencia de JCG es mayor. JCG tiene también la ventaja de que no depende de ningún parámetro a optimizar, y además presenta un gran potencial de vectorización. Sin embargo, si la rutina JCG de la biblioteca ITPACK-2C se compila con el compilador vectorial VS FORTRAN<sup>43</sup>, los resultados de la Tabla II muestran que la relación de velocidades vector/escalar es solamente de 1.11.

El método usado por la ITPACK-2C para almacenar matrices huecas es la representación por filas (row wise). Sin embargo, este método de representación no es adecuado para ordenadores vectoriales, porque el producto matriz-vector, que representa la mayor parte del tiempo de solución del algoritmo JCG, no se vectoriza eficientemente cuando este tipo de representación es utilizado<sup>44</sup>. En el caso de procesadores vectoriales, otras representaciones para almacenamiento son más eficientes. De hecho, la biblioteca vectorizada ITPACKV-2C<sup>45</sup> usa la representación de matriz comprimida (compressed matrix). En los casos en que los coeficientes de la matriz se sitúan en unas pocas diagonales (i.e. en mallas regulares) la representación de diagonal comprimida (compressed diagonal) es la más apropiada para generar código altamente vectorizable<sup>44</sup>. En este trabajo se usa la rutina DSDCG de la biblioteca ESSL<sup>22</sup>, que es una implementación del algoritmo del Gradiente Conjugado, altamente ajustado a las capacidades vectoriales del multiprocesador IBM 3090. Para usar el mismo algoritmo que se emplea en la rutina JCG de ITPACK-2C, se emplea la opción de preconditionamiento diagonal en la rutina DSDCG. Los resultados mostrados en la Tabla II para la rutina DSDCG de ESSL muestran un factor de aceleración de 4.9, muy satisfactorio, respecto del JCG escalar.

La Tabla III muestra el tiempo en segundos necesario para avanzar la solución un paso temporal usando los diferentes esquemas de integración temporal indicados en este trabajo y, para el caso implícito, el método del Gradiente Conjugado con

representaciones por filas (row wise) y de diagonal comprimida (compressed diagonal). Esos resultados se han obtenido usando una resolución de malla de  $257 \times 257$  y un paso temporal de  $\Delta t = 0.001s$ , que está por debajo del valor crítico del método de Diferencias Centradas Implícito ( $\Delta t_{crit} = 0.0026s$ ). Es evidente que las Diferencias Centradas Explícitas son mucho más eficientes que los métodos implícitos, y por lo tanto, desde el punto de vista de las representaciones, debe de ser el elegido. De entre los esquemas implícitos, Houbolt es el más eficiente seguido en orden decreciente por Wilson, Aceleración Media Constante y Diferencias Centradas Implícitas.

Solver	C.D.	C.A.A.	Wilson	Houbolt
<b>Explícitos</b>	0.26			
<b>Implícitos</b>	0.26			
ITPACK-2C	28.06	23.7	22.0	20.1
ESSL	6.77	5.54	5.14	4.98

Tabla III.

En trabajos anteriores se implementó el modelado elástico usando métodos Pseudo-Espectrales<sup>46</sup> y de Diferencias Finitas<sup>47</sup>, basados en las ecuaciones de onda elástica en términos de esfuerzos en la misma arquitectura informática (3090 VF). La Tabla IV muestra el tiempo en segundos por paso temporal y las prestaciones en Mflops/s para la solución de las ecuaciones de onda elásticas 2D usando los métodos Pseudo-Espectral, Diferencias Finitas y Elementos Finitos. Estos resultados muestran que el Método de los Elementos Finitos Explícito, basado en las ecuaciones de onda elásticas en términos de desplazamientos es más rápido que el método Pseudo-Espectral y aproximadamente un 50% más lento que las Diferencias Finitas Explícitas.

Método	127x127		255x255	
	Tiempo(s)	Mflops	Tiempo(s)	Mflops
Pseudo Espectral	0.187	28.3	0.762	31.1
FDM	0.040	32.7	0.164	32.2
FEM	0.061	25.7	0.263	24.8

Tabla IV.

