

CONTRASTACION DE DIFERENTES CRITERIOS NUMERICOS PARA LA RESOLUCION DE FLUJOS POTENCIALES MEDIANTE EL EMPLEO DE COORDENADAS CURVILINEAS Parte II: POTENCIAL DE VELOCIDAD

C.D. PEREZ SEGARRA

A. OLIVA

y

M. COSTA

*Laboratori de Termodinàmica i Energètica,
Departament de Màquines i Motors Tèrmics,
E.T.S. d' Enginyers Industrials de Terrassa,
Universitat Politècnica de Catalunya.*

RESUMEN

En este trabajo se analizan y contrastan diferentes criterios numéricos para la resolución de flujos potenciales subsónicos compresibles mediante el empleo de la función potencial de velocidad.

La discretización del dominio se realiza en base a la generación de sistemas de coordenadas curvilíneas adaptables a los contornos; los criterios numéricos empleados son análogos a los utilizados para la función de corriente en la primera parte de este trabajo², si bien se hace especial énfasis en el análisis de las condiciones de contorno por ser esencialmente de Neuman. Las diferencias entre los distintos esquemas numéricos y la influencia de ciertos parámetros son puestas de manifiesto para dos casos concretos de flujos confinados.

SUMMARY

In this study different numerical criteria for the solution of subsonic potential flows using the velocity potential have been analysed and contrasted.

The discretization of the equations is carried out on the basis of the generation of boundary fitted curvilinear coordinate systems; the numerical criteria used are analogous to the ones used for the stream function in the first part of this paper², although special emphasis is laid on the analysis of the boundary conditions because they are essentially of Neuman. The different numerical schemes and the influence of some parameters are shown in two specific examples of confined flows.

Recibido: Febrero 1989

INTRODUCCION. ECUACIONES CARACTERISTICAS

Para el caso de flujos irrotacionales la velocidad puede derivarse de un potencial de velocidad adimensional ϕ , definido por $\mathbf{v} = \nabla\phi$, tal que satisfaga la condición de irrotacionalidad. Para situaciones bidimensionales y en coordenadas cartesianas:

$$v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad (1)$$

Las ecuaciones gobernantes del flujo de un gas perfecto supuesto irrotacional (o potencial), bidimensional, permanente e isoentrópico, en términos de la función potencial de velocidad y en forma adimensional son¹:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial y} \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad (2a)$$

$$\rho = \left[1 - \frac{(k-1)M\infty^2}{2}(v^2 - 1) \right]^{\frac{1}{k-1}} \quad (2b)$$

en donde la ecuación (2a), que denominaremos ecuación diferencial del potencial de velocidad, expresa la condición de conservación de la masa.

Las condiciones de contorno necesarias para la integración de estas ecuaciones, en un flujo confinado dado, son del tipo:

$$\begin{aligned} (x, y) \in C_e & \quad \phi(x, y) = \phi_e(x, y) \\ (x, y) \in C_i \text{ ó } C_s & \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \\ (x, y) \in C_f & \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = f(x, y) \quad \text{y/o} \quad \frac{\partial\phi}{\partial s} = g(x, y) \end{aligned} \quad (3)$$

en donde C_e y C_f representan las zonas de entrada y de salida del flujo mientras que C_i y C_s simbolizan un contorno o canalización; 'n' y 's' indican respectivamente las direcciones normal y tangencial al contorno.

En la primera parte de este trabajo² se analizaron diferentes criterios numéricos para la resolución del flujo subsónico compresible mediante el empleo de la función de corriente. En esta segunda parte nos ocuparemos de la resolución numérica del flujo subsónico compresible mediante el empleo de la función potencial de velocidad. Las hipótesis asumidas en el estudio numérico son las mismas que para la función de corriente, esto es: flujo bidimensional, permanente, irrotacional e isoentrópico; ello nos permitirá contrastar las soluciones numéricas obtenidas en la primera parte con las que se derivan del empleo del potencial de velocidad; de otra parte la generalización del estudio realizado a situaciones tridimensionales (importante ventaja del empleo de la función potencial de velocidad) es inmediata.

Desde un punto de vista numérico la diferencia entre los dos métodos empleados (función de corriente, potencial de velocidad) radica fundamentalmente en las condiciones de contorno: así, mientras que para la función de corriente las condiciones

de contorno son esencialmente de Dirichlet para el potencial de velocidad son esencialmente de Neuman.

Además del interés que de por sí plantea el estudio numérico de estas dos situaciones, es importante considerar ambas por cuanto: —si bien la utilización de la función de corriente está limitada a flujos permanentes (si son compresibles) y bidimensionales (o tridimensionales axialsimétricos) permite, no obstante, el tratamiento de flujos rotacionales; —de otra parte, la utilización del potencial de velocidad está limitada al caso de flujos irrotacionales, sin embargo permite el tratamiento de flujos tridimensionales y/o en régimen transitorio.

La integración numérica de las ecuaciones gobernantes la efectuaremos, al igual que hicimos con la función de corriente², en base a la discretización del dominio mediante la generación de sistemas de coordenadas curvilíneas (ϵ, η) adaptables a los contornos. Los valores asignados a dichas variables dentro del dominio se toman uniformemente distribuidos entre 0 y 1; así, las coordenadas curvilíneas correspondientes a un punto (i, j) de una malla de $(N + 1) \times (M + 1)$ puntos serán: $\epsilon_i = \frac{(i-1)}{N}$, $\eta_j = \frac{(j-1)}{M}$, con $i = 1, 2, \dots, N + 1$ y $j = 1, 2, \dots, M + 1$; de esta forma una geometría irregular dada en el plano físico (x, y) es convertida, en el plano transformado (ϵ, η) , en un dominio cuadrado con una malla de discretización rectangular y uniformemente distribuida.

ANALISIS NUMERICO

En este apartado se describen los distintos criterios numéricos ensayados, en los puntos interiores de la malla y en los puntos del contorno, para la integración de las ecuaciones gobernantes del flujo potencial. La resolución del sistema de ecuaciones algebraicas obtenido se efectúa por métodos iterativos dando como resultado los valores de ϕ y ρ en cada nodo de la malla; a partir de estos valores se determinan las componentes de la velocidad y, de las relaciones isoentrópicas para un gas perfecto, la presión y la temperatura.

