

CALCULO DE FRECUENCIAS PROPIAS MEDIANTE SINTESIS MODAL CON SUBESTRUCTURAS MULTINIVEL

M.M. SEGURA
y
J.T. CELIGÜETA

*Departamento de Mecánica Aplicada, CEIT,
B² Ibaeta s/n,
20009 San Sebastián.*

RESUMEN

En este trabajo se desarrollan de manera general y siguiendo una formulación unificada diversos métodos de síntesis modal de subestructuras, aplicándose al caso de varios niveles de subestructuras.

Concretamente se estudian los métodos de síntesis con fronteras libres y con fronteras fijas. Seguidamente se trata el método de condensación con fronteras elásticas o híbridas, introduciendo considerables mejoras respecto a referencias anteriores.

Finalmente se incluyen detalles de implementación y la aplicación práctica en un ejemplo real.

SUMMARY

Different methods for substructural dynamic analysis are developed in a general way and following an unified formulation, with particular application to multilevel substructuring.

Fixed and free boundary synthesis methods are studied. Then the synthesis method with elastic boundaries is developed and some improvements are introduced.

Finally, implementation details are included and a real example shows the practical application.

INTRODUCCION

El análisis de estructuras sometidas a fuerzas exteriores variables en el tiempo es un problema de gran importancia dentro del campo de la ingeniería mecánica. Su solución se basa en el conocimiento de las frecuencias y modos normales de vibración del sistema libre, es decir, las soluciones del problema de autovalores:

$$\mathbf{Kx} - w^2\mathbf{Mx} = 0 \quad (1)$$

Recibido: Octubre 1989

Aparecen en la práctica sistemas del tipo (1) con un número muy elevado (hasta varios miles) de ecuaciones, por lo que es necesario disponer de métodos de resolución que minimicen el esfuerzo de cálculo requerido.

A lo largo de este trabajo se exponen las distintas técnicas que, mediante la división en subestructuras y empleando síntesis modal, resuelven el problema de una manera rápida y económica.

Un primer paso, por tanto, del análisis es la división del sistema estructural en partes más sencillas y con un número menor de nudos y elementos, denominadas subestructuras básicas o de nivel 0.

Estas subestructuras básicas se definen en función de sus nudos y elementos y para cada una de ellas se define cuales van a ser sus nudos de conexión con el resto (nudos de frontera). La unión de los nudos frontera de varias subestructuras definen una subestructura de nivel 1 la cual a su vez puede unirse con otras, formándose subestructuras de nivel superior, hasta llegar a la estructura global, de nivel máximo. Asimismo pueden definirse unas subestructuras en función de otras mediante relaciones geométricas del tipo giro, traslación o simetría.

Para las subestructuras de nivel 0 se calculan sus matrices de masa y rigidez mediante el método de los elementos finitos. Dichas matrices se someten a un proceso de condensación, de modo que se reduzca su orden de manera considerable sin perder la información sobre el comportamiento dinámico de la subestructura.

Para ello se sustituye el vector \mathbf{x} de coordenadas totales de la subestructura por un número más pequeño de coordenadas reducidas \mathbf{y} , en función de una serie de vectores básicos \mathbf{a}_i . Esta relación se expresa como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad (2)$$

siendo \mathbf{A} una matriz que tiene como columnas a los vectores \mathbf{a}_i e \mathbf{y} el vector de coeficientes asociados a dichos vectores. Resulta aconsejable incluir entre estas coordenadas \mathbf{y} los grados de libertad (g.d.l) de las fronteras de la subestructura, con el fin de que las coordenadas reducidas de las diversas subestructuras sean compatibles unas con otras. Según la naturaleza de los vectores básicos \mathbf{a}_i se obtienen distintos métodos de condensación denominados con fronteras fijas (FF), con fronteras libres (FL) o con fronteras elásticas (FE), conceptos que se desarrollan a lo largo de los siguientes apartados.

Para las estructuras definidas como copias de otras se obtienen sus matrices reducidas a partir de las matrices reducidas de su original. Las cuales se transforman convenientemente según la relación de giro o simetría.