Los errores que resultan de los diferentes métodos de integración se miden generalmente en términos de elongación del periodo y decaimiento de la amplitud<sup>28</sup>.



Para analizar estos errores se ha simulado la propagación de una onda plana durante 8 longitudes de onda en un medio homogéneo con propiedades elásticas  $V_p = 2\text{km/s}$ ,  $V_s = 1\text{km/s}$  y  $\rho = 2740\text{ kg/m}^3$ , usando una malla de resolución espacial  $\Delta x = \Delta y = 10\text{ m}$ , y diferentes pasos de tiempo entre 1 y 8 ms (el valor crítico para las Diferencias Centradas Implícitas es de 2.9 ms y el valor crítico para las Diferencias Centradas Explícitas es 5 ms). Calculando la transformada de Fourier en el tiempo de las ondas teóricas y modeladas y estimando el área, la frecuencia fundamental, la anchura del espectro de potencia y la relación de ambos espectros, se miden los errores debidos al decaimiento de la amplitud y a la elongación del periodo.

Desde el punto de vista del decaimiento de la amplitud la Figura 1 muestra que los métodos de Houbolt y Wilson producen un gran amortiguamiento de las ondas y por lo tanto no pueden usarse en aplicaciones realistas. Las Diferencias Centradas Implícitas presentan un comportamiento satisfactorio pero al tener un bajo  $\Delta t_{cr}$  presentan una eficiencia pobre ya que otros métodos producen los mismos errores con  $\Delta t$  mucho más grandes. La Aceleración Media Constante y las Diferencias Centradas Explícitas muestran variaciones de la amplitud muy pequeñas. Un comportamiento similar se observa cuando se considera la elongación del periodo. Sin embargo, en este caso la Aceleración Media Constante produce elongación del periodo para pasos temporales ligeramente por encima del valor crítico de las Diferencias Centradas Explícitas ( $\Delta \sim 0.008\text{ s}$ ) ya que el espectro se deteriora para grandes  $\Delta t$  y por lo tanto con los métodos implícitos analizados en este trabajo no es posible utilizar un paso temporal mucho mayor que el de los métodos explícitos.

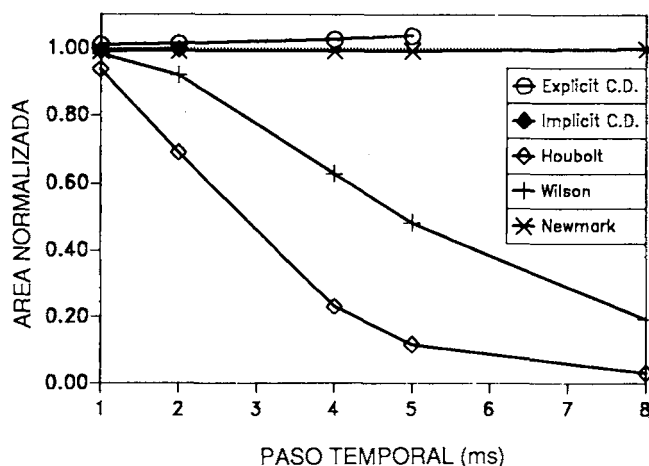


Figura 1. Área normalizada del espectro de potencia de la onda modelada en función del paso temporal,  $\Delta t$ , usando diferentes esquemas de integración temporal.

Como un ejemplo de la aplicación del método, se ha modelado la estructura geológica mostrada en la Figura 2. Consiste en una capa plana y una capa inferior que buza. Por debajo de esta discontinuidad existe una capa anticlinal conteniendo un depósito simulado de hidrocarburos en lo alto. La anchura del modelo es 3200 m y su profundidad se extiende hasta 2240 m. El resumen de prestaciones de la simulación se

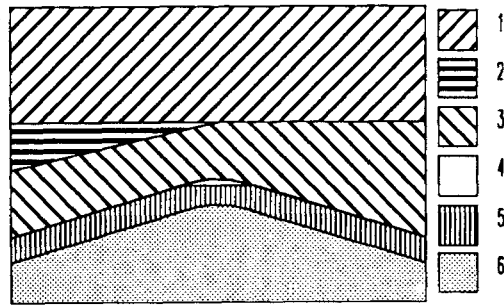


Figura 2. Estructura geológica.