Tratamiento de los puntos interiores de la malla

Las ecuaciones de discretización para los puntos interiores de la malla son obtenidas según tres esquemas numéricos distintos: el primero (esquema PV-1) y el tercero (esquema PV-3) son de tipo diferencial mientras que el segundo (esquema PV-2) es de tipo integral.

Existe un notable paralelismo entre estos esquemas (realizados para situaciones de flujo bidimensional) y los desarrollados en la primera parte de este trabajo² con la función de corriente (esquemas FC-1, FC-2 y FC-3). Es por ello que la exposición que se efectuará a continuación será sucinta pudiéndose completar con la realizada para la función de corriente.

Esquema numérico PV-1

En este primer esquema las ecuaciones discretas son obtenidas de aproximar numéricamente, mediante desarrollos en series de Taylor, los términos de la ecuación diferencial del potencial de velocidad escrita en coordenadas curvilíneas. Dicha ecuación

se ha obtenido a partir de la ecuación diferencial del potencial de velocidad en coordenadas cartesianas, ecuación (2a), expresando los diferentes términos de las derivadas parciales en función de las variables independientes $\varepsilon(x, y)$ y $\eta(x, y)$:

$$g^{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon^2} + \alpha \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} + 2g^{12} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon \partial \eta} + \beta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + g^{22} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} = - \left(g^{11} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \varepsilon} + g^{12} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} - \left(g^{21} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \varepsilon} + g^{22} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \quad (4)$$

La densidad se evalúa mediante la ecuación (2b) previa determinación del módulo de la velocidad en términos del potencial de velocidad y en las coordenadas curvilíneas [ecuación (18)].

El análisis numérico efectuado es análogo al realizado en la primera parte de este trabajo² con la función de corriente por lo que omitiremos aquí su reproducción.

Esquema numérico PV-2

Este segundo esquema numérico se basa en realizar balances másicos sobre volúmenes de control finitos (V.C.) asignados a los nodos de la malla y centrados, en el plano transformado (ε, η) , entre las líneas coordenadas. Para el caso de régimen permanente, la ecuación de conservación de la masa se expresa en la forma:

$$\int_{S.C.} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}^i = 0 \quad (5)$$

en donde el vector diferencial de superficie $d\mathbf{S}^i$ es normal a la cara correspondiente del V.C. y está dirigido hacia el exterior del mismo. Dado que las caras del V.C. están delimitadas por superficies coordenadas, la dirección del vector de superficie coincidirá con la de los vectores de la base recíproca \mathbf{e}^i , siendo por tanto:

$$d\mathbf{S}^i = \pm \frac{\mathbf{e}^i}{|\mathbf{e}^i|} dS^i = \pm \frac{dS^i}{\sqrt{g^{ii}}} \mathbf{e}^i \quad (6)$$

el signo positivo o negativo dependerá de que el sentido del vector de superficie coincida o no con el de las líneas coordenadas.

De desarrollar la integral (5) para las diferentes caras del V.C. y de introducir la expresión anterior se tiene:

$$- \int_{S_{i-1/2,j}} \rho \frac{V^1}{\sqrt{g^{11}}} dS^1 + \int_{S_{i,j+1/2}} \rho \frac{V^2}{\sqrt{g^{22}}} dS^2 + \int_{S_{i+1/2,j}} \rho \frac{V^1}{\sqrt{g^{11}}} dS^1 - \int_{S_{i,j-1/2}} \rho \frac{V^2}{\sqrt{g^{22}}} dS^2 = 0 \quad (7)$$

en donde $V^i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}^i$ son las componentes contravariantes de la velocidad en la base local; $S_{i-1/2,j}$, $S_{i,j+1/2}$, ... indican que la integral se realiza a lo largo de la cara del V.C. correspondiente al punto $(i-1/2, j)$, $(i, j+1/2)$, ... de la malla.

El elemento diferencial de superficie $d\mathbf{S}^i$ viene determinado por los vectores $\mathbf{e}_j dq^j$ y $\mathbf{e}_k dq^k$ (i, j, k permutación circular de 1, 2, 3), siendo su valor $d\mathbf{S}^i = |\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k| dq^j dq^k$

($q^1 = \varepsilon, q^2 = \eta, q^3 = \tau$); de tener en cuenta que el cuadrado del módulo del producto vectorial de dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} se puede expresar en la forma $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$ y que $g_{ij} = |\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j|$:

$$dS^i = \sqrt{g_{jj}g_{kk} - g_{jk}^2} dq^j dq^k \tag{8}$$

siendo i, j, k permutación circular de 1, 2, 3. Para situaciones bidimensionales se verifica que $g_{13} = g_{31} = g_{23} = g_{32} = 0$ y $g_{33} = 1$; así, de la expresión (8) y de considerar las relaciones entre componentes del tensor métrico contravariante y covariante:

$$\begin{aligned} dS^1 &= \sqrt{g_{22}} d\eta dz = \frac{\sqrt{g^{11}}}{J} d\eta dz \\ dS^2 &= \sqrt{g_{11}} d\eta dz = \frac{\sqrt{g^{22}}}{J} d\varepsilon dz \end{aligned} \tag{9}$$

La ecuación integral del potencial de velocidad resulta de introducir en la ecuación (7) las relaciones anteriores y de expresar las componentes contravariantes de la velocidad en términos del potencial de velocidad, ecuación (19).

Los criterios empleados en la aproximación numérica de las integrales y derivadas son análogos a los indicados en la primera parte de este trabajo² para la función de corriente. Los coeficientes métricos en las caras del V.C. se determinan de promediar los obtenidos en los nodos o bien se calculan directamente en las caras evaluando allí las derivadas; los resultados que se derivan del primer o del segundo criterio indicado se designan por la notación PV-2a o PV-2b.