Para una subestructura de nivel mayor que 0 no se emplea la idea convencional de nudos y elementos; sus nudos se generan como unión de los nudos frontera de las subestructuras que la componen. Dichas subestructuras serán sus "elementos" (de ahí que habitualmente se les dé el nombre de "superelementos"). Las matrices características, por tanto, se forman a partir de las matrices reducidas de los superelementos.

A modo de ejemplo, en las Figuras 1 y 2 se muestra cómo se realiza la división en subestructuras de un caso típico, correspondiente a una caja de grasa de ferrocarril.

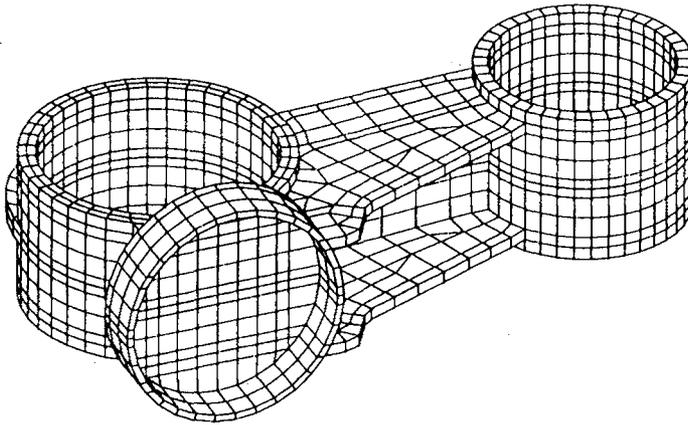


Figura 1. Caja de grasa de ferrocarril.

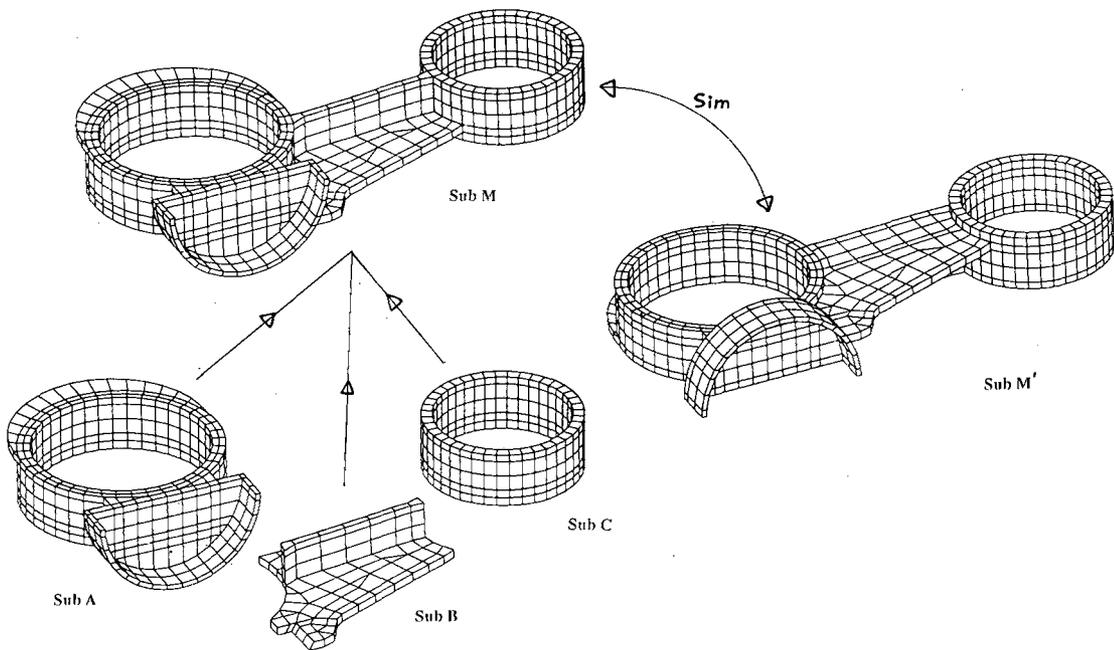


Figura 2. División en subestructuras de la caja de grasa.

