Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 7, 2, 217–225( 1991)

# PERTURBACIONES SINGULARES DE PROBLEMAS DE CONTORNO PARA SISTEMAS ACOPLADOS DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS DE SEGUNDO ORDEN

LUCAS JODAR
y
JOSE LUIS MORERA

*Dpto. de Matemática Aplicada,*
*Univ. Politécnica de Valencia,*
*Apartado 22012,*
*46080 Valencia.*

## RESUMEN

En este artículo presentamos un método de perturbaciones singulares para problemas de contorno relacionados con sistemas acoplados de ecuaciones en diferencias de segundo orden con coeficientes variables involucrando un parámetro pequeño $\varepsilon$. Estudiamos el comportamiento asintótico de la solución cuando $\varepsilon$ tiende a cero.

## SUMMARY

In this paper singular perturbations for coupled second order boundary value difference systems with a small parameter $\varepsilon$ are treated. The asymptotic behavior of the solution when $\varepsilon$ approaches zero is studied.

## INTRODUCCION

Tres tipos de problemas conducen de un modo natural al estudio de modelos discretos descritos por sistemas de ecuaciones en diferencias de segundo orden conteniendo parámetros pequeños. La primera fuente de esta clase de problemas es la simulación digital donde las ecuaciones diferenciales se aproximan por las correspondientes ecuaciones en diferencias[7]. También, el estudio de sistemas muestreados[9], o los sistemas controlados por ordenador[3,8] conducen de un modo natural a dichos modelos discretos. Finalmente, muchos sistemas biológicos, sociológicos y económicos son descritos mediante modelos discretos[1,2]. Además de estas situaciones donde la descripción del sistema físico viene dado en términos de sistemas acoplados de ecuaciones en diferencias, los analistas numéricos tratan con ellos al diseñar y analizar algoritmos para la resolución numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales o de otro tipo[5].

Recibido: Marzo 1990

 ISSN 0213–1315 

El método de las perturbaciones singulares para el estudio de problemas de contorno relacionados con ecuaciones en diferencias escalares de segundo orden ha sido desarrollado en[4,10]. Recientemente dicho método ha sido aplicado satisfactoriamente en[6] para estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones de problemas de contorno para sistemas acoplados de ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes. En este artículo, extendemos los resultados de[4] y [6] tratando sistemas acoplados de ecuaciones en diferencias con coeficientes variables. Consideremos el problema de contorno $(P_\varepsilon)$ definido por

$$\varepsilon Y(k+2) + A(k)Y(k+1) + B(k)Y(k) = F(k);\ 0 \leq k \leq N-2 \tag{1}$$

$$Y(0) = \alpha;\ Y(N) = \beta \tag{2}$$

donde $A(k)$, $B(k)$ son matrices en $\mathbb{R}_{m\times m}$ con $A(k)$ invertible, $\alpha, \beta$ son vectores en $\mathbb{R}_{m\times 1}$ y donde el problema reducido $(P_o)$,

$$A(k)Y(k+1) + B(k)Y(k) = F(k);\ 0 \leq k \leq N-2 \tag{3}$$

$$Y(0) = \alpha\ ;\ Y(N) = \beta$$

no admite solución. El objetivo de este artículo es estudiar el comportamiento asintótico de la solución $Y_\varepsilon$ del problema $(P_\varepsilon)$ cuando $\varepsilon$ tiende a cero. Para ello, obtendremos la solución explícita $Y_\varepsilon$ del problema $(P_\varepsilon)$. Posteriormente, aplicaremos el método del desarrollo interior y exterior, mostrando que la capa límite de (1) está siempre en el punto final $k = N$.

Si $C$ es una matriz en $\mathbb{R}_{m\times m}$ y $C^T$ es la matriz traspuesta de $C$, entonces denotaremos por $\|C\|$ la raiz cuadrada del máximo valor propio de $C^TC$,[11,p.41]. Si $C$ es una matriz en $\mathbb{R}_{m\times m}$ con $\|C\| < 1$ y si $I$ denota la matriz identidad en $\mathbb{R}_{m\times m}$, entonces de[11,p.45], la matriz $I - C$ es invertible $\|(I-C)^{-1}\| \leq (1 - \|C\|)^{-1}$ y

$$(I-C)^{-1} = I + \sum_{n\geq 1} C^n \tag{4}$$

## PERTURBACIONES SINGULARES

Empezaremos esta sección mostrando que el problema de contorno perturbado $(P_\varepsilon)$ admite una solución única $\{Y_\varepsilon(k)\}$ para valores suficientemente pequeños del parámetro $\varepsilon$. Consideremos el problema de valores iniciales

$$\varepsilon Y(k+2)A(k)Y(k+1) + B(k)Y(k) = F(k);\ 0 \leq k \leq N-2$$

$$Y(0) = \alpha\ ;\ Y(1) = \gamma$$

donde $\gamma$ es un vector en $\mathbb{R}_{m\times 1}$, a determinar, de modo que la solución del problema (5) satisfaga $Y(N) = \beta$.