Esquema numérico PV-3

En este tercer esquema numérico, y a diferencia del esquema PV-1, la ecuación diferencial del potencial de velocidad en coordenadas curvilíneas es obtenida de aplicar la condición de conservación de la masa a elementos diferenciales en dichas coordenadas.

Para el caso de un flujo en régimen permanente, de aplicar la ecuación de conservación de la masa (5) a un elemento diferencial en las coordenadas curvilíneas (ε, η) y de introducir las expresiones (6) y (9) se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\rho V^1}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\rho V^2}{J} \right) = 0 \tag{10}$$

Finalmente, de expresar las componentes contravariantes de la velocidad V^i en términos del potencial de velocidad y en las coordenadas curvilíneas, ecuación (19), y sustituyéndolas en la expresión anterior, se obtiene la siguiente ecuación diferencial del potencial de velocidad en coordenadas curvilíneas:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\rho g^{11}}{J} \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} + \frac{\rho g^{12}}{J} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\rho g^{21}}{J} \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} + \frac{\rho g^{22}}{J} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) = 0 \tag{11}$$

La aproximación numérica de los diferentes términos de esta ecuación, en base a los criterios ya comentados en la primera parte de este trabajo² para la función de

corriente (esquema FC-3), proporciona unas ecuaciones de discretización que resultan ser equivalentes a las que se derivan del esquema numérico PV-2, siendo así idénticos los resultados numéricos obtenidos con dichos esquemas.

Condiciones de contorno

En la zona de entrada del flujo (contorno C_e) el potencial de velocidad se obtiene por integración a lo largo de C_e de la componente tangencial de la velocidad al contorno. En el punto ($i = 1, j = 1$) se ha fijado arbitrariamente un valor de $\phi = 0$.

En los contornos laterales C_i y C_s la velocidad es tangente al contorno y por tanto la componente normal de la velocidad v^{p2} es nula; de esto último se sigue que la componente contravariante V^2 de la velocidad será también nula, por ello de (19) se verificará:

$$g^{21} \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} + g^{22} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0 \quad (12)$$

A continuación indicaremos tres diferentes criterios numéricos ensayados en el tratamiento de los puntos del contorno:

a) **Criterio C-0.** La ecuación de discretización para el potencial de velocidad se obtiene de aproximar numéricamente los términos de la ecuación (12). Las derivadas en ε de " ϕ ", " x " e " y " se determinan de la misma forma que para los puntos interiores de la malla; para las derivadas en η de " ϕ ", " x " e " y " emplearemos ajustes polinómicos de primer o segundo grado; así por ejemplo, para la variable ϕ en el contorno C_i :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_{i,1} \approx \frac{A\phi_{i,1} + B\phi_{i,2} + C\phi_{i,3}}{2\Delta\eta} \quad (13)$$

correspondiendo $A = -2, B = 2, C = 0$ al caso de ajuste a dos puntos, y $A = -3, B = 4, C = -1$ al caso en que el ajuste se realice a tres puntos. Emplearemos la notación $C-0'$ o $C-0''$ para designar los resultados que se derivan del empleo de ajustes a dos o tres puntos respectivamente.

b) **Criterio C-1.** La ecuación de discretización del potencial de velocidad se obtiene al discretizar la ecuación diferencial del potencial de velocidad (4). Las derivadas en ε de " ϕ ", " x " e " y " se aproximan numéricamente según los mismos criterios empleados para los puntos interiores de la malla. Para las derivadas en η de " ϕ " emplearemos un ajuste polinómico de segundo grado a dos puntos, y al que la derivada primera verifique la condición de contorno (12); así por ejemplo, para el contorno C_i :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_{i,1} &\approx - \left(\frac{g^{21}}{g^{22}} \right)_{i,1} \frac{\phi_{i+1,1} - \phi_{i-1,1}}{2\Delta\varepsilon} \\ \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \right)_{i,1} &\approx 2 \frac{\phi_{i,2} - \phi_{i,1}}{(\Delta\eta)^2} + \left(\frac{g^{21}}{g^{22}} \right)_{i,1} \frac{\phi_{i+1,1} - \phi_{i-1,1}}{\Delta\varepsilon \cdot \Delta\eta} \end{aligned} \quad (14)$$

Para la evaluación de los coeficientes métricos, las derivadas en η de “ x ” e “ y ” son aproximadas numéricamente por un ajuste polinómico de segundo grado a tres puntos. Indicaremos este esquema por la notación C-1''.

c) **Criterio C-2.** La ecuación de discretización del potencial de velocidad se obtiene de efectuar balances másicos sobre V.C. finitos asignados a los nodos de la malla situados en el contorno. El proceso seguido es análogo al realizado para los puntos interiores de la malla según el esquema PV-2, teniendo en cuenta que la integral a lo largo de la cara del V.C. situada en el contorno es nula.

Los coeficientes métricos en las caras del V.C. se evalúan según las dos opciones indicadas en el esquema PV-2, designándolas por la notación C-2a y C-2b. Las derivadas en η de “ ϕ ”, “ x ” e “ y ” en el contorno se evalúan mediante ajustes polinómicos a dos o tres puntos, indicándose respectivamente por las notaciones ' y '' (e.g., C-2a', C-2b'', ...).

En la zona de salida del flujo (contorno Cf) se ha supuesto que el flujo es normal al contorno por lo que la componente tangencial de la velocidad al contorno v_{p2} es nula; de ello se sigue que el contorno Cf corresponde a una línea equipotencial (i.e., $\phi_{N+1,j=1,2,\dots,M+1} = \phi_f = \text{cte}$). Para esta situación se ha realizado el análisis a partir del flujo másico total \dot{m}_T que atraviesa Cf :

$$\dot{m}_T = \int_{Cf} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_{Cf} \rho \frac{g^{11} V_1}{J} d\eta = \int_{Cf} \frac{\rho g^{11}}{J} \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} d\eta \tag{15}$$

Aproximando numéricamente la integral anterior y sustituyendo la derivada por cociente de incrementos:

$$\dot{m}_T = \sum_{j=1}^{M+1} \left(\frac{\rho g^{11}}{J} \right)_{N+1,j} \frac{\phi_f - \phi_{N,j}}{\Delta \varepsilon} \cdot \Delta_j \tag{16}$$

en donde $\Delta_j = \Delta\eta$, excepto para $j = 1$ y $j = M + 1$ en donde $\Delta_j = \Delta\eta/2$. Dado que ϕ_f es uniforme su valor se obtiene fácilmente extrayéndolo del sumatorio en la expresión (16). El valor de \dot{m}_T se determina de un balance másico global por cuanto el flujo másico que atraviesa Cf es igual al que atraviesa Ce .