Al ser una estructura simétrica se realiza una primera división de ella en dos partes M y M', realizando la partición a lo largo del plano de simetría $z = 0$, encontrándose los nudos frontera en dicho plano. A continuación se realiza una segunda división, descomponiendo M en tres subestructuras A, B y C, unidas entre sí, por un número pequeño de nudos frontera. Estas subestructuras serán de nivel 0 y será necesario definir las en función de las coordenadas de sus nudos y de sus elementos. Al descomponer M se define también de manera implícita la división de M' en tres subestructuras A', B' y C', simétricas de A, B y C. Queda definido de esta manera el árbol de subestructuras mostrado en la Figura 3.

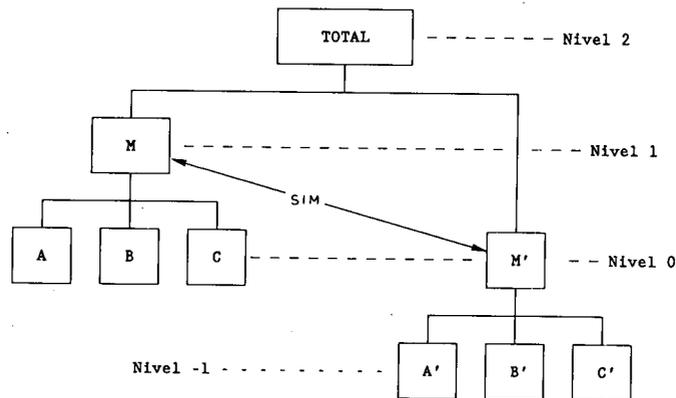


Figura 3. Arbol de subestructuras de la caja de grasa.

CONDENSACION CON FRONTERAS FIJAS Y LIBRES

Condensación con Fronteras Fijas

El método de condensación dinámica con fronteras fijas (Hurty¹, Craig y Bampton²) es uno de los más empleados por su sencillez y generalidad. Se caracteriza porque los vectores que se eligen para aproximar el espacio de soluciones son:

- Tantos modos de deformación estática como g.d.l. haya en las fronteras de la subestructura (n_f). Estos se definen como la deformación que se produce en el interior de la subestructura al imponer un desplazamiento unidad en uno cualquiera de los g.d.l. frontera y nulo en el resto.
- Una serie de modos normales de vibración calculados con las fronteras totalmente fijas, es decir, las soluciones del problema de valores y vectores propios (1) bajo las restricciones de que las deformaciones en los nudos frontera estén impedidas.

Los n_m modos de frecuencia más baja se agrupan con los modos de deformación estática formando la matriz de cambio de coordenadas A , cambio que aplicado a (1) conduce al sistema reducido:

$$\bar{K}y - w^2\bar{M}y = 0 \quad (3)$$

cuyas matrices características tienen la expresión:

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} K^* & 0 \\ 0 & \Omega^2 \end{bmatrix} \quad \bar{M} = \begin{bmatrix} \bar{M}_{ff} & \bar{M}_{fn} \\ \bar{M}_{fn}^T & I \end{bmatrix} \quad (4)$$

Condensación con Fronteras Libres

En esta técnica se emplean como formas de vibración para caracterizar a la subestructura una serie de modos de vibración, A^L , obtenidos dejando moverse libremente a todas las fronteras. Las primeras formulaciones de este método (Hou³, Kuhar y Sthale⁴) presentaban como principal problema la gran cantidad de modos

requeridos para obtener una precisión aceptable, y la dificultad de imponer la compatibilidad geométrica en las fronteras.

Para paliar estos problemas Rubin⁵ introdujo en la formulación un término corrector, que tiene en cuenta la respuesta debida a aquellos modos que no están explícitamente considerados entre los vectores básicos de la síntesis. Un desarrollo diferente es el de Bucher⁴ o el de Rozenblum⁷.

