

# APLICACION DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS A LA EVALUACION DE LA INTEGRAL $J$ EN LA PROBETA DE TENSION COMPACTA

FERNANDO LABBE

y

JUAN DONOSO

*Universidad Técnica Federico Santa María  
Casilla 110-V, Valparaiso - Chile*

## RESUMEN

El presente artículo muestra la evaluación numérica de la integral  $J$  en la probeta de tensión compacta por el método de elementos finitos. El comportamiento elasto-plástico del material es modelado con un criterio de fluencia de Von Mises. Para la determinación de  $J$  se utilizan tres estrategias: primeramente se usa la definición original de  $J$  como integral de línea. En segundo lugar, se evalúa  $J$  utilizando su definición alternativa como razón de liberación de energía por unidad de longitud de fisura. Finalmente, se determina  $J$  a partir de resultados numéricos para carga aplicada en función del desplazamiento en la línea de carga de la probeta, utilizando la formulación de Merkle-Corten.

Para las condiciones empleadas, el método de razón de liberación de energía por unidad de longitud de fisura entrega valores comparables a los del método de Merkle-Corten, siendo sí más fácil de aplicar numéricamente a la estructura del programa utilizado.

## SUMMARY

This work presents the numerical evaluation of the  $J$  Integral for the compact tension specimen by the Finite Element Method. The elastic-plastic behavior of the material is modelled by using the von Mises yield criterion. Three strategies are used for the evaluation of  $J$ : first, the original definition of  $J$  as a line integral is employed. Second,  $J$  is evaluated by using its alternative definition as the energy release rate per unit crack length. Finally,  $J$  is evaluated from numerical results for applied load as a function of load line displacement, using the Merkle-Corten formulation.

For the assumed conditions, the energy release rate method yields values comparable to those given by the Merkle-Corten method. However, the former is simpler to apply numerically, for it does not require substantial modifications in the structure of the program used.

Recibido: Enero 1989

## INTRODUCCION

Los criterios tradicionales de diseño estructural basados en el esfuerzo máximo o en el de fluencia, son insuficientes para evaluar cuantitativamente el margen de seguridad contra fractura en estructuras construidas con materiales altamente resistentes y que contengan fisuras. Estos defectos pueden producirse durante la fabricación, montaje o servicio del elemento estructural. Debido a la alta resistencia y a la normalmente baja tenacidad de estos materiales, es que son sensibles a la propagación inestable de estos defectos, los cuales bajo determinadas cargas pueden conducir a una falla catastrófica.

Las metodologías de Mecánica de Fractura Elástico Lineal (MFEL) y Mecánica de Fractura Elasto-Plástica (MFEP) analizan este problema y entregan métodos que permiten evaluar cuantitativamente la peligrosidad de estos defectos. En el caso de MFEL, ésta ha sido extensamente utilizada en materiales de baja tenacidad y donde se cumpla la condición de fluencia en pequeña escala (small scale yielding)<sup>1</sup>. Sin embargo, en muchos casos y sobre todo en operaciones con alta temperatura (Ej. reactores nucleares) el material presenta una gran deformación plástica alrededor de la punta de la fisura antes de que ésta se propague, excluyendo así la aplicabilidad de MFEL. En estos casos, la Mecánica de Fractura Elasto-Plástica (MFEP) permite extender estos criterios a situaciones elasto-plásticas usando parámetros tales como la integral de trayectoria independiente  $J^2$ .

El uso de la integral  $J$  para caracterizar la iniciación de fisuras en materiales dúctiles ha sido planteado por Begley<sup>3</sup>. En este esquema el crecimiento de la fisura se iniciará cuando el  $J$  aplicado sea igual a la tenacidad a la fractura  $J_{IC}$ . La determinación experimental de  $J_{IC}$  se realiza a través de ensayos estandarizados en una probeta de tensión compacta<sup>4,5</sup>.