Resolución del sistema de ecuaciones discretas

Del análisis anterior se tiene, para cada nodo de la malla de discretización, una ecuación discreta para la función potencial de velocidad y una para la densidad. Los métodos iterativos empleados para la resolución del sistema de ecuaciones algebraicas resultante son esencialmente los mismos que los utilizados en la primera parte de este trabajo² con la función de corriente, esto es: —método de Gauss Seidel; —método de Gauss Seidel apoyado en un TDMA por filas (TDMAi); —método de Gauss Seidel apoyado en un TDMA por columnas (TDMAj). En todos ellos se emplean factores de sobrerrelajación (f) para el potencial de velocidad a fin de acelerar la convergencia. En la determinación de la densidad, ecuación (2b), se han empleado factores de

subrelajación (fv) para el módulo de la velocidad con el objeto de evitar inestabilidades numéricas^{2,3}.

Determinación de las velocidades. Componentes covariantes y contravariantes

En este apartado obtendremos las expresiones de las componentes de la velocidad en términos del potencial de velocidad. La determinación numérica de dichas componentes se efectúa (una vez calculada la distribución de ϕ y ρ en los nodos de la malla) de forma más conveniente en el plano transformado; es por ello que las derivadas son expresadas en función de las coordenadas curvilíneas (ε, η) .

Las componentes cartesianas de la velocidad se obtienen de (1) efectuando los correspondientes cambios de variable:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} \varepsilon_x + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \eta_x \\ v_y &= \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} \varepsilon_y + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \eta_y \end{aligned} \quad (17)$$

De las componentes cartesianas de la velocidad se obtiene la siguiente expresión para el módulo de la velocidad:

$$v = \left[g^{11} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} \right)^2 + 2g^{12} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + g^{22} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (18)$$

Las componentes contravariantes de la velocidad V^i en la base local se obtienen de efectuar los productos escalares de la velocidad \mathbf{v} por los vectores de la base local \mathbf{e}_i ; así, en términos del potencial de velocidad:

$$\begin{aligned} V^1 &= g^{11} \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} + g^{12} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \\ V^2 &= g^{21} \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} + g^{22} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (19)$$

Las componentes covariantes de la velocidad V_i en la base local se obtienen de efectuar los correspondientes productos escalares de la velocidad \mathbf{v} por los vectores de la base recíproca \mathbf{e}^i ; así, en términos del potencial de velocidad:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} \\ V_2 &= \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (20)$$

La relación entre las componentes físicas de la velocidad (componentes y proyecciones ortogonales sobre las direcciones definidas por los vectores de la base local y de la base recíproca) con las correspondientes componentes contravariantes y covariantes son las ya indicadas en la primera parte de este trabajo².

EJEMPLOS DE RESOLUCION NUMERICA. CONTRASTACION DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Para la contrastación de resultados se han tomado los mismos casos ensayados en la primera parte de este trabajo con la función de corriente², esto es:

a) **Flujo alrededor de un cilindro** (Figura 1). La geometría de los contornos laterales *C_i* y *C_s* viene representada, respectivamente, por las expresiones $y - y/s = 0$ e $y - y/s = 0.18846$ siendo $s = (x - 2)^2 + y^2$. Los resultados numéricos presentados corresponden al caso de flujo incompresible ($\rho = 1$ y $M = 0$ en todo el dominio) alrededor de un cilindro con velocidad uniforme aguas arriba; para esta situación la solución analítica de la ecuación diferencial del potencial de velocidad es conocida y toma la forma¹:

$$\phi = x + \frac{x - H_t}{(x - H_t)^2 + y^2} + \frac{1}{H_t} \tag{21}$$

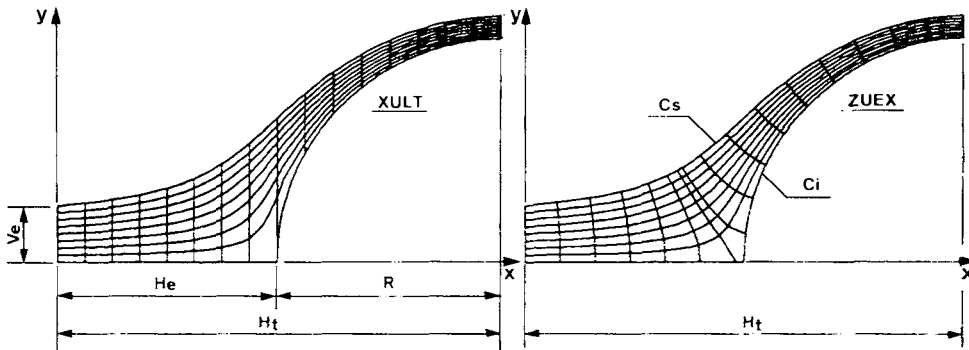


Figura 1. Flujo alrededor de un cilindro: geometría ($H_e = 1.0, R = 1.0, V_e = 0.25$) y mallas generadas.

Para la resolución numérica se ha tomado en el contorno *C_e* la distribución de ϕ correspondiente a la ecuación anterior mientras que en *C_f* se supone nula la componente tangencial de la velocidad (condición verificada por la expresión (21) al ser $v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$).