En primer lugar, demostraremos por inducción, que para $h = 2, 3, \cdots, N-2$, existen matrices $C(h)$ en $\mathbb{R}_{m\times m}$ y vectores $D(h)$ en $\mathbb{R}_{m\times 1}$, tales que

$$Y(h) = (-1/\varepsilon)^{h-1}[A(h-2)\cdots A(0) + \varepsilon C(h)]\gamma + D(h) \tag{6}$$

Para $h = 2$ la ecuación (6) se verifica tomando $C(2) = 0,\ D(2) = (F(0) - B(0)\alpha)/\varepsilon$. Supongamos que se verifica (6) para $2 \leq h \leq j$ y veremos que se verifica (6) para $j+1$. En efecto, de (1) y (6) se sigue que

$$\begin{aligned} Y(j+1) &= (-1/\varepsilon)[A(j-1)Y(j) + B(j-1)] + (1/\varepsilon)F(j-1) \\ &= (-1/\varepsilon)A(j-1)\{(-1/\varepsilon)^{j-1}[A(j-2)A(j-3)\cdots A(0)\ + + \varepsilon C(j)]\gamma + \\ &+ D(j)\} + (-1/\varepsilon)B(j-1)\{(-1/\varepsilon)^{j-2}[A(j-3)A(j-4)\cdots A(0) + \\ &+ \varepsilon C(j-1)]\gamma + D(j-1)\} + (1/\varepsilon)F(j-1) \\ &= (-1/\varepsilon)^{j}[A(j-1)A(j-2)\cdots A(0) + \varepsilon C(j+1)]\gamma + D(j+1) \end{aligned}$$

donde

$$C(j+1) = A(j-1)C(j) - B(j-1)A(j-3)A(j-4)\cdots A(0) - \varepsilon B(j-1)C(j-1)$$

$$D(j+1) = (F(j-1) - A(j-1)D(j) - B(j-1)D(j-1))/\varepsilon$$

De aquí, para $h = N$ se verifica

$$Y(N) = (-1/\varepsilon)^{N-1}[A(N-2)A(N-3)\cdots A(0) + \varepsilon C(N)]\gamma + D(N) \tag{7}$$

Nótese que de la invertibilidad de $A(j)$ y de (4), se sigue que para valores pequeños de $\varepsilon$, el coeficiente de $\gamma$ en (7) es una matriz invertible y por tanto, imponiendo la condición $Y(N) = \beta$, podemos afirmar que existe un único vector $\gamma$ determinado por la ecuación

$$\gamma = [A(N-2)A(N-3)\cdots A(0) + \varepsilon C(N)]^{-1}(\beta - D(N))(-\varepsilon)^{N-1}$$

De este modo el siguiente resultado ha sido demostrado:

LEMA 1. Si $A(k)$ es invertible para $0 \leq k \leq N-2$, el problema de contorno perturbado $(P_\varepsilon)$ admite una solución única $Y_\varepsilon$ para valores suficientemente pequeños del parámetro $\varepsilon$.

A continuación estudiaremos el comportamiento asintótico de $Y_\varepsilon$. Consideremos el problema de valores iniciales

$$A(k)Z(k+1) + B(k)Z(k) = F(k), \quad Z(0) = \alpha, \quad 0 \leq k \leq N-1 \tag{8}$$

De la invertibilidad de $A(k)$, es claro que la única solución de (8) viene dada por

$$Z(k) \ = \ \{-[A(k-1)]^{-1}B(k-1)\}\{-[A(k-2)]^{-1}B(k-2)\}\cdots\{[A(0)]^{-1}B(0)\}\alpha +$$

$$+ [A(k-1)]^{-1}F(k-1) + \{-[A(k-1)]^{-1}B(k-1)\}[A(k-2)]^{-1}F(k-2) +$$
$$+ \{-[A(k-1)]^{-1}B(k-1)\}\{-[A(k-2)]^{-1}B(K-2)\}\{[A(k-3)]^{-1}F(k-3)\} +$$
$$+ \cdots \{-[A(k-1)]^{-1}B(k-1)\}\{-[A(k-2)]^{-1}B(k-2)\}\cdots$$
$$\cdots\{-[A(1)]^{-1}B(1)\}[A(0)]^{-1}F(0) \quad k \geq 1 \tag{9}$$