El propósito de este trabajo es la aplicación del método de Elementos Finitos a la determinación de la integral  $J$  en la probeta de tensión compacta. El material a considerar es un acero estructural con un esfuerzo de fluencia de 40 kg/mm<sup>2</sup> y un endurecimiento por deformación dado por  $E_T = 1000$  kg/mm<sup>2</sup>, con un criterio de fluencia de Von Mises. La zona alrededor del vértice de la entalla es modelada con elementos isoparamétricos de 8 nodos<sup>6</sup>. Primeramente se utiliza la definición de  $J$  como integral de línea para su evaluación numérica. Posteriormente se determina  $J$  utilizando la definición como razón de liberación de energía por unidad de largo de fisura. Finalmente se obtiene  $J$  a partir de resultados numéricos para carga aplicada en función del desplazamiento en el punto de aplicación de carga de la probeta.

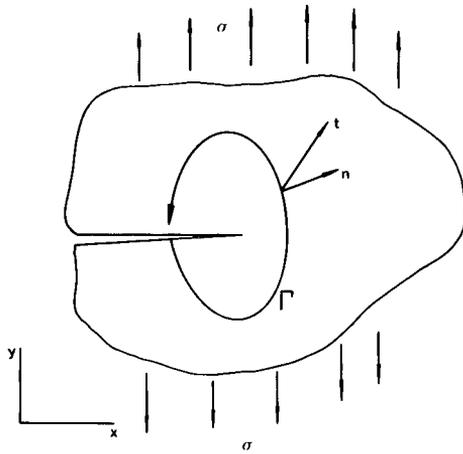
### Integral de Trayectoria Independiente $J$

Considerando una fisura en un plano bidimensional (Figura 1) la integral  $J$  se define como<sup>2</sup>

$$J = \int_{\Gamma} (W dy - t \cdot \frac{\partial u}{\partial x} ds) \quad (1)$$

donde

$W$ : energía de deformación,



$$J = \int_{\Gamma} W dy - t \cdot \frac{\partial u}{\partial x} ds$$

$W$ : energía de deformación.  
 $t$ : campo vectorial de esfuerzo.  
 $u$ : campo vectorial de desplazamiento.  
 $\Gamma$ : trayectoria de integración.

Figura 1. Fisura en un medio bidimensional y trayectoria para integral  $J$ .

- $t$ : vector esfuerzo,
- $u$ : vector desplazamiento,
- $s$ : longitud de arco,
- $\Gamma$ : trayectoria alrededor de la fisura.

El desarrollo clásico de  $J$  demuestra que para un cuerpo que posea una densidad de energía de deformación y deformaciones infinitesimales, entonces la integral  $J$  es de trayectoria independiente. En el caso elasto-plástico si el comportamiento constitutivo es modelado por teoría de deformación,  $J$  aún es invariante. Sin embargo, en el caso general elasto-plástico no existe demostración de invariancia de  $J$ . No obstante, si se considera sólo cargas monotónicas la modelación de  $J$  puede hacerse con teoría de flujo plástico, que representa mejor el comportamiento elasto-plástico.

En la aplicación a problemas elasto-plásticos la energía de deformación  $W$  en la expresión de  $J$  puede convenientemente ser descompuesta en una parte elástica y otra plástica:

$$W = W_e + W_p \tag{2}$$

En tal caso

$$W_e = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \tag{3}$$

$$W_p = \int_0^{\bar{\epsilon}} \bar{\sigma} \cdot d\bar{\epsilon} \tag{4}$$

Donde  $\sigma_{ij}$  y  $\epsilon_{ij}$  son las componentes tensoriales de esfuerzo y deformación infinitesimal elástica y  $\bar{\sigma}$  y  $\bar{\epsilon}$  son los esfuerzos y deformaciones plásticas efectivas dadas por:

$$\bar{\sigma} = \frac{3}{2} J_2^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

$$d\bar{\epsilon} = \frac{2}{3} de_{ij} de_{ij}^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