En la discretización del dominio por mallas adaptables a los contornos se han seleccionado (de entre los diferentes tipos ensayados en la primera parte de este trabajo²) dos casos: 1) Malla ortogonal en la que las líneas $\epsilon = cte$ corresponden a líneas de corriente de flujo incompresible, mientras que las líneas ortogonales η están distribuidas de forma que la distancia (medida sobre el contorno *C_i*) entre dos líneas consecutivas es constante (Figura 1); designaremos esta malla por la notación XULT; 2) Malla no ortogonal generada en base a la resolución numérica del sistema de ecuaciones de tipo elíptico: $\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} = 0, \eta_{xx} + \eta_{yy} = 0$; la malla así generada se ha representado en la Figura 1 y la designaremos por la notación ZUEX.

b) **Flujo a través de una tobera** (Figura 2). La geometría determinada por el perfil inferior de la tobera (contorno C_i) y la línea de simetría (contorno C_s) es la representada en la Figura 2; el contorno C_i correspondiente a la zona curva viene dado por el polinomio $y = -0.03372 \cdot (x - 1)^3 + 0.19724 \cdot (x - 1)^2$.

Para las condiciones de contorno se supone velocidad uniforme en la zona de entrada del flujo (contorno C_e); en la zona de salida (contorno C_f) se supone nula la componente tangencial de la velocidad.

La malla de discretización generada es de tipo algebraico y viene dada por las expresiones: $\varepsilon = \frac{x}{H_t}$, $\eta = \frac{y-y_i}{y_s-y_i}$ siendo $y_i(x)$ e $y_s(x)$ funciones que definen el contorno lateral C_i y C_s respectivamente.

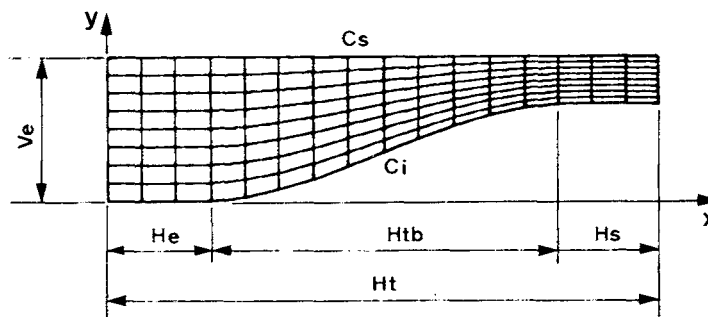


Figura 2. Flujo a través de tobera, geometría ($H_e=1.0$, $H_{tb}=3.9$, $H_s=1.0$, $V_e=1.5$) y malla generada.

Resultados numéricos y conclusiones

Las Tablas I a IV resumen los resultados obtenidos para el caso del flujo alrededor de un cilindro; las Tablas V y VI se refieren al flujo a través de una tobera.

En la Tabla I se indican los errores obtenidos en la evaluación numérica del potencial de velocidad según los distintos esquemas numéricos, densidades y tipos de malla.

De los resultados presentados se desprende que en general: —para un esquema numérico y densidad de malla dada los resultados obtenidos con la malla no ortogonal ZUEX están afectados de un mayor grado de error que los obtenidos con la malla ortogonal XULT; —los esquemas más precisos han sido los del tipo PV-2/C-2 (para la malla XULT el esquema más preciso ha sido el PV-2b/C-2b' mientras que para la malla ZUEX ha sido el PV-2a/C-2a').

Para la malla XULT los resultados más precisos han sido los obtenidos con los esquemas PV-2/C-2; la precisión de los esquemas PV-1/C-1'', PV-1/C-2b' y PV-1/C-0'' ha sido del mismo orden; el esquema PV-1/C-0' es el que está afectado de un mayor grado de error; en todos los casos ensayados al incrementar la densidad de la malla aumenta la precisión del esquema numérico. Para la malla ZUEX los esquemas que emplean criterios del tipo C-2 en el contorno han dado mejores resultados que los que emplean criterios del tipo C-1 y C-0; los resultados más imprecisos han sido los

Tipo de malla	Criterio numérico	Densidad de la malla		
		16 × 8	32 × 16	64 × 32
XULT	PV-1 C-0'	.213826 (16,9) .135250	.093105 (32,17) .058740	.040846 (63,33) .025286
	PV-1 C-0''	.067323 (17,1) .046645	.020268 (33,1) .014792	.003515 (27,1) .001284
	PV-1 C-1''	.036818 (12,9) .024570	.013922 (22,17) .010117	.004088 (43,33) .003059
	PV-1 C-2b'	.050618 (15,9) .035158	.016764 (29,17) .012204	.004293 (43,33) .003153
	PV-2a C-2a'	.026997 (11,9) .014531	.012694 (20,17) .007196	.005046 (38,33) .002932
	PV-2b C-2b'	.011100 (11,9) .004909	.002773 (21,17) .001209	.000601 (57,33) .000244
	PV-2b C-2b''	.016065 (17,1) .006884	.003880 (33,1) .001636	.000823 (65,1) .000314
ZUEX	PV-1 C-0'	.161100 (9,2) .064584	.223994 (17,2) .125293	.221694 (32,1) .136326
	PV-1 C-0''	.070256 (9,2) .041750	.105829 (17,2) .048855	.099676 (32,1) .054852
	PV-1 C-1''	.100538 (17,1) .051838	.060690 (17,2) .014118	.042936 (33,2) .014412
	PV-1 C-2b'	.108825 (17,1) .050862	.028213 (33,1) .016133	.013282 (65,1) .006936
	PV-2a C-2a'	.032985 (10,4) .013362	.019998 (18,4) .008305	.012038 (34,4) .004561
	PV-2b C-2b'	.079403 (17,1) .036923	.031354 (33,1) .015121	.014352 (33,1) .005745
	PV-2b C-2b''	.091076 (17,1) .042005	.036821 (33,1) .017849	.013803 (65,1) .007019

Tabla I. Flujo potencial incompresible alrededor de un cilindro. Se indica: —el valor absoluto de la diferencia máxima entre los valores de ϕ obtenidos numéricamente y los que se derivan de la solución exacta, así como el punto (i, j) de la malla en donde se ha producido; —el valor medio de las diferencias, en valor absoluto, entre los resultados obtenidos numéricamente y la solución exacta. En todo el dominio $0.00 \leq \phi \leq 2.50$.