Esquema de Integración temporal	C.A.A.
Método de resolución lineal	DSDCB
Paso temporal	0.002"
Número de pasos temporales	800
Número de elementos	112000
Número de nodos	112681
Número de ecuaciones	222642
Tiempo de CPU	298' 48"
Tiempo total	512' 00"
Número mínimo de iteraciones	6
Número máximo de iteraciones	83

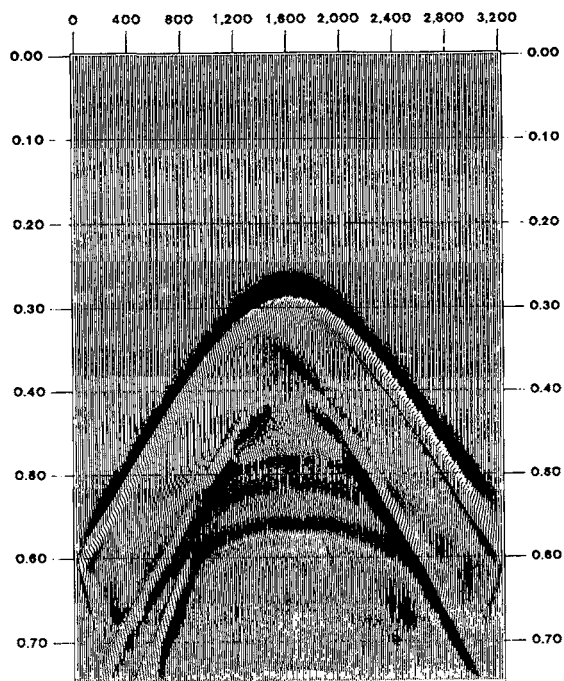
Tabla V. Resumen de prestaciones de la simulación.

describe en la Tabla V, y la Figura 3 muestra un shot gather obtenido al ejecutar el modelo.

### Conclusiones

De los resultados de los experimentos numéricos se concluye que:

- Para la integración temporal las Diferencias Centradas con masa y amortiguamiento diagonales (Diferencias Centradas Explícitas) son un método muy efectivo en términos de velocidad y almacenamiento, pero su precisión no siempre es suficiente. Por lo tanto es adecuado para comprender cualitativamente los fenómenos físicos y estudiar tiempos de llegada.
- La Aceleración Media Constante es más preciso y por lo tanto es adecuado para comprender cuantitativamente el fenómeno físico y para estudiar tiempos de llegada y efectos de amplitud.
- Para la solución de los sistemas lineales resultantes, los métodos iterativos son los mejores debido a sus bajas necesidades de almacenamiento y bajo coste computacional para problemas grandes. Entre los métodos iterativos, es el Jacobi Gradiente Conjugado el que tiene mejores prestaciones.
- En cuanto a esquemas de representación el almacenamiento por filas (row



COMPONENTE V DEL SISMOGRAMA

Figura 3. Common shot gather.

wise) es el más económico para ordenadores escalares. Sin embargo, no es vectorizable en ordenadores vectoriales y por lo tanto se necesitan otros esquemas de representación. La representación diagonal comprimida (compressed diagonal) produce los esquemas vectorizados más eficientes pero sólo puede usarse en el caso de mallas regulares que generan matrices cuyos elementos se distribuyen en pocas diagonales. El esquema de matriz comprimida (compressed matrix) es ligeramente menos eficiente pero puede usarse también con mallas irregulares.

