

# UN NUEVO PROCEDIMIENTO NUMERICO PARA LA EVALUACION DE INTEGRALES SINGULARES DE VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY EN METODOS DE CONTORNO

MIGUEL CERROLAZA\*  
y  
ENRIQUE ALARCON\*\*

*\*Instituto de Materiales y Modelos Estructurales  
Universidad Central de Venezuela  
Aptdo. postal 50361, Sabana Grande, Caracas, Venezuela*

*\*\*Departamento de Mecánica Estructural y  
Construcciones industriales  
Universidad Politécnica de Madrid  
C/ Gutierrez Abascal, 2, Madrid 28006, España*

## RESUMEN

Es indudable que las estrategias para evaluar numéricamente en el computador integrales singulares en el sentido de Valor Principal de Cauchy (VPC) constituyen uno de los aspectos clave en la precisión y confiabilidad del Método de los Elementos de Contorno. Así pues, en este trabajo se presenta un nuevo procedimiento numérico orientado a la evaluación de integrales singulares VPC y de aquellas que contengan otro tipo de singularidades, basado en una transformación bi-cúbica de coordenadas. Se desarrollan las ideas y detalles de la formulación propuesta, obteniéndose expresiones sencillas y atractivas para la cuadratura numérica y rápidamente incorporables a los códigos MEC ya existentes. Se presentan algunos ejemplos numéricos que avalan la estabilidad y precisión de los nuevos algoritmos.

## SUMMARY

The numerical strategies employed in the evaluation of singular integrals existing in the Cauchy Principal Value (CPV) sense are, undoubtedly, one of the key aspects which remarkably affect the performance and accuracy of the Boundary Element Method. Thus, a new procedure, based upon a bi-cubic coordinate transformation and oriented towards the numerical evaluation of both the CPV integrals and some others which contain different types of singularities, is developed. Both the ideas and some details involved in the proposed formulae are presented, obtaining rather simple and attractive expressions for the numerical quadrature which are also easily embodied into existing BEM codes. Some illustrative examples which assess the stability and accuracy of the new formulae are included.

Recibido: Junio 1988

## INTRODUCCION

Es un hecho comúnmente aceptado que el Método de los Elementos de Contorno (MEC) constituye una poderosa herramienta en la solución de problemas ingenieriles de orden práctico. En la última década ha habido una impresionante producción de publicaciones sobre el tema tanto en lo que se refiere a desarrollos teóricos como aplicaciones prácticas<sup>4,9,10,19</sup>.

Recientemente, se ha demostrado que las técnicas autoadaptables pueden ser utilizadas con éxito dentro del contexto del MEC<sup>1,2,5,6,21,24,25</sup>. Sin embargo, aún cuando los resultados obtenidos son en cierta medida espectaculares, se ha encontrado que subsiste el problema de la correcta evaluación numérica de integrales cuasi-singulares y singulares en el sentido de Valor Principal de Cauchy (VPC), las cuales aparecen frecuentemente en la aplicación de los métodos de contorno. Este punto es de capital importancia, sobre todo en la versión p-adaptable del MEC debido a que los elementos utilizados para discretizar la frontera se escogen del mayor tamaño posible, compatibles con la geometría de la misma y con las condiciones de contorno aplicadas al problema.

Además, si los criterios de refinamiento deben ser fiables, es preciso que la evaluación de la función residuo en la versión p-adaptable del MEC necesaria para la determinación de los parámetros de error que gobiernan el proceso p-adaptable<sup>2,6,7,12</sup> sea realizada con la máxima precisión.

En el caso de integrales cuasi-singulares, es decir, cuando el punto de colocación está muy cerca del recinto de integración, es preciso tomar precauciones especiales para obtener resultados satisfactorios. Diversos esquemas han sido propuestos en la literatura técnica, como por ejemplo, el de Jun et. al.<sup>15</sup>, quienes subdividen el intervalo de integración en las zonas próximas al punto de colocación y luego integran sobre cada subdivisión con una cuadratura standard de Gauss-Legendre. Estos mismos autores en otra publicación<sup>16</sup> utilizan una fórmula doble-exponencial combinada con integración standard de Gauss-Legendre que funciona satisfactoriamente. Sin embargo, estas técnicas son costosas ya que requieren el empleo de un número alto de puntos de integración. Telles<sup>27</sup> soluciona este problema proponiendo una transformación no-lineal auto-adaptable de coordenadas en función de la cercanía del punto de colocación al recinto de integración, la cual mejora notablemente la precisión en los cálculos de integrales cuasi-singulares y es muy atractiva dada su simplicidad computacional.

En el caso de integrales singulares en el sentido de VPC, es decir, cuando el punto de colocación pertenece al intervalo de integración numérica, debe procederse con especial cuidado en la integración numérica. También han sido propuestas diferentes estrategias en la literatura técnica. Algunos autores como Rank<sup>24</sup> y Parreira<sup>25</sup> efectúan las integraciones analíticamente sobre elementos rectos. Sin embargo, en el caso del MEC p-adaptable esta forma de proceder es inconveniente ya que reduce notablemente la posibilidad de definir macroelementos curvos que se ajusten a extensas regiones de la frontera en estudio.

Las cuadraturas de parte finita de Kutt<sup>17,18</sup> también pueden ser utilizadas pero presentan la desventaja de necesitar la subdivisión del elemento singular y no funcionan en presencia de singularidades  $O(\log x)$ .