Coord. <i>y</i>	Sol. exacta	PV-1 C-0'	PV-1 C-0''	PV-1 C-1''	PV-1 C-2b'	PV-2a C-2a'	PV-2b C-2b'	PV-2b C-2b''
1.099	1.8285	+0.03%	-0.11%	-0.11%	+0.05%	+0.04%	+0.05%	-0.11%
1.073	1.8686	+0.03%	-0.05%	-0.05%	+0.03%	+0.03%	-0.05%	+0.03%
1.048	1.9104	+0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
1.024	1.9542	-0.02%	+0.06%	+0.06%	-0.03%	-0.03%	-0.03%	-0.06%
1.000	2.0000	-0.07%	+0.13%	+0.13%	-0.05%	-0.06%	-0.06%	+0.12%

Tabla II. Flujo potencial incompresible alrededor de un cilindro. Se representa el porcentaje de error e de la solución numérica de las velocidades, en el contorno Cf , respecto de la solución exacta. Malla tipo XULT de densidad 16×8 .

Dens. malla	Gauss-Seidel, f :			TDMAi, f :			TDMAj, f :		
	1.0	1.4	1.8	1.0	1.4	1.8	1.00	1.05	1.10
16×8	13576	7295	2517	13454	7170	div	568	453	344
32×16	9565	10400	5327	9780	10403	div	1321	1008	div

Tabla III. Flujo potencial incompresible alrededor de un cilindro. Número de iteraciones requerido para obtener una precisión de $\xi = 0.0000001$; esquema numérico PV-2b/C-2b'; malla tipo XULT.

Tipo malla	Dens. malla	PV-1 C-0'	PV-1 C-0''	PV-1 C-1''	PV-1 C-2b'	PV-2a C-2a'	PV-2b C-2b'	PV-2b C-2b''
XULT	16×8	892	div	743	769	645	568	635
	32×16	3248	div	2501	2557	2046	1321	1533
ZUEX	16×8	877	div	815	830	691	799	873
	32×16	3436	div	2405	2107	2055	2281	2430

Tabla IV. Flujo potencial compresible alrededor de un cilindro. Número de iteraciones requerido para obtener una precisión de $\xi = 0.0000001$; método iterativo TDMAj con $f = 1.00$.

obtenidos con los esquemas PV-1/C-0' y PV-1/C-0'', no mejorando sensiblemente la precisión al incrementar la densidad de la malla.

En la Tabla II se indica el porcentaje de error de las velocidades obtenidas en el

contorno de salida Cf según los distintos esquemas numéricos y para la malla XULT; en todos los casos ensayados la precisión de los resultados obtenidos ha sido muy satisfactoria. Los resultados obtenidos con la malla ZUEX (y no representados en la tabla) han sido muy similares a éstos.

En las Tablas III y IV es puesta de manifiesto la rapidez de convergencia de los distintos criterios numéricos. En la Tabla III se indican el número de iteraciones requerido para obtener una precisión dada, según los distintos métodos iterativos y factores de sobrerrelajación f empleados; el número de iteraciones requerido por el método de Gauss-Seidel y por el TDMAi son del mismo orden, mientras que la convergencia por el método TDMAj es mucho más rápida; incluso para el caso del método TDMAj el empleo de adecuados factores de sobrerrelajación reduce sensiblemente el número de iteraciones. En la Tabla IV se indican, para un método iterativo dado (TDMAj) y factor de relajación dado ($f = 1.0$), el número de iteraciones requerido según los distintos esquemas numéricos y las distintas mallas empleadas; a excepción de los resultados obtenidos con los esquemas PV-2b/C-2b, la rapidez de convergencia para ambos tipos de malla ha sido similar; en general la mayor rapidez de convergencia se ha obtenido con esquemas de tipo PV-2/C-2; el esquema PV-1/C-0" diverge a pesar del empleo de factores de subrelajación, la convergencia de este esquema sólo se ha conseguido con métodos iterativos del tipo Gauss-Seidel o TDMAi. Los resultados indicados en estas dos tablas han sido obtenidos tomando para el inicio de las iteraciones un mapa inicial de ψ correspondiente a la solución analítica indicada en la ecuación (21).

Las Tablas V y VI hacen referencia al flujo a través de la tobera, y en ella se representan los porcentajes de error, respecto a una solución numérica de referencia, en la evaluación de las velocidades en los contornos laterales C_i y C_s . Los resultados presentados, según los distintos criterios numéricos ensayados, han sido obtenidos con mallas de discretización relativamente poco densas (16×8) y para el caso de números de Mach a la entrada del dominio de $Mo = 0.001$ (Tabla V) y de $Mo = 0.190$ (Tabla VI). La solución numérica de referencia tomada ha sido, al igual que en la primera parte de este trabajo², la obtenida mediante el empleo de la función de corriente (esquema numérico FC-2b/V-2) y con una malla de discretización de elevada densidad, 128×64 .

El esquema PV-1/C-0' ha dado unos resultados muy imprecisos; los demás esquemas numéricos han dado un grado de error similar no manifestándose ninguno claramente superior al resto. Al aumentar el número de Mach la precisión de los resultados se reduce ligeramente.

Conclusiones finales

En este trabajo se han indicado diferentes esquemas numéricos para la resolución de flujos subsónicos potenciales mediante el empleo de la función potencial de velocidad y en base a la discretización del dominio por mallas adaptables a los contornos. Un aspecto esencial ha sido el análisis de las condiciones de contorno Neumann, habiéndose indicado diferentes criterios para la obtención de las ecuaciones de discretización. Los resultados obtenidos, y comentados anteriormente, ponen de manifiesto la influencia del tipo de malla generada y de los criterios numéricos ensayados.