Este nuevo término corresponde a la flexibilidad residual \mathbf{Z} que aportan los modos superiores del sistema (en número n_z), que no están incluidos entre los modos \mathbf{A}^L . Para estos modos superiores se considera un comportamiento estático, realizando en las ecuaciones del movimiento el cambio de coordenadas:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^L \mathbf{y}^L + \mathbf{Z} \mathbf{f} \quad (5)$$

con lo que se llega al sistema reducido:

$$\begin{bmatrix} Y_f & -Y_f \mathbf{A}_f^L \\ \text{sim.} & \bar{K} + \mathbf{A}_f^{L^t} Y_f \mathbf{A}_f^L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_f \\ y^L \end{Bmatrix} - w^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_f \\ y^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

siendo y^L las coordenadas modales correspondientes a los modos \mathbf{A}^L , $\mathbf{Y}_f = \mathbf{Z}_f^{-1}$ y f_f las fuerzas de conexión entre la subestructura y sus vecinas.

Las ecuaciones obtenidas representan el movimiento de una subestructura en sus coordenadas reducidas, y resuelven uno de los problemas iniciales del método, ya que incluyen los g.d.l. de las fronteras x_f , permitiendo un fácil ensamblaje de todos los componentes del sistema.

La matriz de flexibilidad residual \mathbf{Z} se calcula en general como:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{K}^{-1} - \mathbf{A}^L [\Omega_z^2]^{-1} \mathbf{A}^{L^t} \quad (7)$$

salvo en el caso de que existan modos de sólido rígido, en el que no existe \mathbf{K}^{-1} y se ha de recurrir a métodos más sofisticados (Celigüeta⁸, Ookuma y Nagamatsu⁹).

La Inercia Residual

La aproximación hecha con fronteras libres y flexibilidad residual se puede mejorar añadiendo un término de segundo orden, que presupone un comportamiento dinámico para los modos \mathbf{A}^z no incluidos en el modelo, cuyas frecuencias modales forman la matriz diagonal Ω_z^2 .

Las n_z ecuaciones diferenciales del movimiento relativas a dichos modos son:

$$\{\ddot{\mathbf{y}}^z\} + \Omega_z^2 \{\mathbf{y}^z\} = \mathbf{A}^z \mathbf{f} \quad (8)$$

Integrándolas, desarrollando en serie alrededor de $\mathbf{A} = 0$, agrupándolas en forma matricial y sustituyendo en la expresión para \mathbf{x}^z se obtiene una aproximación de segundo orden de la respuesta dinámica debida a estos modos desconocidos:

$$\mathbf{x}^z = \mathbf{Z} \mathbf{f} + w^2 \mathbf{H} \mathbf{f} \quad (9)$$

siendo $\mathbf{H} = \mathbf{Z}\mathbf{M}\mathbf{Z}$.

Particularizando la ecuación anterior a las fronteras (subíndice f), sustituyendo en las ecuaciones del movimiento y agrupando en forma matricial, se llega a las ecuaciones finales del movimiento de la subestructura:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_f & -\mathbf{Y}_f\mathbf{A}_f \\ \text{sim} & \bar{\mathbf{K}} + \mathbf{A}_f^T\mathbf{Y}_f\mathbf{A}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_f \\ \mathbf{y}^L \end{Bmatrix} + \quad (10)$$

$$+ w^2 \begin{bmatrix} \mathbf{J}_f & -\mathbf{J}_f\mathbf{A}_f \\ \text{sim} & \bar{\mathbf{M}} + \mathbf{A}_f^T\mathbf{J}_f\mathbf{A}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_f \\ \mathbf{y}^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_f \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Donde $\mathbf{J}_f = \mathbf{Y}_f\mathbf{H}_f\mathbf{Y}_f$ es la matriz de inercia residual, que introduce en el modelo una mayor precisión, para la misma cantidad de ecuaciones de frontera y modos considerados.

CONDENSACION CON FRONTERAS ELASTICAS O HIBRIDAS

Se ha hecho en los anteriores apartados una breve exposición de los métodos de condensación tradicionales: con fronteras fijas y con fronteras libres. Se expone ahora un método intermedio entre ambos (Curnier¹⁰): la condensación con fronteras elásticas o híbridas, que ha sido ya tratado en la literatura. Se añade aquí una mejora al método: la aproximación de segundo orden con flexibilidad y masa residuales, de manera análoga a como se hizo con fronteras libres.