Por otra parte consideremos el problema

$$W(k+2)+A(k)W(k+1) = F(k) \; ; \; W(N) = \beta - Z(N) \; ; \quad k = N-2, N-3, \cdots, 0 \tag{10}$$

donde $Z(N)$ viene dado por (9) para $k = N$.

De (10) se sigue que $W(2) = -A(0)W(1) + F(0)$, $W(3) = -A(1)W(2) + F(1), \cdots, W(k) = -A(k-2)W(k-1) + F(k-2)$, de modo que podemos escribir

$$W(k) = (-A(k-2))(-A(k-3))\cdots(-A(0))W(1) + F(k-2)+$$
$$+(-A(k-2))F(k-3) + (-A(k-2))(-A(k-3))F(k-4)+$$
$$+\cdots + (-A(k-2))(-A(k-3))\cdots(-A(1))F(0) \tag{11}$$

En particular, para $k = N$ obtenemos

$$\begin{aligned} W(N) = {} & (-A(N-2))(-A(N-1))\cdots(-A(0))W(1) + F(N-2)+ \\ & + \ (-A(N-2))F(N-3) + (-A(N-2))(-A(N-3))F(N-4) + \cdots \\ & + \ (-A(N-2))(-A(N-3))\cdots(-A(1))F(0) \end{aligned} \tag{12}$$

De la invertivilidad de las matrices $A(j)$ y de (11) se sigue que

$$\begin{aligned} W(1) = {} & [(-A(N-2))(-A(N-3))\cdots(-A(0))]^{-1}+ \\ & + \ \{\beta - Z(N) - F(N-2) - (-A(N-2))F(N-3) - \\ & - (-A(N-2))(-A(N-3))F(N-4) - \cdots - \\ & - (-A(N-2))(-A(N-3))\cdots(-A(1))F(0)\} \end{aligned}$$

y sustituyendo en (11) se sigue que

$$\begin{aligned} W(k) = {} & (-A(k-1))^{-1}(-A(k))^{-1}\cdots \\ & \cdots(-A(N-2))^{-1}\{\beta - Z(N) - F(N-2) - (-A(N-2))F(N-3) - \\ & - (-A(N-2))(-A(N-3))F(N-4) - \cdots - (-A(N-2))(-A(N-3))\cdots \\ & \cdots(-A(1))F(0)\} \ + \ F(k-2) + (-A(k-2))F(k-3) + \cdots + \\ & + \ (-A(k-2))(-A(k-3))\cdots(-A(1))F(0) \quad k \geq 1 \end{aligned} \tag{13}$$

Estamos interesados en aproximar uniformemente en $o \leq k \leq N$, la solución $Y_\varepsilon$ del problema $(P_\varepsilon)$, en términos de las soluciones $Z$ y $W$ de los problemas (8) y (10) respectivamente.

Consideremos la sucesión

$$R(k) = Y_\varepsilon(k) - (Z(k) + \varepsilon^{N-k}W(k)); \quad 0 \leq k \leq N-2 \tag{14}$$

entonces se verifica

$$\begin{gathered} \varepsilon R(k+2) + A(k)R(k+1) + B(k)R(k) = \\ = \varepsilon(Y_\varepsilon(k+2) - Z(k+2) - \varepsilon^{N-k-2}W(k+2)) + A(k)(Y_\varepsilon(k+1) - Z(k+1) - \varepsilon^{N-k-1}W(k+1)) + \\ + B(k)(Y_\varepsilon(k) - Z(k) - \varepsilon^{N-k}W(k)) + \varepsilon(Y_\varepsilon(k+2) + A(k)Y_\varepsilon(k+1) + B(k)Y_\varepsilon(k)) = \\ = F(k) - (A(k)Z(k+1) + B(k)Z(k) - \varepsilon^{N-k-1}(W(k+2) + A(k)W(k+1)) - \\ -\varepsilon Z(k+2) - \varepsilon^{N-k}B(k)W(k) = \\ = -\varepsilon Z(k+2) - \varepsilon^{N-k-1}F(k) - \varepsilon^{N-k}B(k)W(k) \\ R(0) = \alpha - \alpha - \varepsilon^N W(0); \quad R(N) = \beta - Z(N) - W(N) \end{gathered}$$