El estudio realizado sobre situaciones bidimensionales y permanentes permite

Cont.	z	Vel. ref.	PV-1 C-0'	PV-1 C-0''	PV-1 C-1''	PV-1 C-2a'	PV-1 C-2b'	PV-2a C-2a'	PV-2b C-2b'	PV-2b C-2b''
<i>C_i</i>	0.000	1.0000	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	0.738	0.9666	15.3%	1.61%	2.09%	1.91%	1.97%	1.61%	1.63%	1.66%
	1.475	0.9081	13.8%	-1.45%	-2.20%	-1.73%	-1.70%	-2.20%	-2.08%	-2.07%
	2.213	1.0947	12.7%	-0.30%	-0.26%	-0.44%	-0.39%	-1.12%	-0.84%	-0.87%
	2.950	1.4623	10.2%	0.12%	0.06%	-0.11%	-0.04%	-1.20%	-0.54%	-0.58%
	3.688	2.0824	6.37%	0.58%	0.49%	0.36%	0.43%	-0.93%	-0.01%	-0.03%
	4.056	2.4918	4.37%	1.04%	1.02%	0.92%	0.98%	-0.14%	0.65%	0.64%
	4.425	2.8991	3.29%	2.09%	2.17%	2.11%	2.14%	1.50%	1.96%	1.96%
	4.794	3.1319	3.21%	3.09%	3.19%	3.17%	3.18%	2.97%	3.13%	3.13%
	5.162	3.0107	-0.90%	-0.86%	-0.84%	-0.84%	-0.84%	-0.86%	-0.84%	-0.84%
5.900	3.0002	-0.02%	0.10%	-0.04%	-0.04%	-0.04%	-0.03%	-0.04%	0.11%	
<i>C_s</i>	0.000	1.0000	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	0.738	1.0244	14.1%	-0.32%	-0.09%	-0.24%	-0.21%	-0.59%	-0.56%	-0.56%
	1.475	1.0915	13.8%	-0.12%	0.02%	-0.15%	-0.11%	-0.60%	-0.49%	-0.50%
	2.213	1.2536	12.3%	0.05%	0.10%	-0.07%	-0.02%	-0.85%	-0.49%	-0.49%
	2.950	1.5670	9.45%	0.31%	0.30%	0.11%	0.19%	-1.05%	-0.32%	-0.34%
	3.688	2.0888	5.80%	0.75%	0.73%	0.57%	0.66%	-0.70%	0.24%	0.22%
	4.056	2.4176	4.02%	1.11%	1.12%	1.01%	1.07%	-0.01%	0.77%	0.75%
	4.425	2.7299	2.60%	1.46%	1.50%	1.45%	1.48%	0.89%	1.32%	1.31%
	4.794	2.9296	1.40%	1.23%	1.28%	1.27%	1.28%	1.11%	1.23%	1.23%
	5.162	2.9905	0.37%	0.43%	0.46%	0.46%	0.46%	0.44%	0.46%	0.46%
5.900	2.9998	0.02%	-0.06%	0.03%	0.03%	0.03%	0.03%	0.03%	-0.06%	

Tabla V. Flujo potencial a través de una tobera. Porcentaje de error, e , de las velocidades obtenidas numéricamente en los contornos laterales C_i y C_s respecto de la solución numérica de referencia; $Mo = 0.01$.

Cont.	z	Vel. ref.	PV-1 C-0'	PV-1 C-0''	PV-1 C-1''	PV-1 C-2a'	PV-1 C-2b'	PV-2a C-2a'	PV-2b C-2b'	PV-2b C-2b''
<i>C_i</i>	0.000	1.0000	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	0.738	0.9668	15.6%	1.84%	2.15%	1.95%	2.01%	1.54%	1.56%	1.77%
	1.475	0.9084	13.6%	-1.31%	-1.54%	-1.77%	-1.74%	-2.37%	-2.25%	-2.03%
	2.213	1.1018	13.1%	-0.15%	-0.29%	-0.50%	-0.44%	-1.32%	-1.03%	-0.85%
	2.950	1.4957	10.7%	0.14%	-0.11%	-0.31%	-0.23%	-1.60%	-0.88%	-0.72%
	3.688	2.2265	6.83%	0.19%	-0.15%	-0.32%	-0.22%	-1.97%	-0.83%	-0.62%
	4.056	2.7933	4.73%	0.58%	0.25%	0.12%	0.20%	-1.32%	-0.25%	0.01%
	4.425	3.5098	4.92%	3.23%	2.95%	2.87%	2.92%	1.97%	2.69%	3.01%
	4.794	4.1616	8.09%	7.92%	7.61%	7.58%	7.60%	7.22%	7.53%	7.91%
	5.162	3.9922	0.51%	0.84%	0.41%	0.40%	0.41%	0.32%	0.40%	0.84%
5.900	3.9874	0.01%	0.15%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.16%	
<i>C_s</i>	0.000	1.0000	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
	0.738	1.0244	14.4%	-0.12%	-0.05%	-0.23%	-0.20%	-0.67%	-0.65%	-0.46%
	1.475	1.0939	14.2%	0.05%	0.02%	-0.16%	-0.14%	-0.74%	-0.64%	-0.45%
	2.213	1.2660	12.7%	0.17%	0.04%	-0.17%	-0.11%	-1.09%	-0.71%	-0.52%
	2.950	1.6138	10.0%	0.29%	0.07%	-0.14%	-0.06%	-1.55%	-0.72%	-0.53%
	3.688	2.2597	6.34%	0.45%	0.16%	-0.02%	0.08%	-1.67%	-0.50%	-0.28%
	4.056	2.7459	4.69%	1.03%	0.73%	0.59%	0.68%	-0.80%	0.26%	0.52%
	4.425	3.3355	4.57%	3.01%	2.70%	2.63%	2.68%	1.80%	2.47%	2.79%
	4.794	3.8550	5.25%	5.07%	4.72%	4.70%	4.71%	4.38%	4.65%	5.04%
	5.162	3.9828	2.13%	2.48%	2.06%	2.06%	2.06%	1.97%	2.06%	2.49%
5.900	3.9874	-0.01%	-0.11%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	

Tabla VI. Flujo potencial a través de una tobera. Porcentaje de error, e , de las velocidades obtenidas numéricamente en los contornos laterales C_i y C_s respecto de la solución numérica de referencia; $Mo = .190$.

comparar los resultados aquí obtenidos con los que se derivan del empleo de la función de corriente²; así cabe destacar la mayor precisión y rapidez de convergencia obtenida (para una densidad y tipo de malla dados) con el empleo de la función de corriente. Si bien estos resultados eran previsibles, la utilidad de cada método debe situarse en el hecho de sus posibilidades de aplicabilidad.