También es posible utilizar las llamadas técnicas de "bootstrap"<sup>22</sup>, recientemente

aplicadas al MEC por Giuggiani et. al.<sup>13</sup>, las cuales permiten escribir

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{f(x)}{x-\lambda} \cdot dx &= \int_a^b \frac{f(x)-f(\lambda)}{x-\lambda} \cdot dx + f(\lambda) \int_a^b \frac{dx}{x-\lambda} \\ &= \int_a^b \frac{f(x)-f(\lambda)}{x-\lambda} \cdot dx + f(\lambda) \operatorname{Log} \left| \frac{b-\lambda}{\lambda-a} \right| \end{aligned}$$

donde  $f(x)$  es una función regular en  $[a, b]$ ,  $\lambda \in (a, b)$  y ahora la cantidad subintegral es regular, pudiéndose evaluar mediante cuadraturas standard de Gauss-Legendre siempre y cuando ningún punto de integración coincida con  $\lambda$ . Tienen el inconveniente de no ser aplicables a singularidades  $O(\operatorname{Log} x)$  y  $O(1/x^r)$  con  $r > 1$ .

La intención de este trabajo es desarrollar y presentar un procedimiento enteramente numérico para evaluar integrales singulares en el sentido de VPC y con singularidades  $O(\operatorname{Log} x)$  las cuales aparecen frecuentemente en los métodos integrales. En lo que sigue, se presentará un breve resumen de las ecuaciones básicas del MEC para problemas elásticos y, a continuación, el método propuesto será desarrollado en detalle. También, y con el objetivo de evaluar la precisión del procedimiento desarrollado, se incluirán algunos ejemplos numéricos.

## BREVE REPASO DE LA FORMULACION

Como es bien conocido, el llamado "enfoque directo" en el MEC se expresa a través de la relación integral de Somigliana<sup>4</sup> la cual puede escribirse (despreciando las fuerzas de dominio) como

$$C(P) \cdot \mathbf{u}(P) + \int_{\Gamma} \mathbf{T}^*(P, Q) \cdot \mathbf{u}(Q) \, d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} \mathbf{U}^*(P, Q) \cdot \mathbf{t}(Q) \, d\Gamma(Q) \quad (1)$$

La ecuación anterior expresa la relación de reciprocidad existente, por una parte, entre el estado actual de las tracciones  $\mathbf{t}(Q)$  y desplazamientos  $\mathbf{u}(Q)$  definidos en un punto  $Q \in \Gamma$  y, por otra parte, una solución fundamental definida por un sistema de cargas concentradas unitarias actuando en un punto de colocación  $P \in \Gamma$ , cuyo estado mecánico queda reflejado por las tracciones  $\mathbf{T}^*(P, Q)$  y los desplazamientos  $\mathbf{U}^*(P, Q)$ .  $C(P)$  es una matriz relacionada con las características geométricas de la frontera en el entorno del punto de colocación  $P$ <sup>14</sup>.

Si se interpretan las funciones  $\mathbf{T}^*(P, Q)$  y  $\mathbf{U}^*(P, Q)$  como funciones de ponderación, es posible interpolar  $\mathbf{u}(Q)$  y  $\mathbf{t}(Q)$  utilizando los enfoques clásicos de los métodos proyectivos y discretizar el problema mediante un conjunto de ecuaciones integrales lineales

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (2)$$

donde  $\mathbf{X}$  es un vector que colecciona las incógnitas del contorno y  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{F}$  son calculados mediante integración numérica o analítica de los coeficientes de influencia. El lector

interesado en los detalles de la formulación puede consultar por ejemplo, las referencias [4], [9], [19].

En el caso de elastostática 2-D, las funciones vectoriales  $T^*(P, Q)$  y  $U^*(P, Q)$  contienen singularidades del tipo  $O(1/x)$  y  $O(\text{Log } x)$ , respectivamente. La primera de ellas es integrable apenas en el sentido de VPC y la integración de la segunda debe realizarse desdoblado el núcleo integral y aplicando cuadraturas especiales con funciones de peso logarítmicas (véase, por ejemplo, Bertohld-Zaborowsky<sup>3</sup>). Todo ello implica que los núcleos integrales deben tratarse por separado con las complicaciones operacionales correspondientes.

Por otro lado, en la versión p-adaptable del MEC<sup>2,6,8</sup> los macroelementos seleccionados para discretizar la frontera se escogen del mayor tamaño posible, compatibles con la geometría de la misma y las condiciones de contorno aplicadas. Se comprende entonces la enorme importancia de evaluar apropiadamente las integrales en (1) si se desea obtener unos resultados razonablemente precisos. Adicionalmente, la evaluación de los parámetros de error que gobiernan el proceso p-adaptable en el MEC requiere, necesariamente, del cálculo "a posteriori" de las variables incógnitas en el interior de los elementos mediante la fórmula (1), lo cual también exige una muy cuidadosa integración.

En lo que sigue, se propone un procedimiento numérico para la evaluación de tales integrales, el cual ha demostrado ser altamente eficiente y fácil de implementar en códigos MEC actualmente existentes.

## TRANSFORMACION BI-CUBICA PROPUESTA

Considérese la integral

$$I = \text{PF} \int_a^b \frac{x - x_s}{|x - x_s|^r} \cdot w(x) \cdot f(x) dx \quad (3)$$

$$\begin{aligned} x_s &\in (a, b) \\ r &\in R[+] \\ r &\geq 2 \end{aligned}$$

donde  $\text{PF}f$  denota "parte finita",  $f(x)$  es cualquier función regular suficientemente diferenciable en  $[a, b]$  y  $w(x)$  es una función de ponderación arbitraria también definida sobre  $[a, b]$ . Suponiendo que  $f(x) \neq 0$  y si  $r = 2$  entonces la integral (3) existe en el sentido de VPC. En el caso en que  $r > 2$ ,  $f(x)$  necesita satisfacer algunas condiciones adicionales<sup>17,20</sup> para poder ser considerada una integral de "Valor Principal Generalizada". En la discusión que sigue, nos limitaremos al caso  $r = 2$ , aunque el algoritmo propuesto también es aplicable cuando  $r > 2$ .