## REFERENCIAS

1. K.R. Kelly, K.R. Ward, S. Treitel y R.M. Alford, "Synthetic seismograms: a Finite-Difference approach", *Geophysics*, Vol. 41, pp. 2-27, (1976).
2. R.M. Alford, K.R. Kelly y D.M. Boore, "Accuracy of Finite Difference modeling of the acoustic wave equation", *Geophysics*, Vol. 39, pp. 834-842, (1974).
3. J. Lysmer y L.A. Drake, "Methods in computational physics", *A Finite Element Method for seismology*, Vol. 11, pp. 181-216, ed. B.A. Bolt, Academic Press, New York, (1972).
4. F.J. Seron y J. Badal, "A weak variational formulation for the propagation of love waves", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 23, pp. 1601-1613, (1986).
5. D.D. Kosloff y E. Baysal, "Forward modeling by a Fourier method", *Geophysics*, Vol. 47, pp. 1402-1412, (1982).
6. B. Fornberg, "The Pseudospectral method: comparisons with Finite Difference for the elastic wave equation", *Geophysics*, Vol. 52, pp. 483-501, (1987).

7. M. Kindelan, G. Seriani y P. Sguazzero, "Pseudo-Spectral elastic modeling and its application to amplitude versus angle interpretation", *Geophysical Prospecting*, en prensa, (1988).
8. O.C. Zienkiewicz, "A Finite Element Method", McGraw-Hill, London, (1977).
9. A. Mueller y G.F. Carey, "Continuously deforming finite element meshes", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 21, pp. 2099-2126, (1985).
10. K.J. Marfurt, "Accuracy of Finite-Difference and Finite-Element modeling of the scalar and elastic wave equations", *Geophysics*, Vol. 49, pp. 533-549, (1984).
11. M.J.P. Cullen y K.W. Morton, "Analysis of evolutionary error in Finite Element and other methods", *J. Comput. Phys.*, Vol. 34, pp. 245-267, (1980).
12. R.J. Machinnon y G.F. Carey, "Treatment of material discontinuities in finite element computations", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 24, pp. 393-417, (1987).
13. A. Bamberguer, G. Chavent y P. Lailly, "Etude de schemas numeriques pour les equations de l'elastodynamique lineaire", *INRIA, Rapports de Recherche*, Vol. 41, (1980).
14. R. Mullen y T. Belytschko, "Dispersion analysis of Finite Element semidiscretizations of the two-dimensional wave equation", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 18, pp. 11-29, (1982).
15. T. Belytschko y R. Mullen, "Modern problems in elastic wave propagation", *On dispersive properties of Finite Element solutions*, eds. J. Miklowitz et al., John Wiley & Sons, Inc., New York, (1978).
16. M.J.P. Cullen, "The use of quadratic Finite Element Methods and irregular grids in the solution of hyperbolic problems", *J. Comput. Phys.*, Vol. 45, pp. 221-245, (1982).
17. I. Fried, "Irregular finite element meshes in elastodynamics", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 16, pp. 626-628, (1980).
18. Z. Celep y Z.P. Bazant, "Spurious reflection of elastic waves due to gradually changing finite element size", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 19, pp. 631-646, (1983).
19. E. Hinton, T. Rock y O.C. Zienkiewicz, "A note on mass lumping and related processes in the Finite Element Method", *Earthquake Eng. Str. Dyn.*, Vol. 4, pp. 245-249, (1976).
20. Y.K. Chow, "Accuracy of consistent and lumped viscous damper in wave propagation problems", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 21, pp. 723-732, (1985).
21. D. Kincaid, J. Respass, D. Young y R. Grimes, "Algorithm 586 ITPACK-2C: A Fortran package for solving large sparse linear systems by adaptive accelerated iterative methods", *ACM Trans. Math. Soft.*, Vol. 8, pp. 302-322, (1982).
22. ESSL, *Engineering and Scientific Subroutine Library*, Guide and Reference, Order No. SC23-0184-2. available through IBM branch offices.
23. J.D. Achenbach, "Wave propagation in elastic solids", *North Holland Publishing Company*, The Netherlands, (1975).
24. P.A. Raviart y J.A. Thomas, "Introduction a l'analyse numerique des equations aux derivees partiales", *Masson*, Paris, (1983).
25. G. Strang y J. Fix, "An Analysis of the Finite Element Method", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1973).
26. J.A. Nitsche, "On Korn's second inequality", *RAIRO Analyse Numerique*, Vol. 15, pp. 237-248, (1981).
27. G.F. Carey y J.T. Oden, "Finite Elements. A second course", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1983).
28. T.J.R. Hughes, "The Finite Element Method", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1987).
29. P.G. Ciarlet, "The Finite Element Method for Elliptic Problems", North-Holland