Donde  $J_2$  es el segundo invariante del tensor esfuerzo deviatorico,  $S$  y  $de_{ij}$  es el incremento plástico de la deformación, ambos expresados como:

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \quad (7)$$

$$de_{ij} = (de_{ij})_{\text{TOTAL}} - d\epsilon_{ij} \quad (8)$$

En la expresión de  $J$  el vector esfuerzo  $t$  y el tensor  $\sigma$  está dado por:

$$t = \sigma n \quad (9)$$

Donde  $n$  es el vector unitario normal a la superficie donde actúa  $t$ .

Reemplazando (2), (3) y (9) en (1), se obtiene:

$$J = \int_{\Gamma} \left[ \frac{1}{2} (\sigma_{11}\epsilon_{11} + \sigma_{12}\epsilon_{12} + \sigma_{22}\epsilon_{22}) + W_p \right] dy \\ - \left[ (\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2) \frac{\partial u}{\partial x} + (\sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2) \frac{\partial v}{\partial x} \right] ds$$

Donde

$$n_1 = \cos(n_1, n)$$

$$n_2 = \cos(n_2, n)$$

con las relaciones elásticas:

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu\sigma_{12}]$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}]$$

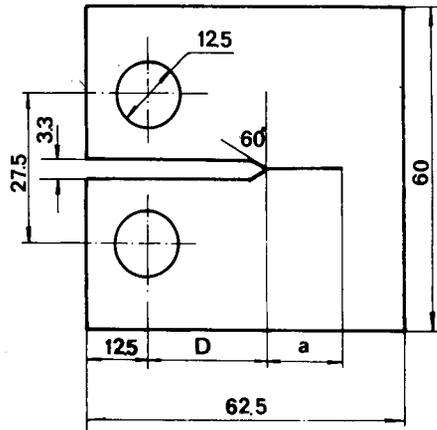
$$\epsilon_{12} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{12}$$

Donde  $E$  y  $\nu$  son el módulo de elasticidad y de Poisson, respectivamente.

La evaluación del término energía de deformación plástica  $W_p$  se implementó dentro del esquema iterativo incremental del programa de elementos finitos. En el apéndice se entrega los detalles de la implementación de la evaluación numérica de la integral  $J$  como integral de línea.

La geometría de la probeta de tensión compacta analizada se muestra en la Figura 2.

Resultados numéricos para  $J$  en función de carga y desplazamiento aplicado se presentan respectivamente en Figuras 3 y 4.



$B = 25$  (mm)

Figura 2. Geometría de la probeta de tensión compacta según norma ASTM E-399.

Probeta CT de Acero A 588

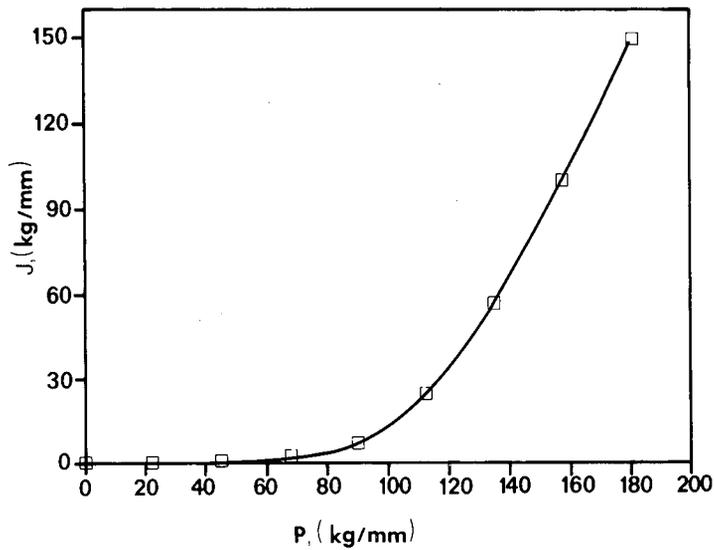


Figura 3. Valores numéricos de  $J$  en función de carga aplicada. Definición de  $J$  como integral de línea.