Así pues, la integral (3) puede ser escrita como<sup>17</sup>

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_a^{x_s - \epsilon} g(x) dx + \int_{x_s + \epsilon}^b g(x) \cdot dx \right] \quad (4)$$

donde ahora el núcleo  $g(x)$  contiene la singularidad de orden  $r$ , es decir

$$g(x) = \frac{x - x_s}{|x - x_s|^r} \cdot w(x) \cdot f(x) \tag{5}$$

La integral (4) debe transformarse a un dominio adimensional  $\eta \in [-1, 1]$  para realizar su evaluación numérica mediante cuadraturas gaussianas, con lo que

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{-1}^{\eta_s - \epsilon} g(\eta) d\eta + \int_{\eta_s + \epsilon}^1 g(\eta) d\eta \right] \tag{6}$$

donde  $\eta_s$  es la abscisa correspondiente a la singularidad  $x_s$ . Ahora, suponiendo que  $w(x) = 1$  se tiene

$$g(\eta) = \frac{\eta - \eta_s}{|\eta - \eta_s|^r} \cdot f(\eta) \cdot J(\eta) \tag{7}$$

donde  $J(\eta)$  es el jacobiano de la transformación.

La idea central del procedimiento numérico aquí propuesto descansa, básicamente, en los dos siguientes requisitos:

- a) es conveniente agrupar los puntos de integración en torno a la singularidad  $\eta_s$ , para recoger más fielmente los altos gradientes de las variables.
- b) es necesario obtener una distribución de puntos de integración que respete las exigencias de la ecuación (6), es decir, la cantidad  $\epsilon$  debe ser igual en magnitud a ambos lados de la singularidad  $\eta_s$ .

En la referencia [27] se ha propuesto una transformación no-lineal que satisface el requisito a), por lo cual su esquema funciona correctamente cuando  $\eta_s = 0$ , en virtud de la simetría presente en las cuadraturas numéricas de Gauss-Legendre. Sin embargo, cuando  $\eta_s \neq 0$ , esta transformación no satisface apropiadamente el requisito b), razón por la cual no produce resultados precisos.

Por motivos de claridad y sin que ello implique pérdida de generalidad, considérese ahora el caso más simple, es decir, cuando  $f(\eta) = 1$ . Así, la expresión (6) puede escribirse como

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{-1}^{\eta_s - \epsilon} \frac{\eta - \eta_s}{|\eta - \eta_s|^r} d\eta + \int_{\eta_s + \epsilon}^1 \frac{\eta - \eta_s}{|\eta - \eta_s|^r} d\eta \right] \tag{8}$$

La Figura 1 ilustra el comportamiento de la función integrando en (8).

Se comprende que si no se satisface adecuadamente el requisito b), se produce la no deseada condición  $|\epsilon_a| \neq |\epsilon_b|$  y, en consecuencia, se obtendrán resultados erróneos.

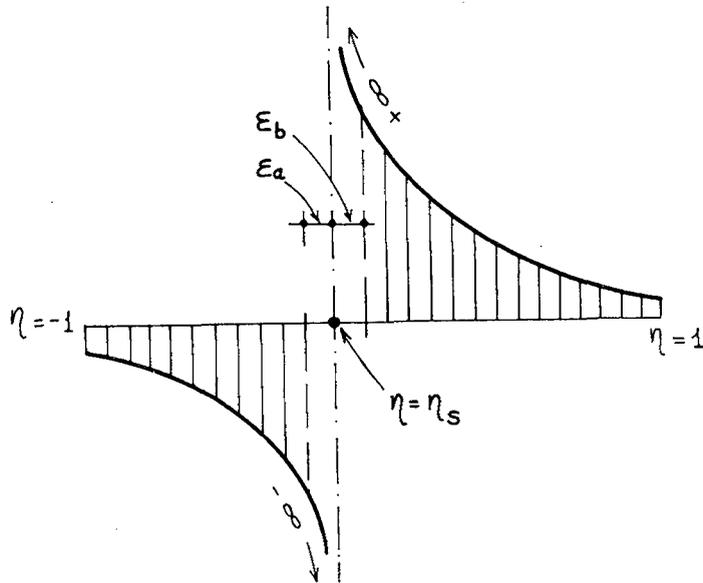


Figura 1. Comportamiento de integrando singular en el sentido de VPC.

En la transformación bi-cúbica propuesta se modifica la posición de los puntos de integración de la cuadratura standard de Gauss-Legendre de acuerdo a dos funciones cúbicas (de ahí el nombre de bi-cúbica) las cuales se definen a ambos lados de la singularidad con los siguientes polinomios:

$$\eta_a(\xi) = A_a \cdot \xi^3 + B_a \cdot \xi^2 + C_a \cdot \xi + D_a \quad (9)$$

$$\eta_b(\xi) = A_b \cdot \xi^3 + B_b \cdot \xi^2 + C_b \cdot \xi + D_b \quad (10)$$

donde ahora los subíndices "a" y "b" denotan parte anterior y parte posterior a la singularidad, respectivamente. La determinación de los coeficientes en las ecuaciones (9) y (10) se realiza aplicando las condiciones de contorno necesarias, a saber:

- parte anterior

$$\eta_a(\xi = -1) = -1 \quad (11)$$

$$\eta_a(\xi = 1) = \eta_s \quad (12)$$

$$\eta_a(\xi_l) = \eta_s - \varepsilon \quad (13)$$

$$\left. \frac{d\eta_a}{d\xi} \right|_{\xi=1} = 0 \quad (14)$$

- parte posterior

$$\eta_b(\xi = -1) = \eta_s \tag{15}$$

$$\eta_b(\xi = 1) = 1 \tag{16}$$

$$\eta_b(\xi_f) = \eta_s + \varepsilon \tag{17}$$

$$\left. \frac{d\eta_b}{d\xi} \right|_{\xi=-1} = 0 \tag{18}$$

Como puede verse, las condiciones (11), (12), y (15), (16) imponen los nuevos límites de integración de la parte anterior y posterior respectivamente. La condición (13) obliga a que la imagen del último punto ( $\xi_l$ ) de la cuadratura gaussiana para la parte anterior (véase Figura 2) quede situada a una distancia  $\varepsilon$  del punto singular y, por otra parte, la condición (17) consigue un efecto similar sobre la posición del primer punto ( $\xi_f$ ) de la cuadratura gaussiana de la parte posterior. En consecuencia, los valores quasi-infinitos que se producen al evaluar la función en  $\eta_s - \varepsilon$  y  $\eta_s + \varepsilon$  tendrán la misma magnitud y signo contrario, anulándose convenientemente.

Las restricciones (14) y (18) tienen la propiedad de "alisar" la singularidad en el entorno del punto singular, con lo cual se consiguen resultados aún mejores. La Figura 2 muestra el efecto que, sobre una distribución standard de puntos de Gauss, producen las transformaciones (9) y (10).

La aplicación de las condiciones de contorno citadas sobre las ecuaciones (9) y (10) conduce a los siguientes valores de los coeficientes:

$$\left. \begin{aligned} A_a &= \frac{1 + \eta_s - \varepsilon + \frac{1+\eta_s}{4} (\xi_l^2 - 1) - \frac{1+\eta_s}{2} (\xi_l + 1)}{[\xi_l^3 - \xi_l^2 - \xi_l + 1]} \\ B_a &= -\frac{4A_a + 1 + \eta_s}{4} \\ C_a &= \frac{1 + \eta_s}{2} - A_a \\ D_a &= -1 + A_a - B_a + C_a \end{aligned} \right\} \tag{19}$$

$$\left. \begin{aligned} A_b &= \frac{\varepsilon - \frac{1-\eta_s}{4} (\xi_f^2 - 1) - \frac{1-\eta_s}{2} (\xi_f + 1)}{[\xi_f^3 + \xi_f^2 - \xi_f - 1]} \\ B_b &= \frac{4A_b + 1 - \eta_s}{4} \\ C_b &= \frac{1 - \eta_s}{2} - A_b \\ D_b &= 1 - A_b - B_b - C_b \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

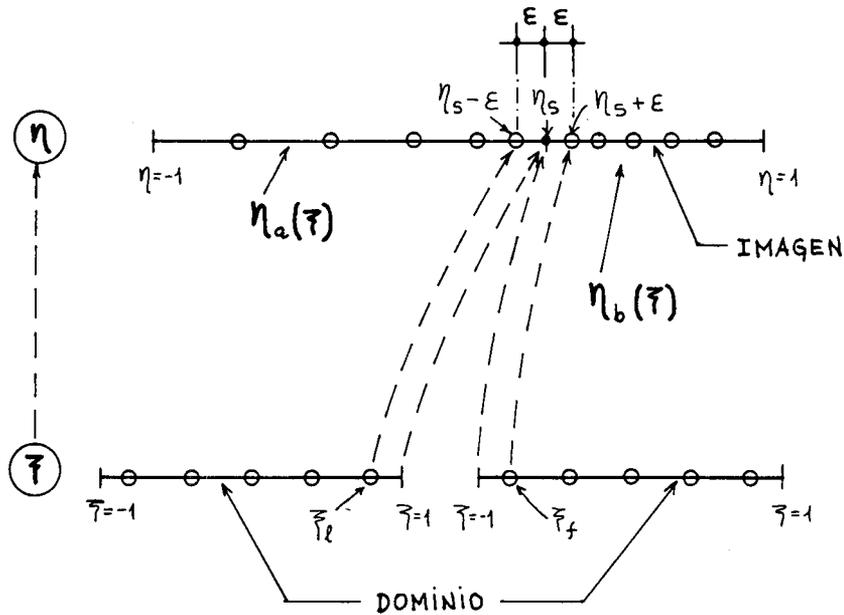


Figura 2. Efecto producido por la transformación bi-cúbica sobre los puntos de integración de Gauss.

$$J_a(\xi) = \frac{d\eta_a}{d\xi} = 3A_a \cdot \xi^2 + 2B_a \cdot \xi + C_a \quad (21)$$

$$J_b(\xi) = \frac{d\eta_b}{d\xi} = 3A_b \cdot \xi^2 + 2B_b \cdot \xi + C_b \quad (22)$$

Así, si se tiene una integral del tipo

$$I = \int_{-1}^1 f(\eta) d\eta \quad (23)$$

con una singularidad  $\eta_s \in (-1, 1)$ , su evaluación numérica mediante la transformación bi-cúbica sería

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 [f(\eta_a(\xi)) \cdot J_a(\xi) + f(\eta_b(\xi)) \cdot J_b(\xi)] d\xi \\ &\approx \sum_{r=1}^{NPG} [f(\eta_a(\xi_r)) \cdot J_a(\xi_r) + f(\eta_b(\xi_r)) \cdot J_b(\xi_r)] w_r \end{aligned} \quad (24)$$

donde las  $\xi_r$  y  $w_r$  son las abscisas y pesos de la cuadratura gaussiana de orden NPG. En la ecuación (24) está implícito el uso del mismo orden de cuadratura a ambos lados de la singularidad. Esta particularidad, si bien no es obligatoria ya que podrían utilizarse perfectamente órdenes diferentes, ha demostrado ser sumamente eficiente y tiene el atractivo de simplificar los detalles computacionales.