Si se sigue la técnica tradicional (Hurty, Collins y Hart¹¹, Benfield y Hrudá¹²) se clasifican las subestructuras en principales y secundarias, cumpliéndose la condición de que los componentes secundarios estén unidos únicamente a componentes principales. Los componentes secundarios se condensan por el método de las fronteras fijas. Para los componentes principales se utilizan únicamente modos de vibración, pero calculados tras añadir en las fronteras unos términos de rigidez y masa que tratan de simular la rigidez y masa que aportan a dichas fronteras los componentes secundarios que a ellos se conectan, obteniéndose dichos términos por condensación de Guyan de dichos componentes.

Condensación con Fronteras Elásticas, Flexibilidad y Masa Residuales

El método de condensación con fronteras elásticas anterior tiene el mismo defecto principal que la formulación inicial de la síntesis con fronteras libres: la no representación de los modos de vibración asociados a frecuencias altas, además del elevado número de modos que es necesario considerar.

Para corregir este defecto en este trabajo se introduce en el modelo la flexibilidad aportada por los modos no considerados explícitamente. Además, se incluye desde el principio la aproximación de segundo orden, que mejora considerablemente el modelo disminuyendo el número de modos necesarios.

Asimismo se da un tratamiento unificado a todos los componentes, eliminando la distinción entre principales y secundarios. El proceso de cálculo para cada una de las subestructuras sigue los siguientes pasos:

- a) Se calculan, por condensación de Guyan, las matrices de rigidez y masa reducidas a las fronteras de todos los componentes.
- b) Se corrigen la rigidez y masa de cada componente añadiéndoles las matrices reducidas de todos los componentes adyacentes a él (o sólo de algunos de ellos). Si no se incluye ninguno resulta el caso particular de síntesis con fronteras libres.
- c) Se calculan para el componente unos modos de vibración como solución del PVVP correspondiente a su rigidez y masa corregidas.

Agrupando estos modos en una matriz \mathbf{A}^E se tiene el cambio de coordenadas

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^E \mathbf{y} \quad (11)$$

que no diagonaliza a \mathbf{K} y \mathbf{M} , por lo que dan lugar a unas matrices

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{A}^{ET} \mathbf{K} \mathbf{A}^E \quad (12a)$$

$$\bar{\mathbf{M}}' = \mathbf{A}^{ET} \mathbf{M} \mathbf{A}^E \quad (12b)$$

que no son diagonales (como en los otros métodos de síntesis antes expuestos) sino llenas y de orden $n_e \times n_e$, siendo n_e el número de modos considerado en \mathbf{A}^E .

Cálculo de la Flexibilidad Residual Equivalente

La flexibilidad aportada por los n_e modos en \mathbf{A}^E viene dada por:

$$\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{A}^E \bar{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{A}^{ET} \quad (13)$$

por tanto, el equivalente a la flexibilidad residual es en este caso:

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \mathbf{K}^{-1} - \tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G} - \tilde{\mathbf{G}} \quad (14)$$

En el caso de que no exista \mathbf{K}^{-1} se resuelve del mismo modo que en el caso de síntesis con fronteras libres.

Aproximación de segundo orden

La deformación originada por los modos ignorados se aproxima de manera análoga al caso de síntesis de fronteras libres, es decir:

$$\mathbf{x}^z = \tilde{\mathbf{Z}} \mathbf{f} - \omega^2 \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{f} \quad (15)$$

siendo $\tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{Z}} \mathbf{M} \tilde{\mathbf{Z}}$.