**Evaluación de  $J$  como velocidad de liberación de energía.**

La interpretación de  $J$  como velocidad de liberación de energía puede expresarse como<sup>7</sup>

$$J = \frac{-1}{B} \frac{\partial U}{\partial a} \tag{10}$$

## Probeta CT de Acero A 588

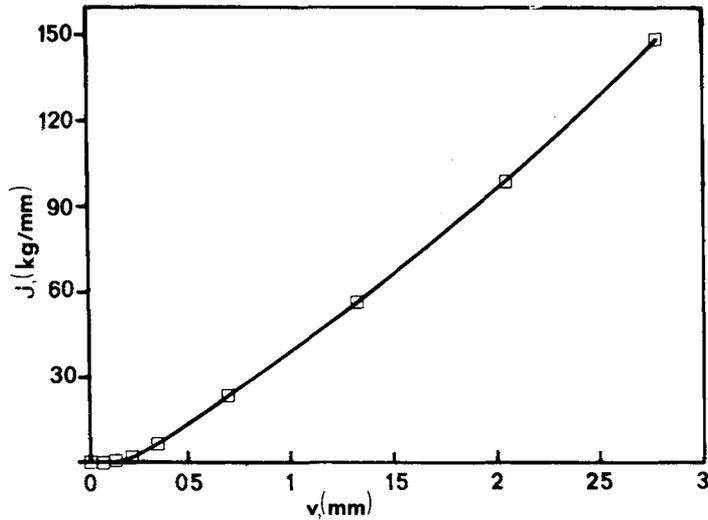


Figura 4. Valores numéricos de  $J$  en función del desplazamiento en la línea de carga. Definición de  $J$  como integral de línea.

donde:

$U$  = energía bajo la curva carga-desplazamiento

$a$  = longitud de la fisura

$B$  = espesor de la probeta.

Para la evaluación numérica de  $J$  basada en la ecuación (10) se procedió a modelar la probeta de tensión compacta, considerando tres largos de prefisuramiento diferenciados levemente entre ellas (1 mm). Los resultados para las curvas carga-desplazamiento obtenidos para los tres largos de fisura considerados se muestran en la Figura 5. La derivada de la energía en la ecuación (10) se aproxima por su expresión de primer orden:

$$J \simeq \frac{-1}{B} \frac{\Delta U}{\Delta a} \quad (11)$$

donde  $\Delta U$  es la diferencia de área entre las dos curvas consideradas. Evidentemente, esta aproximación será más exacta cuanto más pequeña sea la diferencia en el largo de fisura considerado.

Los resultados para  $J$   $v/s$   $\delta$  se muestran en la Figura 6. En esta Figura además se presentan resultados obtenidos por Electric Power Research Institute (EPRI)<sup>8</sup> mediante un esquema de estimación elasto-plástica.

#### Evaluación de $J$ utilizando la fórmula de Merkle-Corten

Una expresión útil para evaluar  $J$  en la probeta de tensión compacta y basada sólo en los resultados de carga aplicada versus desplazamiento en la línea de carga es la siguiente<sup>9</sup>:

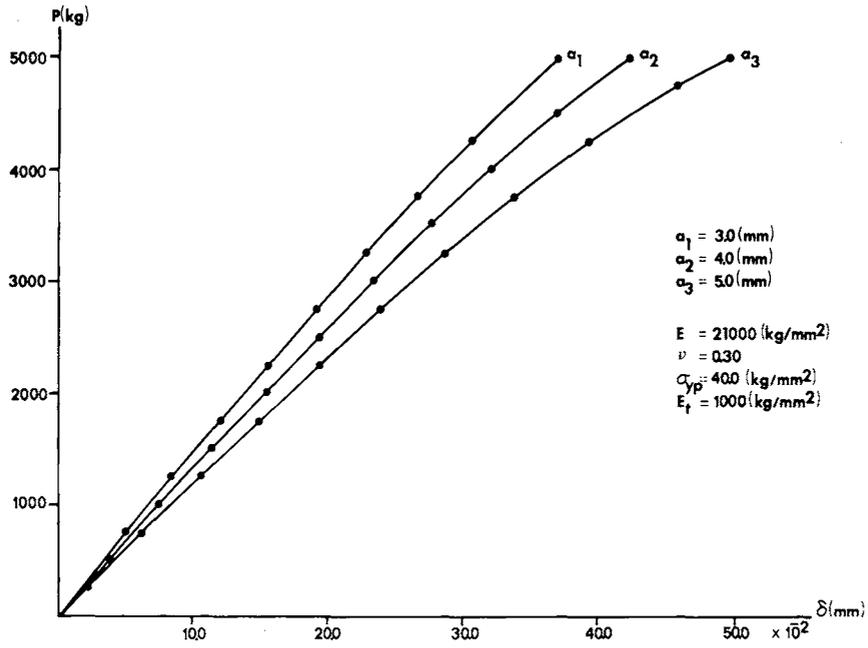


Figura 5. Resultados para carga aplicada en función del desplazamiento en la línea de carga para distintos largos de prefisura.

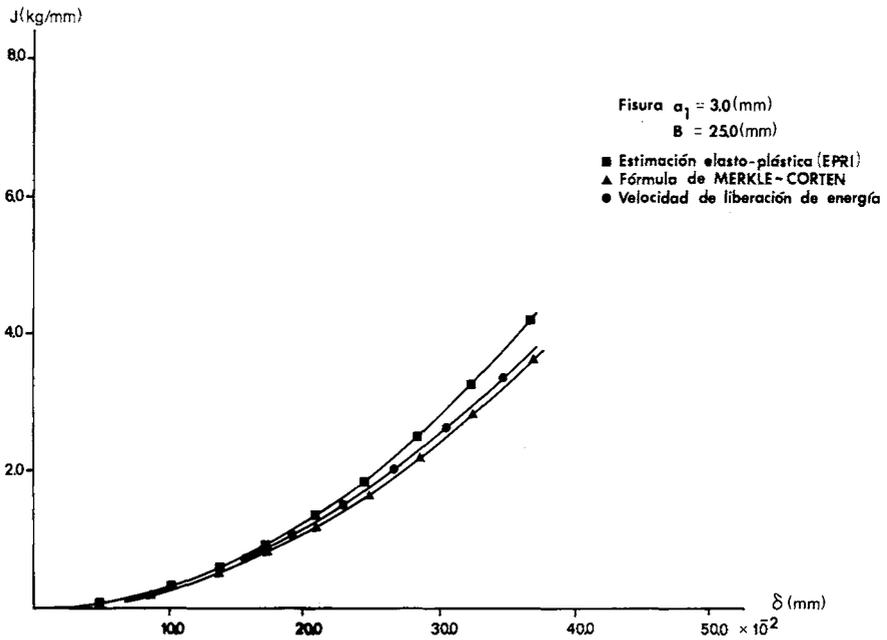


Figura 6. Comparación de resultados para  $J$  en función del desplazamiento en la línea de carga. Método de liberación de energía, fórmula de Merkle-Corten y EPRI.

$$J = \frac{f(a/W)A}{Bb}$$

donde:

- $A$  = área bajo la curva carga aplicada versus desplazamiento en la línea de carga,
- $B$  = espesor de la probeta,
- $b$  = longitud del ligamento,
- $a$  = largo original de la fisura,
- $W$  = ancho de la probeta,
- $f(a/W)$  = factor adimensional de Merkle-Corten y que depende del cociente  $a/W$ .