También fueron investigadas y desarrolladas transformaciones no lineales de orden superior (orden 5) y si bien se obtienen resultados aceptables, la precisión se deteriora debido a los fuertes gradientes que exhiben estas funciones en el entorno de la singularidad, provocando valores de la nueva función de ponderación muy desiguales a ambos del punto singular<sup>7</sup>.

Por otro lado, nuestra experiencia ha demostrado que un valor del parámetro  $\epsilon$  igual a un milésimo de la longitud del intervalo de integración produce resultados suficientemente precisos en las aplicaciones prácticas del MEC p-adaptable.

Un aspecto a comentar es el referido a la nueva posición de los puntos de integración  $\eta(\xi)$ . En las expresiones (19) y (20) puede notarse que el valor de  $\epsilon$  influye directamente en las mismas. Para algunos valores de  $\epsilon$  y órdenes altos de la cuadratura gaussiana puede ocurrir que los nuevos puntos de integración queden situados fuera del intervalo de integración como muestra la Figura 3. Sin embargo, esto no constituye limitación alguna, ya que se supone que  $f(\eta)$  está definida analíticamente.

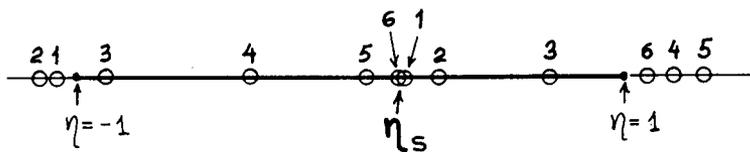


Figura 3. Caso particular de puntos fuera del intervalo de integración:  $\epsilon = 0.003$ , NPG = 6.

Esta propiedad de la transformación bi-cúbica conlleva, necesariamente, a algunos valores negativos de la nueva función de ponderación fuera del intervalo de integración, lo que concuerda con las bien conocidas teorías de polinomios ortogonales<sup>18,26</sup>, según las cuales los puntos de integración deben estar contenidos dentro del intervalo de integración si la función de ponderación está definida positiva en el mismo. Sin embargo, “no se conoce todavía ningún teorema que obligue a que los puntos de integración queden dentro del intervalo de integración”<sup>18</sup>. Más aún, si la función de ponderación no es definida positiva en todo el intervalo, los ceros correspondientes de los polinomios ortogonales (puntos de integración) pueden incluso ser complejos. Tal es el caso de las cuadraturas de parte finita de Kutt donde el primer punto de integración está ubicado fuera del intervalo y su coeficiente de ponderación asociado es negativo para órdenes de la singularidad de 1, 4/3, 3/2, y 5/3.

Así pues, la Figura 4 ilustra una situación particular en la que algunos de los nuevos coeficientes de ponderación de la transformación bi-cúbica son negativos, como corresponde al caso en que algunos puntos de integración queden fuera del intervalo de integración (Figura 3).

### El punto singular coincide con un extremo del intervalo

Como es bien sabido, el hecho de definir elementos de tamaño muy desigual a ambos lados de un punto de colocación  $P$  (véase Figura 5) influye negativamente en la precisión del MEC.

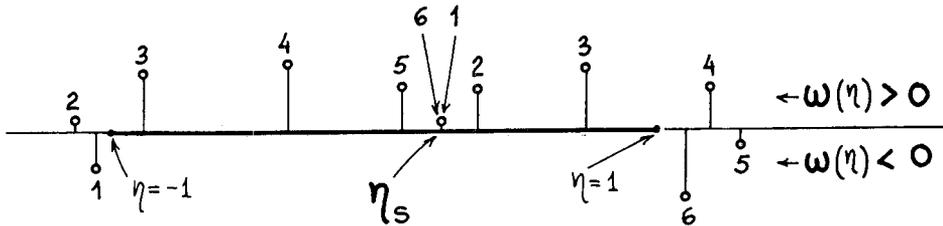


Figura 4. Caso particular de valores de ponderación negativos:  $\epsilon = 0.003$ ,  $NPG = 6$ .

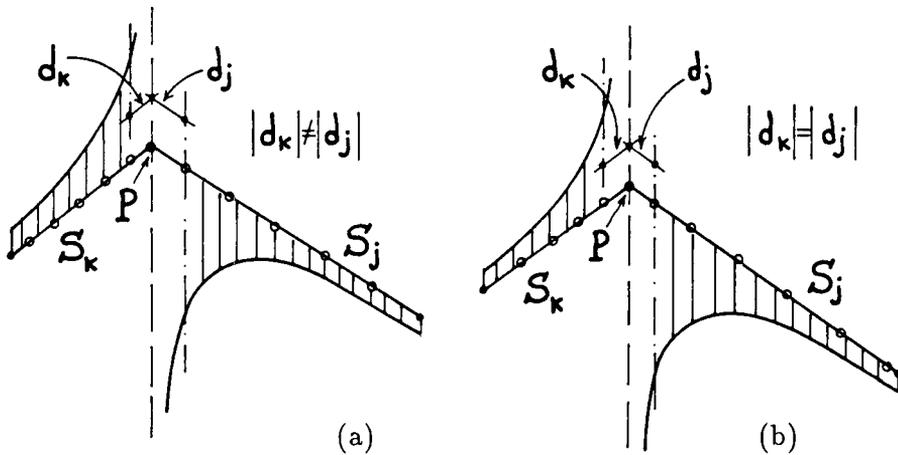


Figura 5. Elementos de contorno de tamaño desigual a ambos lados de un punto singular.