- Publishing Company, New York, (1978).
30. J. Sochacki, R. Kubichek, J. George, W.R. Fletcher y S. Smithson, "Absorbing boundary conditions and surface waves", *Geophysics*, Vol. 52, pp. 60-71, (1987).
  31. N.M. Newmark, "A method of computation for structural dynamics", *Am. Soc. Civil Eng. Mech. Div.*, Vol. 85, pp. 67-94, (1959).
  32. M. Geradin, "A classification and discussion of integration operators for transient structural response", paper presentado a AIAA 12th Aerospace Sciences Meeting, Washington, D.C., pp. 74-105, (1974).
  33. L. Collatz, "*The Numerical treatment of differential equations*", Springer-Verlag, New York, (1966).
  34. J.C. Houbolt, "A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft", *J. Aer. Sci.*, Vol. 17, pp. 540-550, (1950).
  35. E.L. Wilson, I. Farhoomand y K.J. Bathe, "Nonlinear dynamic analysis of complex structures", *Earthquake Eng. Str. Dyn.*, Vol. 1, pp. 241-252, (1973).
  36. H.M. Hilber y T.J.R. Hughes, "Collocation, Dissipation and Overshoot for time Integration schemes in structural dynamics", *Eart. Eng. Struc. Dyn.*, Vol. 6, pp. 99-118, (1978).
  37. K.J. Bathe y E.L. Wilson, "*Numerical methods in Finite Element Analysis*", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, (1976).
  38. I.S. Duff, A.M. Erisman y J.K. Reid, "Direct methods for sparse matrices", Oxford University Press (Clarendon), Oxford, (1986).
  39. Z. Zlatev, "On some pivotal strategies in Gaussian elimination by sparse technique", *Siam J. Num. Anal.*, Vol. 17 (1), pp. 18-30, (1980).
  40. L. Hageman y D.M. Young, "*Applied iterative methods*", Academic Press, New York, (1981).
  41. R.G. Grimes, D.R. Kincaid y D.M. Young, "ITPACK", CNA-150, Center Numerical Analysis, Univ. Texas, Austin, Texas, (1979).
  42. S.G. Tucker, "The IBM 3090 system: An overview", *IBM Systems Journal*, Vol. 25, pp. 4-19, (1986).
  43. VS FORTRAN, Version 2, General Description, Order No. GC26-4219, available through IBM branch offices.
  44. G. Radicati y M. Vitaletti, "Sparse matrix-vector product and storage representations on the IBM 3090 with Vector Facility" *IBM Research Report G513-4098*, IBM ECSEC, Rome, (1986).
  45. D.R. Kincaid, T.C. Oppe, J.R. Respers y D.M. Young, "ITPACKV-2C user's guide", CNA-191, Center Numerical Analysis, Univ. Texas, Austin, Texas, (1984).
  46. M. Kindelan, P. Sguazzero y A. Kamel, "Elastic modeling with Fourier methods on the IBM 3090 vector multiprocessor", *Scientific computing on IBM vector multiprocessors*, R. Benzi y P. Sguazzero editores, IBM European Center for Scientific and Engineering Computing, Rome, pp.635-674, (1987).
  47. A. Kamel, M.Kindelan y P. Sguazzero, "Seismic computations on the IBM 3090 vector multiprocessor", *IBM Systems Journal*, en prensa, (1988).