La evaluación de  $J$  se realizó utilizando los resultados numéricos para desplazamiento en la línea de carga en función de la carga aplicada, obtenidos del análisis elasto-plástico por elementos finitos en la probeta.

Los resultados obtenidos por este método se muestran en la Figura 6, donde además se compara con aquellos obtenidos por el método de liberación de energía de la sección anterior y EPRI. Como se puede apreciar de la Figura, existe una buena correlación con los resultados obtenidos por el método de liberación de energía. En la Figura 7 se presenta otros resultados de  $J$  versus  $\delta$  considerando los largos de prefisura como parámetros.

## RESUMEN Y CONCLUSIONES

En este trabajo se han presentado tres formas alternativas de evaluar numéricamente la integral  $J$ . En el primer esquema se utilizó la definición de  $J$  como integral de línea para proceder a su discretización numérica. Este esquema es más complicado, pues requiere modificar la estructura interna del programa de elementos finitos para obtener las variables requeridas en la expresión numérica de la integral de línea.

El método de evaluación de  $J$  basado en su definición alternativa, como velocidad de liberación de energía, es más simple y confiable de aplicar. Para aumentar la exactitud de este método se deberá considerar cambios muy pequeños en los largos de la fisura. Finalmente, este método es bastante promisorio, pues permite extender la aplicación del concepto de integral  $J$  a cuerpos tridimensionales y también la evaluación de  $J$  en configuraciones complejas de geometría y cargas.

El último esquema para evaluar  $J$  se basó en la fórmula de Merkle-Corten. Esta expresión, que está limitada sólo a algunas geometrías de interés en análisis experimental, es de gran importancia, pues permite comparar sus resultados con aquellos obtenidos con diferentes esquemas numéricos.

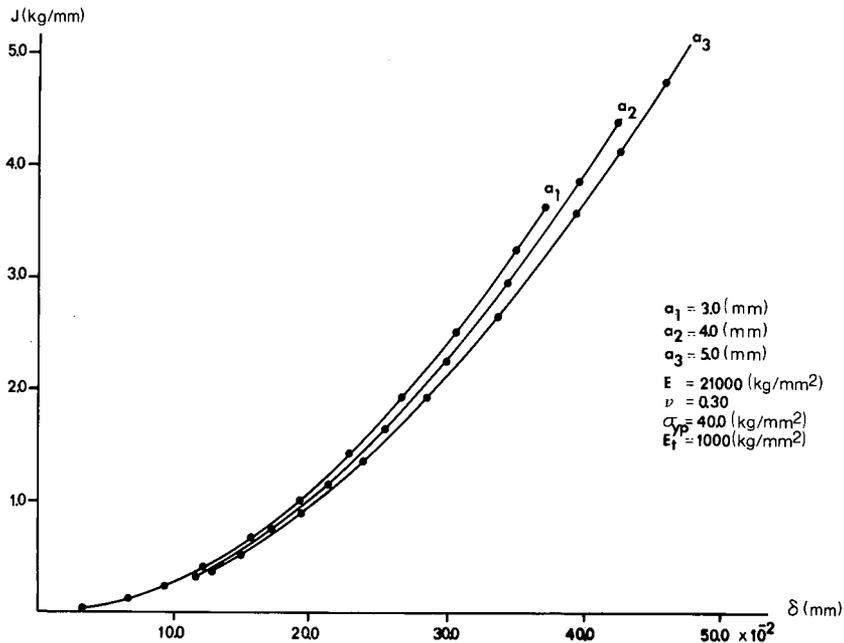


Figura 7. Resultados numéricos de  $J$  en función del desplazamiento de la línea de carga. Fórmula de Merkle-Corten y largos de prefisura como parámetros.