La aproximación completa en base a los vectores básicos es por lo tanto:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^E + \mathbf{x}^z = \mathbf{A}^E \mathbf{y}^E + \tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}\mathbf{f} - w^2 \tilde{\tilde{\mathbf{H}}}\mathbf{f} \quad (16)$$

que, particularizada a las ecuaciones frontera es:

$$\mathbf{x}_f = \mathbf{A}_f^E \mathbf{y}_f^E + \tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}_f \mathbf{f}_f + w^2 \tilde{\tilde{\mathbf{H}}}_f \mathbf{f}_f \quad (17)$$

ya que las fuerzas de conexión entre componentes se anulan en el interior de éstos.

De aquí el valor de las fuerzas de conexión:

$$\mathbf{f}_f = (\mathbf{I} + w^2 \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}_f^{-1} \tilde{\tilde{\mathbf{H}}}_f)^{-1} \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}_f (\mathbf{x}_f - \mathbf{A}_f^E \mathbf{y}_f^E) \quad (18)$$

con: $\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}_f = \tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}_f^{-1}$

Desarrollando en serie hasta términos de orden 2 la expresión anterior, se obtiene una aproximación de las fuerzas de conexión:

$$\mathbf{f}_f = (\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}_f - w^2 \tilde{\tilde{\mathbf{J}}}_f) (\mathbf{x}_f - \mathbf{A}_f^E \mathbf{y}_f^E) \quad (19)$$

$$\text{con } \tilde{\tilde{\mathbf{J}}}_f = \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}_f^{-1} \tilde{\tilde{\mathbf{H}}}_f \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}_f \quad (20)$$

Sustituyendo el valor de \mathbf{f}_f en la ecuación reducida y reagrupando términos se obtiene:

$$-\mathbf{A}_f^T \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}_f \mathbf{x}_f + (\bar{\mathbf{K}} + \mathbf{A}_f^T \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}_f \mathbf{A}_f) \mathbf{y}_f^E + w^2 \mathbf{A}_f^T \tilde{\tilde{\mathbf{J}}}_f \mathbf{x}_f - w^2 (\bar{\mathbf{M}} + \mathbf{A}_f^T \tilde{\tilde{\mathbf{J}}}_f \mathbf{A}_f) \mathbf{y}_f^E = 0 \quad (21)$$

Esta ecuación junto con la (19) forma las ecuaciones de movimiento del componente. Agrupándolas en una única expresión:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}_f & -\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}_f \tilde{\tilde{\mathbf{A}}}_f \\ \text{sim} & (\bar{\mathbf{K}} + \tilde{\tilde{\mathbf{A}}}_f^T \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}_f \tilde{\tilde{\mathbf{A}}}_f) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_f \\ \mathbf{y}_f^E \end{Bmatrix} - w^2 \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{\mathbf{J}}}_f & -\tilde{\tilde{\mathbf{J}}}_f \tilde{\tilde{\mathbf{A}}}_f \\ \text{sim} & (\bar{\mathbf{M}} + \tilde{\tilde{\mathbf{A}}}_f^T \tilde{\tilde{\mathbf{J}}}_f \tilde{\tilde{\mathbf{A}}}_f) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_f \\ \mathbf{y}_f^E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

Comparando esta formulación con las de fronteras libres (10), se observa un gran paralelismo entre ambas, siendo equivalentes las matrices que en ella aparecen, coincidiendo (10) y (22) en el caso de que no se añadan al componente las rigideces y masas condensadas de los vecinos.

Las ecuaciones así deducidas en este trabajo representan el modelo más completo de los estudiados para un componente. Por una parte incluyen las aproximaciones de primer y segundo orden para la respuesta de los modos no incluidos en el modelo.

Por otra parte están basadas en unas formas de deformación A^E que son modos de vibración hallados con las fronteras del componente corregidas mediante la rigidez y masa de los vecinos, con lo que se asemejan en gran manera a los modos finales de vibración de toda la estructura.

TECNICA DE SUBESTRUCTURAS MULTINIVEL

Para formar las matrices de masa y rigidez de una subestructura de nivel mayor que 0, (es decir, que sea composición de varias subestructuras o superelementos) es necesario conocer las matrices condensadas de todos sus superelementos (es decir, de aquellas subestructuras que la componen).

En el caso de que un superelemento esté definido como copia o sea simétrico de otro, se considera la matriz condensada de la subestructura original, convenientemente transformada.