En la Figura 5a puede notarse que si no se obliga apropiadamente a que  $|d_k| = |d_j|$  siempre existirá una contribución muy fuerte en el punto  $P$ , la cual desestabilizará los resultados numéricos. La transformación propuesta puede utilizarse también en estos casos ya que se trata de una integral en el sentido de VPC, extendida sobre un recinto constituido por dos elementos de contorno que concurren a un mismo punto de colocación. En estos casos, se debe aplicar la expresión apropiada (9) o (10) en función de la posición del punto singular  $\eta_s$ , es decir

$$\text{si } \eta_s = -1 \longrightarrow \text{use expresión (10)}$$

$$\text{si } \eta_s = 1 \longrightarrow \text{use expresión (9)}$$

Evidentemente, si se desea obtener resultados precisos, deberá obligarse a que las distancias de los puntos de integración vecinos al punto singular sean iguales, como ilustra la Figura 5b. A tal efecto, se sugiere el procedimiento siguiente:

1. Calcúlese una magnitud  $\epsilon_k$  asociada al elemento de menor tamaño (usualmente  $\epsilon_k \leftarrow L_k/1000$ ).
2. Calcúlese una magnitud  $\epsilon_j$  asociada al elemento de mayor tamaño, en función de

$\epsilon_k$ , para obligar a que  $|d_k| = |d_j|$  en el espacio real.

Estas operaciones son triviales en el computador y pueden ser rápidamente añadidas a cualquier código de elementos de contorno operativo. Igualmente, las expresiones (9) y (10) se incorporan con suma facilidad a rutinas de integración numérica existentes y el incremento de tiempo es insignificante al ser comparado con procedimientos tradicionales basados en cuadraturas standard de Gauss-Legendre.

Por otro lado, la transformación bi-cúbica puede ajustarse para ser utilizada en otros contextos diferentes al MEC, simplemente modificando el valor del parámetro  $\epsilon$  y/o usando órdenes apropiados de cuadraturas gaussianas.

### EJEMPLOS NUMERICOS

A continuación se incluyen algunos ejemplos numéricos de integrales con diferentes singularidades y de aplicación práctica en el MEC, que demuestran la precisión obtenida con la transformación bi-cúbica al ser comparada con otros procedimientos.

$$a) \quad I = \int_{-1}^1 \text{Log} |\eta - 0.8| d\eta \quad (25)$$

Se incluye este ejemplo para mostrar que la transformación propuesta es efectiva también en presencia de singularidades  $0(\text{Log } x)$ . La Tabla I recoge la evolución de los resultados obtenidos y los errores cometidos (en valor absoluto) con cuadraturas standard de Gauss-Legendre, el método de la referencia [27] y la transformación bi-cúbica aquí propuesta, en función del número de puntos de integración.

NPG	Gauss-Legendre	Gauss-Leg./Analítico	Ref.[27]	Ref.[27]/Analítico	Transf. Bicúbica	Bicúbica/Analítico
4	-1.2165E+00	+ .9625	-1.1428E+00	+ .9042	-1.4275E+00	+ 1.1295
6	-1.0802E+00	+ .8547	-1.2605E+00	+ .9973	-1.2757E+00	+ 1.0094
8	-1.7911E+00	+ 1.4171	-1.2762E+00	+ 1.0097	-1.2646E+00	+ 1.0006
10	-1.1442E+00	+ .9053	-1.2675E+00	+ 1.0028	-1.2637E+00	+ .9999
12	-1.2518E+00	+ .9904	-1.2599E+00	+ .9968	-1.2638E+00	+ .9999
14	-1.2283E+00	+ .9719	-1.2623E+00	+ .9988	-1.2638E+00	+ 1.0000
16	-1.1964E+00	+ .9466	-1.2652E+00	+ 1.0010	-1.2639E+00	+ 1.0000

Valor analítico = -1.2638715857E+00

TABLA I. Evaluación de integral con singularidad  $0(\log x)$ .

Como puede verse, los resultados son satisfactorios utilizando apenas 6 puntos de Gauss en la transformación bicúbica (3 en la parte anterior y 3 en la parte posterior a la singularidad).

$$b) \quad I = \int_{-1}^1 \frac{\text{SGN}(\eta - 0.3)}{|\eta - 0.3|} d\eta \quad (26)$$

donde SGN expresa "signo de". Análogamente al ejemplo anterior, la integral (26) fue evaluada con cuadraturas standard de Gauss-Legendre, el método de la referencia [27] y la transformación bi-cúbica. La Tabla II contiene los resultados y el error cometido (en valor absoluto) en función del orden de cuadratura gaussiana empleado.

NPG	Gauss-Legendre	Gauss-Leg./Analítico	Ref.[27]	Ref.[27]/Analítico	Transf. Bicúbica	Bicúbica/Analítico
4	+1.5613E+01	+ 25.221	+4.1241E+00	+ 6.662	-8.5274E+00	+ 13.775
6	-7.7365E+00	+ 12.498	+6.8693E+00	+ 11.097	-1.4164E+00	+ 2.288
8	-2.5327E+00	+ 4.091	+1.0711E+01	+ 17.302	-7.3959E-01	+ 1.195
10	-4.2589E-01	+ .688	+1.7129E+01	+ 27.670	-6.5170E-01	+ 1.053
12	+1.8709E+00	+ 3.022	+3.1865E+01	+ 51.475	-6.3081E-01	+ 1.019
14	+9.8459E+00	+ 15.905	+1.2227E+02	+ 197.509	-6.2402E-01	+ 1.008
16	-1.0182E+01	+ 16.448	-7.3087E+01	+ 118.065	-6.2138E-01	+ 1.004

Valor analítico = -6.1903920841E-01

TABLA II. Evaluación de integral con singularidad  $0(1/x)$ .