APENDICE

EVALUACION NUMERICA DE J

Para la evaluación numérica de  $J$  definida como integral de línea, se procede a discretizar la trayectoria de  $J$  en un número de segmentos donde la contribución a la integral  $J$  de cada segmento se obtiene de la solución del campo de esfuerzos y desplazamientos por el Método de Elementos Finitos (MEF) para el elemento en particular que contiene el segmento. Dos estrategias desde el punto de vista de MEF son necesarias por conveniencia: primero, la trayectoria en el elemento se ajusta a que pase por los puntos de integración gaussianos (Figura A.1) y segundo, se “mapea” el elemento finito a un elemento maestro (Figura A.2) ( $-1 \leq r \leq 1, -1 \leq s \leq 1$ ) de forma tal de facilitar las integraciones numéricas necesarias para evaluar  $J$  en la trayectoria (Figura A.2).

Utilizando la transformación:

$$x = x(r, s)$$

$$y = y(r, s)$$

Se “mapea” la contribución elemental a la integral  $J$  en  $x-y$  a una expresión en el elemento normalizado en  $r-s$ . Esta contribución elemental a  $J$  en  $r-s$  a lo largo de la

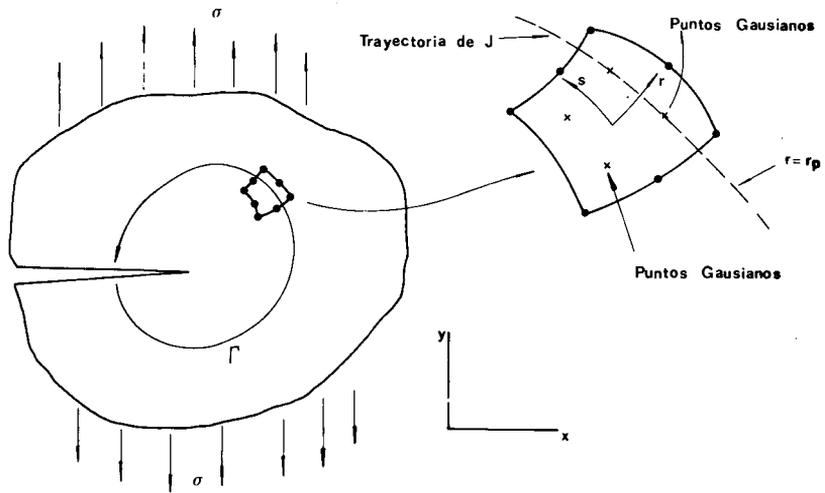
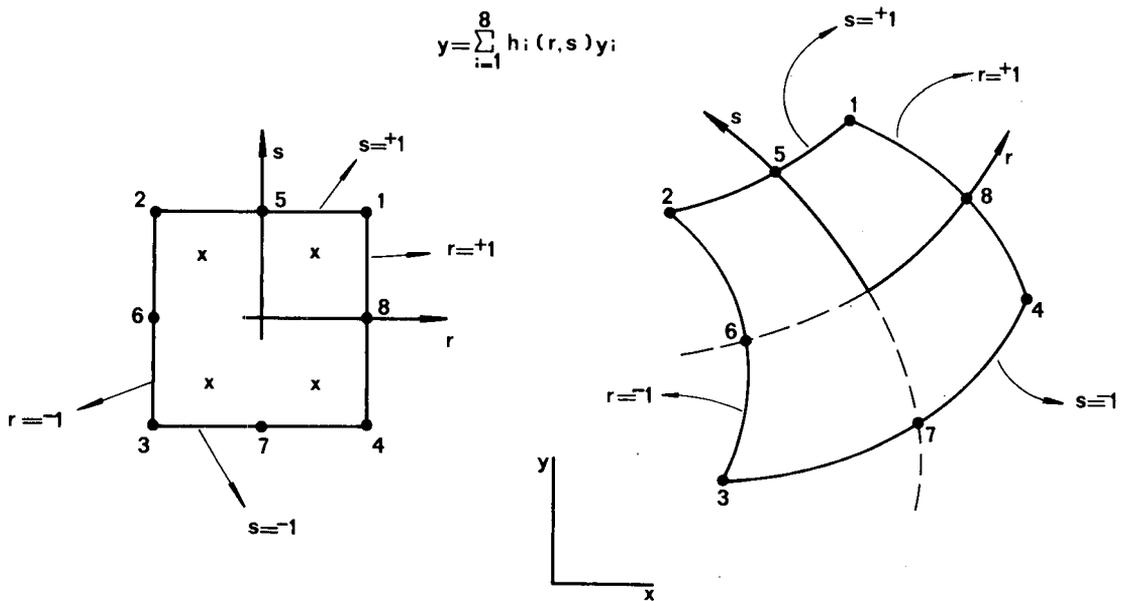