El tratamiento que se dará a dichas matrices condensadas es independiente de cuál haya sido la técnica de síntesis modal utilizada, ya que en cualquier caso siempre se ha tenido en cuenta que las coordenadas reducidas en que se representa el superelemento sean las mismas: los g.d.l. frontera en número n_f , más un número pequeño de coordenadas modales en número n_F, n_L ó n_B , según cuál haya sido la técnica utilizada, y al que se denotará en general como n_m .

Para simplificar la formulación, en el desarrollo que sigue se considera que la subestructura está formada por sólo dos superelementos, 1 y 2, cuyas ecuaciones reducidas son:

$$\begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (23a)$$

$$Ky + M\ddot{y} = 0 \quad (23b)$$

De esta manera las dos subestructuras están desacopladas y por lo tanto es necesario imponer las condiciones de compatibilidad geométrica entre sus fronteras. Esta labor viene facilitada por el hecho de estar incluidos todos los g.d.l. de las fronteras entre las coordenadas reducidas.

Para ello se dividen los vectores y_1, y_2 en dos partes:

$$y_1 = \begin{Bmatrix} x_{12} \\ x_1 \end{Bmatrix} \quad y_2 = \begin{Bmatrix} x_{21} \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

siendo $x_{12} = x_{21} = x^*$ el vector de coordenadas comunes, y x_1, x_2 de las coordenadas que pertenecen únicamente a una u otra subestructura. Entre estos últimos se incluyen las coordenadas modales, ya que son parámetros internos a cada una de ellas.

Esta partición de las coordenadas equivale a una partición en bloques de las matrices condensadas de los superelementos (K_1, K_2, M_1, M_2), de la siguiente manera:

$$K_j = \begin{bmatrix} K_j^{**} & K_j^{*j} \\ K_j^{j*} & K_j^{jj} \end{bmatrix} \quad j = 1, 2 \quad (25)$$

La compatibilidad geométrica entre las dos subestructuras se puede resumir mediante

$$y = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{12} \\ x_1 \\ x_{21} \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x^* \\ x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \beta x \quad (26)$$

que aplicado a la ecuación (23) permite obtener las ecuaciones del movimiento en el nuevo sistema de coordenadas:

$$K'x = w^2 M'x \quad (27)$$

siendo K' y M' las proyecciones de K y M sobre el nuevo sistema de coordenadas:

$$K' = \beta^T K \beta = \begin{bmatrix} K^{**} + K_2^{**} & K_1^{*1} & K_2^{*2} \\ & K_1^{11} & 0 \\ & & K_2^{22} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Generalizando el proceso a más de dos super elementos, la ecuación (24) equivale a dividir el vector de coordenadas reducidas de cada uno de ellos según sus distintas fronteras con cada uno de los demás. A esta división le viene también asociada una división en cajas de la matriz condensada. Al imponer las condiciones de compatibilidad en las fronteras surge una matriz de acople formada por 0 y 1, del tipo de β .

En la implementación práctica no se calcula β , ni se realiza el producto $\beta^T K \beta$, sino que (28) se traduce en un ensamblaje de las matrices condensadas de los super elementos, sumándose las submatrices correspondientes a cada grupo de coordenadas comunes (en el ejemplo $K_1^{**} + K_2^{**}$).

Tratamiento de las Coordenadas Modales

Al intentar condensar a las fronteras una subestructura de nivel mayor que 0 surge el problema de cómo tratar las coordenadas modales utilizadas en la aproximación al subespacio de cada uno de los super elementos, que aparecen entre los grados de libertad a que se ha reducido la subestructura, y que no tienen un sentido geométrico claro. Los dos planteamientos posibles para tratarlo son:

- Condensar la subestructura solamente a las fronteras "físicas" (es decir, a los g.d.l. geométricos correspondientes a los nudos que se comparten con otras subestructuras), eliminando las coordenadas modales junto con los g.d.l. internos.
- Conservar las coordenadas modales entre las coordenadas reducidas, eliminando únicamente las ecuaciones correspondientes a los g.d.l. internos.