De nuevo aquí, se observa la estabilidad y precisión del método propuesto.

$$c) \quad I = \int_{-1}^1 \frac{\text{SGN}(\eta - 0.2)}{|\eta - 0.2|^{1.2}} \cdot \text{EXP}(\eta) d\eta \quad (27)$$

La integral (27) presenta una singularidad de orden  $r = 1.2$  en  $\eta = 0.2$  y se incluye aquí para mostrar que el procedimiento propuesto es también aplicable cuando  $r > 1$ . La Tabla III contiene los resultados y los errores (en valor absoluto) obtenidos con los tres métodos precitados.

Los resultados muestran la precisión de la transformación bi-cúbica aún en presencia de singularidades  $0(1/x^r)$  con  $r > 1$ , obteniéndose errores aproximados del 4% con sólo 8 puntos de integración en la cuadratura gaussiana.

NPG	Gauss-Legendre	Gauss-Leg./Analítico	Ref.[27]	Ref.[27]/Analítico	Transf. Bicúbica	Bicúbica/Analítico
2	+4.9770E+00	+ 2.034	+6.6120E+00	+ 2.703	-1.1447E+02	+ 46.792
4	+9.9416E+00	+ 4.064	+1.2518E+01	+ 5.117	-3.6379E+00	+ 1.487
6	+3.0617E+01	+ 12.515	+2.1524E+01	+ 8.798	+1.8527E+00	+ .757
8	-5.7760E+01	+ 23.610	+3.4409E+01	+ 14.064	+2.3440E+00	+ .954
10	-9.3262E+00	+ 3.812	+5.3121E+01	+ 21.714	+2.4161E+00	+ .988
12	-2.5264E+00	+ 1.033	+8.1585E+01	+ 33.349	+2.4381E+00	+ .997
14	+8.4627E-01	+ .346	+1.2830E+02	+ 52.444	+2.4463E+00	+ 1.000

Parte-finita, Kutt(1975) = +2.4464143506E+00

TABLA III. Evaluación de integral con singularidad  $0(1/x^{1.2})$ .

d) Cálculo de desplazamientos en placa cuadrada

La Figura 6 muestra una placa cuadrada sometida a tracciones parabólicas sobre su contorno. Este problema fue resuelto mediante la técnica p-adaptable del MEC<sup>6,7</sup>, donde se trata de evaluar los desplazamientos en puntos interiores a los macroelementos con la finalidad de obtener la función residuo.

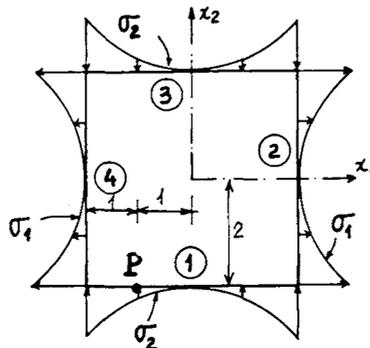


Figura 6. Placa cuadrada sometida a tracciones parabólicas.

La Tabla IV contiene los resultados normalizados respecto al valor teórico de las dos componentes del desplazamiento en el punto P del macroelemento 1, en función del número de puntos de Gauss utilizados, así como también, las proporciones de tiempo de computador entre los tres métodos empleados.

Los valores obtenidos con la transformación bi-cúbica, 8 puntos de Gauss en el elemento singular y 6 puntos en el resto de los elementos (26 puntos de integración para todo el problema) son suficientemente precisos para fines prácticos en el MEC p-adaptable. El tiempo de computador es algo menor con respecto a la cuadratura standard de Gauss-Legendre, ya que en ésta se deben separar los núcleos integrales dependiendo del tipo de singularidad ( $0(\text{Log}x)$ ,  $0(1/x)$ ), mientras que en la transformación bi-cúbica no es necesario tal paso.

NPG		Standard Gauss-Leg.	Método Ref.[27]	Transf. bicúbica	$T_1/T_3$	$T_2/T_3$
6	$\bar{u}$	1.0874	2.8576	0.9579	1.10	1.04
	$\bar{v}$	0.6503	6.4416	1.2923		
8	$\bar{u}$	1.0874	37.8201	0.9927	1.06	1.00
	$\bar{v}$	0.6503	146.2905	1.0315		
10	$\bar{u}$	1.0874	1.0982	0.9978	1.06	1.00
	$\bar{v}$	0.6503	9.3885	1.0106		
12	$\bar{u}$	1.0874	0.1223	0.9992	1.07	1.00
	$\bar{v}$	0.6503	4.5103	1.0051		
14	$\bar{u}$	1.0874	0.5905	0.9977	1.07	1.00
	$\bar{v}$	0.6503	2.6389	1.0031		
16	$\bar{u}$	1.0874	0.8975	1.0001	1.07	1.00
	$\bar{v}$	0.6503	1.4109	1.0019		

$$\bar{u} = u^{\text{comp.}}/u^{\text{exac.}}$$

$$\bar{v} = v^{\text{comp.}}/v^{\text{exac.}}$$

NPG = Número de puntos  
en elemento singular

$T_1$  = Tiempo de Gauss-Legendre

$T_2$  = Tiempo método ref. [27]

$T_3$  = Tiempo transformación bicúbica.

Tabla IV. Desplazamientos normalizados en punto  $P$ . Placa sometida a tracciones parabólicas.

## CONCLUSIONES

Se ha podido comprobar, a través de los ejemplos numéricos presentados, que el procedimiento numérico propuesto para la evaluación de integrales singulares en el sentido de VPC y aquellas que presentan otro tipo de singularidades es suficientemente preciso para las aplicaciones usuales del MEC.

Las fórmulas de integración son sencillas, utilizan reglas standard de Gauss-Legendre y son rápidamente incorporables en rutinas de integración de códigos existentes.