Figura A.1. Contorno para evaluación de integral  $J$  en con elemento isoparamétrico de 8 nodos.

$$x = \sum_{i=1}^8 h_i(r, s) x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^8 h_i(r, s) y_i$$



$$x = \sum_{i=1}^8 h_i(r, s) x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^8 h_i(r, s) y_i$$

Figura A.2. Transformación isoparamétrica de un elemento de 8 nodos.

línea  $r = r_p$  está dada por:

$$J^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \left[ \frac{1}{2} (\sigma_{11}\epsilon_{11} + \sigma_{12}\epsilon_{12} + \sigma_{22}\epsilon_{22}) \frac{\partial y}{\partial s} + W_p \frac{\partial y}{\partial s} - (\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2) \frac{\partial u}{\partial x} - (\sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2) \frac{\partial v}{\partial x} \right] \times \sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial s} + \frac{\partial y^2}{\partial s}} ds$$

o bien:

$$J^{(e)} = \int_{-1}^{+1} I ds$$

La integración anterior se realiza numéricamente utilizando los puntos gaussianos del elemento analizado.

$$J^{(e)} = \sum_{Q=1}^{NGAUS} I(r_p, s_p) W_q$$

en el cual  $W_q$  es el factor de peso correspondiente a  $s_p$ .

La integral total se obtiene sumando todas las contribuciones de todos los elementos que conforman la trayectoria de  $J$ .

### AGRADECIMIENTOS

Los autores desean expresar sus agradecimientos al Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico (FONDECYT) por el soporte financiero a través del Proyecto N° 237/87 "Análisis Elasto-Plástico de la Probeta de Tensión Compacta por Elementos Finitos".

### REFERENCIAS

1. J.W. Hutchinson, "Fundamentals of the Phenomenological Theory of Non linear Fracture Mechanics", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, pp. 337-347, (1983).
2. J.R. Rice, "A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 35, pp. 379-386, (1968).
3. J.A. Begley y J.D. Landes, "The  $J$  Integral as a Fracture Criterion", *Fracture Toughness*, ASTM, STP-514, pp. 1-23, (1972).
4. ASTM E-813, Standard Test for  $J$ , A Measure of Fracture Toughness, American Society for Testing and Materials, (1985).
5. ASTM E-399, Standard Test Method for Plane Strain Fracture Toughness of Metallic Materials, American Society for Testing and Materials, (1983).
6. K.J. Bathe, "*Finite Element Procedures in Engineering Analysis*", Prentice Hall, (1982).

7. J.R. Rice, "*Fracture: An Advanced Treatise*", Editor H. Liebowitz, Vol. 2, Academic Press, (1968).
8. V. Kumar, M.D. German y C.F. Shih, "An Engineering Approach for Elastic Plastic Fracture Analysis", Research Project 1237-1, General Electric Company, (1981).
9. J.G. Merkle y H.T Corten, "A  $J$  Integral Analysis for the Compact Test Specimen Considering Axial Force as Well as Bending Effects", ASME Paper no. 74-PVP-33, American Society of Mechanical Engineers, (1974).