En consecuencia $R(k)$ definida por (14) satisface el problema de contorno

$$\varepsilon R(k+2) + A(k)R(k+1) + B(k)R(k) = -\varepsilon Z(k+2) - \varepsilon^{N-k-1}F(k) - \varepsilon^{N-k}B(k)W(k) \tag{15}$$

$$R(0) = -\varepsilon^N W(0); \quad R(N) = 0$$

Nótese que de (14) se deduce que la sucesión $Z(k) + \varepsilon^{N-k}W(k)$, converge uniformemente a la solución $Y_\varepsilon(k)$ del problema $(P_\varepsilon)$ cuando $\varepsilon \to 0$, para $0 \leq k \leq N$, si demostramos que la solución $R(k)$ de (15) satisface la propiedad

$$R(k) = 0(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0, \text{ uniformemente para } 0 \leq k \leq N$$

El siguiente resultado que es una generalización del principio del máximo obtenido en[12] para el caso escalar, nos permitirá demostrar que $R(k) = 0(\varepsilon)$, cuando $\varepsilon \to 0$, uniformemente para $0 \leq k \leq N$.

LEMA 2. Sea $U(k)$ la solución del problema de contorno

$$\varepsilon U(k+2) + A(k)U(k+1) + B(k)U(k) = G(k); \quad 0 \leq k \leq N-2 \tag{16}$$

$$U(0), \quad U(N) \text{ fijados}$$

donde $A(k)$, $B(k)$ son matrices en $\mathbb{R}_{m\times m}$ con $A(k)$ invertible, $G(k)$, $U(k)$ son vectores en $\mathbb{R}_{m\times 1}$ con $G(k) = -\varepsilon Z(k+2) - \varepsilon^{N-k}F(k) - \varepsilon^{N-k}B(k)W(k)$, y donde $Z(k)$ es la solución del problema (8). Entonces para $\varepsilon$ suficientemente pequeño, existe una constante $\rho > 0$ tal que

$$\max_{0\leq j\leq N}\{\|U(j)\|\} \leq \rho[\varepsilon\|U(N)\| + \|U(0)\| + \max_{0\leq k\leq N-2}\{\|G(k)\|\} \tag{17}$$

Demostración. Consideremos la sucesión de matrices $\{C(k)\}$ definida por $C(0) = A(0)$ y $C(j) = A(j) - \varepsilon B(j)[C(j-1)]^{-1}$. Nótese que estas matrices están bien definidas si es suficientemente pequeño porque $A(j)$ es invertible. De (4) y supuesta la invertibilidad de $C(j)$, de la expresión de $C(j+1)$ se concluye su invertibilidad para valores pequeños de $\varepsilon$ puesto que $C(j+1) = A(j+1)\{I - \varepsilon[A(j+1)]^{-1}B(j+1)[C(j)]^{-1}\}$. La solución de la ecuación en diferencias que aparece en (16) puede escribirse como la solución del sistema

$$\begin{aligned} H\mathrm{col}(U(N-1), U(N-2), \cdots, U(1)) = \mathrm{col}(G(0) - B(0), G(1), \cdots \\ \cdots, G(N-3), G(N-2) - \varepsilon U(N)) \end{aligned}$$

donde

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \varepsilon I & A(0) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \varepsilon I & A(1) & B(1) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \varepsilon I & A(2) & B(2) & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ \varepsilon I & A(N-3) & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A(N-2) & B(N-2) & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Consideremos la sucesión $D(j)$ definida por

$$D(0) = G(0) - B(0)U(0),\ D(N-2) = G(N-2) - \varepsilon U(N) - B(N-2)[C(N-3)]^{-1}D(N-3)$$

$$D(j) = G(j) - B(j)[C(j-1)]^{-1}D(j-1), \quad j = 1, 2, \cdots, N-3 \tag{19}$$

Eliminando $B(1),\ B(2), \cdots, B(N-2)$ en el sistema

$$H\mathrm{col}(U(N-1), \cdots, U(1)) = \mathrm{col}(G(0) - B(0), G(1), \cdots, G(N-3), G(N-2) - \varepsilon U(N))$$

obtenemos el sistema equivalente

$$K\mathrm{col}(U((N-1), \cdots, U(1)) = (D(0), D(1), \cdots D(N-2)) \tag{20}$$

donde $D(j)$ está definido por (19) y

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \varepsilon I & C(0) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \varepsilon I & C(1) & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \varepsilon I & C(2) & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ \varepsilon I & C(N-3) & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C(N-2) & B(N-2) & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