Por otro lado, no es necesario desdoblarse los núcleos integrales que presentan singularidades de órdenes diferentes, lo cual simplifica notablemente los procedimientos de integración numérica utilizados habitualmente en el MEC.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores desean expresar su agradecimiento al apoyo prestado por las siguientes instituciones: Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico (CDCH, Venezuela) e Instituto de Cooperación Iberoamericana (ICI, España).

## REFERENCIAS

1. E. Alarcón y A. Reverter, "p-adaptive Boundary Elements", *Int. J. Num. Met. Eng.*, Vol. **23**, pp. 801-829, (1984).
2. E. Alarcón, A. Reverter y J. Molina, "Hierarchical Boundary Elements", *Computers and Structures*, Vol. **20** (1-3), pp. 151-156, (1986).
3. H. Bertohld-Zaborousky, "Calcul dels intégrales de la forme  $\int_0^1 \text{Log}(x)f(x)$ ", *Techniques de Calcul Numerique*, H. Mineur, Dunod, Paris, (1966).
4. C.A. Brebbia, J.C. Telles y L.C. Wrobel, "Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Eng.", Springer-Verlag, Berlín, (1984).
5. M. Cerrolaza y E. Alarcón, "p-adaptive Boundary Elements for three dimensional potential problems", *Comm. Applied Num. met.*, Vol. **3**, pp. 335-345, (1987).
6. M. Cerrolaza, M.S. Gómez y E. Alarcón, "Elastostatics p-adaptive Boundary Elements for Micros", *Soft. for Eng. Workstations*, Vol. **4** (1), pp. 18-26, (1988).
7. M. Cerrolaza, "Elementos de Contorno p-adaptables: desarrollo y aplicaciones en teoría del Potencial y Elastostática", *Tesis Doctoral*, (1988).
8. M. Cerrolaza y E. Alarcón, "Further Applications of p-adaptive BEM", *Proc. X Int. Conf. on BEM*, (Brebbia et al. Eds.), Southampton, Springer-Verlag, Berlín, (1988).
9. T.A. Cruse, "Mathematical Foundations of the BIEM in Solid Mechanics", *Report AFOSR-TR-77-1002*, Pratt & Whitney Aircraft Group, USA, (1977).
10. D.J. Danson, "A boundary element formulation of problems in linear isotropic elasticity with body forces", *Boundary Element Methods*, (Brebbia eds.), pp. 105-122, Springer-Verlag, Berlín, (1981).
11. P.J. Davis y P. Rabinowitz, "Methods of numerical integration", Academic Press, New York, (1975).
12. M.S. Gómez, M. Cerrolaza y E. Alarcón, "Adaptive refinements in Boundary Element Methods", *Proc. IX Int. Conf. on BEM*, (Springer Eds.), Berlín, (1987).

13. M. Guiggiani y P. Casalini, "Direct Computation of Cauchy Principal Value Integrals in Advanced Boundary Elements", *Int. J. Num. Met. Eng.*, Vol. **24**, pp. 1711-1720, (1987).
14. F. Hartmann, "Computing the C-matrix in non-smooth boundary points", *New Developments in Boundary Element Methods*, (Brebbia Eds.), pp. 367-379, Butterworths, London, (1983).
15. L. Jun, G. Beer y J.L. Meek, "Efficient evaluation of integrals of order  $1/r$ ,  $1/r^2$ ,  $1/r^3$  using Gauss quadrature", *Engineering Analysis*, Vol. **2**, pp. 118-123, (1985).
16. L. Jun, G. Beer y J.L. Meek, "The application of double-exponential formulas in the Boundary Element Method", *Proc. VII Int. Conf. on BEM*, (Brebbia y Maier Eds.), Springer-Verlag, Berlín, (1985).
17. H.R. Kutt, "The Numerical evaluation of Principal Value integrals by finite-part integration", *Numerische Math.*, Vol. **24**, pp. 205-210, (1974).
18. H.R. Kutt, "Quadrature formulae for finite part integrals", *Report WISK 178*, The National Inst. for Math Sciences, Pretoria, (1795).
19. J. Lachat, "A further development of the BIEM for elastostatics", *Ph. D. Thesis*, Univ. of Southampton, UK, (1975).
20. D.F. Paget y D. Elliot, "An algorithm for the numerical evaluation of certain Cauchy Principal Value integrals", *Numer. Math.*, Vol. **19**, pp. 373-385, (1972).
21. P. Parreira, "Self-adaptive p-hierarchical boundary elem. in elastostatics", *Proc. IX Int. Conf. on BEM*, (Springer Eds.), Stuttgart, (1987).
22. P. Rabinowitz, "Some practical aspects in the numerical evaluation of Cauchy Principal Value integrals", *Seminar on Numerical Analysis*, (Michavila Ed.), ETSIM, Madrid, (1987).
23. E. Rank, "A posteriori fehlerabschätzungen und adaptative Netzverfeinerung für finite Element und Randintegralelement-Methoden", *Ph. D. Thesis*, Univ. of Munich, Munich, (1985).
24. E. Rank, "Adaptive boundary Element Methods", *Proc. IX Int. Conf. on BEM*, (Springer Eds.), Stuttgart, (1987).
25. J.J. Rencis y R.L. Mullen, "Solution of elasticity problems by a self-adaptive mesh refinement technique for boundary Element computation", *Int. J. Num. Eng.*, Vol. **23**, pp. 1509-1527, (1986).
26. A.H. Stroud y D. Secrest, "*Gaussian Cuadrature formulas*", Prentice-Hall, New York, (1966).
27. J.C. Telles, "A self adaptive coordinate transformation for the efficient evaluation general boundary element integrals", *Int. J. Num. Eng.*, Vol. **24**, pp. 937-959, (1987).