APENDICE: NOMENCLATURA

En este apéndice se relacionan aquellas variables no expresamente indicadas en el artículo así como expresiones matemáticas de interés.

- e Porcentaje de error: $e = 100 \cdot (v_{\text{ref}} - v_{\text{num}})/v_{\text{ref}}$, siendo v_{ref} la solución analítica o numérica de referencia y v_{num} el resultado numérico.
- e_i Vectores de la base local, $e_i = \partial \mathbf{r} / \partial q^i$.
- e^i Vectores de la base recíproca, $e^i = \nabla q^i$.
- D Jacobiano de la transformación $\mathbf{x}^i = \mathbf{x}^i(q^1, q^2)$; $D = (g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21})^{1/2}$; $D = 1/J$.
- f Factor de relajación para el potencial de velocidad: $\phi_{i,j}^k = f \cdot \phi_{i,j}^{k-1} - (f-1) \cdot \phi_{i,j}^{k-1}$, siendo $\phi_{i,j}^k$ el valor del potencial de velocidad en el punto (i, j) de la malla y en la iteración k .
- fv Factor de relajación para las velocidades $v_{i,j}^k = fv \cdot v_{i,j}^{k-1} - (fv-1) \cdot v_{i,j}^{k-1}$, siendo $v_{i,j}^k$ el valor del potencial de velocidad en el punto (i, j) de la malla y en la iteración k .
- g^{ij} Componentes del tensor métrico contravariante, $g^{ij} = \sum_{k=1}^3 (\partial q^i / \partial x^k)(\partial q^j / \partial x^k)$.
- g_{ij} Componentes del tensor métrico covariante, $g_{ij} = \sum_{k=1}^3 (\partial x^k / \partial q^i)(\partial x^k / \partial q^j)$.
- J Jacobiano de la transformación $q^i = q^i(x^1, x^2)$; $J = (g^{11}g^{22} - g^{12}g^{21})^{1/2}$.
- k Número de iteración; relación entre el calor específico a presión y a volumen constante (en los casos ensayados se ha tomado el valor de $k = 1.40$).
- \bar{L} Longitud característica.
- \dot{m}_T Flujo másico por unidad de altura, $\dot{m}_T = \bar{m}_T / (\bar{\rho}_o \bar{v}_o \bar{L})$.
- $N \times M$ Densidad de la malla: $N + 1$ puntos en la dirección ε y $M + 1$ puntos en la dirección η .
- M Número de Mach: $M = \bar{v} / (k \bar{R} \bar{T})^{1/2}$.
- q^1, q^2, q^3 Coordenadas curvilíneas, $q^1 = \varepsilon$, $q^2 = \eta$, $q^3 = \tau$.
- r Vector posición.
- T Temperatura, $T = \bar{T} / \bar{T}_o$.
- \mathbf{v}, v Vector velocidad $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} / \bar{v}_o$; módulo de la velocidad $v = \bar{v} / \bar{v}_o$.
- v_x, v_y Componentes cartesianas de la velocidad, $v_x = \bar{v}_x / \bar{v}_o$, $v_y = \bar{v}_y / \bar{v}_o$.
- x, y, z Coordenadas cartesianas, $x = \bar{x} / \bar{L}$, $y = \bar{y} / \bar{L}$, $z = \bar{z} / \bar{L}$; se emplea igualmente la notación (x^1, x^2, x^3) . En situaciones bidimensionales se trabaja en el plano (x, y) .
- α, β Coeficientes métricos en ecuación (4); $\alpha = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}$, $\beta = \eta_{xx} + \eta_{yy}$.
- $\Delta \varepsilon, \Delta \eta$ Incrementos de la malla en las direcciones ε y η ; $\Delta \varepsilon = 1/N$, $\Delta \eta = 1/M$.

- ϕ Función potencial de velocidad, $\phi = \bar{\phi}/\bar{v}_o\bar{L}$.
 ρ Densidad, $\rho = \bar{\rho}/\bar{\rho}_o$.
 ε, η, τ Coordenadas curvilíneas; se emplea igualmente la notación (q^1, q^2, q^3) . En situaciones bidimensionales se trabaja en el plano (ε, η) siendo $\tau = z$.
 ξ Precisión exigida para finalizar las iteraciones: $\max|\phi_{i,j}^k - \phi_{i,j}^{k-1}| < \xi$.

Nota: – Los valores \bar{v}_o , \bar{T}_o , M_o , etc. son los correspondientes a un punto arbitrario 'o' del dominio; en general indica aguas arriba o la zona de entrada del flujo al dominio.

– El guión encima de las variables indica que éstas son *dimensionales*.

– Por comodidad se ha empleado la notación ε_x , ε_{xx} , etc., para indicar las derivadas $\partial\varepsilon/\partial x$, $\partial^2\varepsilon/\partial x^2$, etc.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado en el marco del Proyecto de Investigación no. 1937/82 subvencionado por la Comisión Asesora de Investigación Científica y Técnica.

REFERENCIAS

1. A.H. Shapiro, "Compressible Fluid Flow", The Ronald Press Comp., New York, (1953).
2. C.D. Pérez Segarra, A. Oliva y M. Costa, "Contrastación de Diferentes Criterios Numéricos para la Resolución de Flujos Potenciales en Coordenadas Curvilíneas. Parte I: Función de corriente", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 6, No. 2, pp. 285–310, (1990).
3. C.D. Pérez Segarra, "Criterios Numéricos en la Resolución de la Transferencia de Calor en Fenómenos de Convección", *Tesis Doctoral*, Universitat Politècnica de Catalunya, (1987).