De (19)-(21) se sigue que

$$\begin{aligned}
U(N-1) &= [C(N-2)]^{-1}D(N-2) = [C(N-2)]^{-1}\{G(N-2) - \\
&- \varepsilon U(N) - B(N-2)[C(N-3)]^{-1}D(N-3)\} = \\
&= [C(N-2)]^{-1}\{G(N-2) - \varepsilon U(N)\} - \\
&- [C(N-2)]^{-1}B(N-2)[C(N-3)]^{-1}G(N-3)+ \\
&+ [C(N-2)]^{-1}B(N-2)[C(N-3)]^{-1}B(N-3)[C(N-4)]^{-1}G(N-4) + \\
&+ \cdots + (-1)^{j-1}[C(N-2)]^{-1}B(N-2)[C(N-3)]^{-1}B(N-3)\cdots \\
&\cdots[C(N-j)]^{-1}B(N-j)[C(N-j-1)]^{-1}G(N-j-1) + \cdots + \\
&+ (-1)^{N-2}[C(N-2)]^{-1}B(N-2)[C(N-3)]^{-1}B(N-3)\cdots \\
&\cdots[C(1)]^{-1}B(1)[C(0)]^{-1}G(0) - \\
&- (-1)^{N-2}[C(N-2)]^{-1}B(N-2)[C(N-3)]^{-1}B(N-3)\cdots \\
&[C(1)]^{-1}B(1)[C(0)]^{-1}B(0)U(0)
\end{aligned}$$

Llamando $T(j) = [C(j)]^{-1}B(j)$, podemos escribir

$$\begin{aligned}
U(N-1) &= [C(N-2)]^{-1}\{G(N-2) - \varepsilon U(N)\} - \\
&- T(N-2)[C(N-3)]^{-1}G(N-3) + \\
&+ T(N-2)T(N-3)[C(N-4)]^{-1}G(N-4) + \cdots + \\
&+ (-1)^{j-1}T(N-2)T(N-3)\cdots \\
&\cdots T(N-j)[C(N-j-1)]^{-1}G(N-j-1) + \cdots + \\
&+ (-1)^{N-2}T(N-2)\cdots T(1)[C(0)]^{-1}G(0) - (-1)^{N-2}T(N-2)\cdots \\
&\cdots T(1)T(0)U(0)
\end{aligned} \tag{22}$$

Tomando normas en (22) se sigue que

$$\|U(N-1)\| \leq \ \rho_{N-1}\ \{\varepsilon\|U(N)\| + \|U(0)\| + \max_{0\leq k\leq N-2}\|G(k)\}$$

donde

$$\begin{aligned}
\rho_{N-1} = \|\ [C(N-2)]^{-1}\|\ \max\{1, 1 + \|C(N-2)\|\ \|T(N-2)\|\ \|\ [C(N-3)]^{-1}\| + \\
+\|C(N-2)\|\ \|T(N-2)\|\ \|T(N-3)\|\ \|\ [C(N-4)]^{-1}\| + \cdots + \\
+\|C(N-2)\|\ \|T(N-2)\|\ \|T(N-3)\|\ \cdots \\
\cdots\|T(1)\|\ \|\ [C(0)]^{-1}\|
\end{aligned}$$

$$T(N-2)\| \cdots \|T(1)\| \, \|T(0)\|\}$$

Ahora, utilizando el método de inducción supongamos que para cualquier $k < N-1$ existe una constante positiva $\rho_k$ tal que

$$\|U(k)\| \leq \rho_k\{\varepsilon\|U(N)\| + \|U(0)\| + \max_{0\leq k\leq N-2} \|G(k)\|\} \tag{23}$$

De (20) y (21) se sigue que

$$U(k-1) = [C(k-2)]^{-1}\{D(k-2) - \varepsilon U(k)\}$$

y de la hipótesis de inducción y de (19) se sigue que

$$\|U(k-1)\| \leq \rho_{k-1}\{\varepsilon^2\|U(N)\| + \|U(0)\| + \max_{0\leq k\leq N-2} \|G(k)\|\}$$

donde

$$\rho_{k-1} = \| [C(k-2)]^{-1}\| \max\{\rho_k, \varepsilon\rho_k + \|B(k-2)\| \, \| [C(k-3)]^{-1}\| \, \|B(k-3)\| \, \| [C(k-4)]^{-1}\|$$
$$\cdots \| [C(0)]^{-1}\| \, \|B(0)\| \, , \, \varepsilon(1+\rho_k) + 1 + \|B(k-2)\| \, [C(k-3)]^{-1} + \cdots$$
$$+ \|B(k-2)\| \, \| [C(k-3)]^{-1}\| \, \|B(k-3)\| \, \| [C(k-4)]^{-1}\| \cdots \| [C(0)]^{-1}\|\}$$

Puesto que para valores pequeños de $\varepsilon$, se verifica que $\varepsilon^2 < \varepsilon$, tomando

$$\rho = \max\{1, \rho_1, \rho_2, \cdots \rho_{N-1}\}$$

se verifica (17) para valores pequeños de $\varepsilon$. Teniendo en cuenta que $G(k) = -\varepsilon Z(k+2) - \varepsilon^{N-k-1}F(k) - \varepsilon^{N-k}B(k)W(k)$, y las condiciones de contorno satisfechas por $R(k)$ en (15), se sigue que $R(k)$ definida por (14) satisface

$$R(k) = 0(\varepsilon), \text{cuando} \quad \varepsilon \to 0, \quad \text{uniformemente para} \;\; 0 \leq k \leq N$$

con lo que queda demostrado el siguiente resultado:

TEOREMA 1. Consideremos el problema $(P_\varepsilon)$ donde $A(k)$ es invertible en $\mathbb{R}_{m\times m}$ y sean $Z(k)$, $W(k)$, las soluciones de los problemas (8) y (10) respectivamente. Si $Y_\varepsilon(k)$ es la solución del problema $(P_\varepsilon)$ entonces se verifica

$$Y_\varepsilon(k) = Z(k) + \varepsilon^{N-k}W(k) + 0(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0, \;\; \text{uniformemente para } 0 \leq k \leq N$$

NOTA. Obsérvese que el teorema 1 nos permite obtener aproximaciones explícitas fácilmente calculables de la solución exacta $Y_\varepsilon$ del problema $(P_\varepsilon)$, definidas por $Z(k) + \varepsilon^{N-k}W(k)$, donde $Z(k)$ está definida por (9) y $W(k)$ por (13), siendo esta aproximación uniformemente convergente en $0 \leq k \leq N$, cuando $\varepsilon \to 0$. Este resultado generaliza los obtenidos en[4] para el caso escalar, y en[6] para el caso de sistemas con coeficientes constantes.

## AGRADECIMIENTOS

Este artículo ha sido realizado con la ayuda de la D.G.I.C.Y.T. proyecto PS87-0064.

## REFERENCIAS

1. A.B. Bishop, "*Introduction to Discrete Linear Controls: Theory and Applications*", Academic Press, (1975).
2. J.A. Cadzow, "*Discrete-Time Systems: An Introduction to Interdisciplinary*", Englewood Cliffs, Prentice Hall, (1975).
3. J.A. Cadzow y H.R. Martens, "*Discrete-Time and Computer Control Systems*", Englewood Cliffs, Prentice Hall, (1970).
4. C. Comstock y G.C. Hsiao, "Singular Perturbations for Difference Equations", *Rocky Mountain J. Maths.*, Vol. **6**, No. 4, pp. 561-567, (1976).
5. P. Henrici, "*Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*", John Wiley, New York, (1962).
6. L. Jodar y J.L. Morera, "Singular perturbations for Systems of Difference Equations", *Applied Maths. Letters*, Vol. **3**, No. 2, pp. 51-54, (1990).
7. F.B. Hildebrand, "*Finite Difference Equations and Simulations*", Englewood Cliffs, Prentice Hall, (1968).
8. B.C. Kuo, "*Digital Control Systems*", Champaign; SRL Publg. Co., (1977).
9. J.R. Ragazzini y G. Franklin, "*Sampled-Data Control Systems*", McGraw-Hill, New York, (1958).
10. H.J. Reinhardt, "*Stability of Singularly Perturbed Linear Difference Equations in Numerical Analysis of Singular Perturbations Problems*", P.W. Hemker and J.J. Miller, Eds., Academic Press, pp. 485-492, (1979).
11. J.M. Ortega y W.C. Rheinboldt, "*Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*", Academic Press, (1979).
12. F.W. Dorr, "The Numerical Solution of Singular Perturbations of Boundary Value Problems", *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. **7**, pp. 281-313, (1970).