Con el primer método se consigue más precisión, ya que se calculan las coordenadas modales directamente y no como una aproximación a su subespacio. Sin embargo, de esta manera se incrementa ligeramente el número de ecuaciones, ya que a las de cada una de las subestructuras hay que añadir las coordenadas modales de *todas* las subestructuras que la componen en *todos* los niveles.

En este trabajo se ha elegido el primer método, ya que el número de coordenadas modales es muy pequeño en relación al resto de las coordenadas, con lo que el pequeño gasto de memoria o de tiempo que lleva consigo el incremento del número de coordenadas es ampliamente compensado por el aumento de precisión.

Aparecen, por tanto, en las matrices de una subestructura los siguientes tres tipos de coordenadas:

- a) los g.d.l. propios de la subestructura, que se pueden separar en n_i interiores y n_f en las fronteras.
- b) si el superelemento es de nivel mayor que cero, las coordenadas modales procedentes de las subestructuras de nivel inferior, en número n_m^* .

Una vez efectuada la condensación, se sustituyen las n_i ecuaciones interiores por las coordenadas modales correspondientes, en número n_m , que vienen a sumarse a las indicadas en b).

Si la subestructura no es la de nivel máximo y hay que condensarla, se eliminan las $\sum n_i$ primeras ecuaciones y el resto (fronteras físicas y coordenadas modales) se conservan entre las coordenadas reducidas, a fin de permitir su ensamblado en las de nivel superior.

Caso de Subestructuras Copia

Una de las ventajas de la técnica de subestructuras es, además de reducir el número de ecuaciones del problema completo, aprovechar la circunstancia de que haya subestructuras repetidas, relacionadas entre sí por simetrías, giros o traslaciones.

En este caso se define para cada una de ellas un sistema de coordenadas local, obteniéndose el sistema de las copias simetrizando, girando o trasladando el de la original, según convenga. Las matrices de rigidez y masa, tanto completas como reducidas, tienen la misma expresión para todas las subestructuras repetidas en los respectivos sistemas locales.

Por lo tanto es suficiente con efectuar la reducción modal solamente de la subestructura original, obteniéndose un considerable ahorro:

- En simplicidad de entrada de datos, pues basta definir una de ellas y dar la transformación de coordenadas para las demás.
- En espacio de almacenamiento, ya que las matrices de masa y rigidez completa son en general de un gran tamaño, además del almacenamiento auxiliar que es necesario durante la condensación.
- En tiempo de CPU, ya que un elevado porcentaje del tiempo total de ejecución se emplea en la condensación.

Una vez condensada la subestructura original basta expresar sus matrices reducidas en el sistema de ejes global, tras lo cual éstas están ya preparadas para ser ensambladas en las matrices características de la subestructura de nivel superior.

EJEMPLOS

En la bibliografía existente¹³ aparecen múltiples estudios comparativos entre métodos de condensación, como pueden ser los de Ookuma y Nagamatsu¹⁴.

Como ejemplo ilustrativo de las técnicas estudiadas se ha realizado aquí el análisis dinámico por subestructuras de la estructura de la Figura 1. Se han efectuado diversos estudios sobre la misma, variándose el número de modos considerados para cada subestructura y el método de condensación utilizado para cada una de ellas.

A la estructura completa corresponde un modelo con 3275 nudos y 9864 ecuaciones.

Para la subestructura A se ha usado un modelo con 3033 ecuaciones, de las cuales 114 corresponden a sus 19 nudos frontera. Para la B el sistema es de 780 ecuaciones (156 frontera) y para la C de 1476 (72 frontera).

Cada una de ellas (A,B,C) se condensa considerándose 1 ó 5 modos. Del ensamblaje de sus matrices condensadas resulta para la subestructura M un sistema con 112 ecuaciones (32 fronteras). La unión de M con su simétrica M' genera un sistema final de 30 ecuaciones para la estructura global.

Las subestructuras A y B se condensan con fronteras fijas. La C con fronteras fijas o con fronteras libres, así como la M.

En los cálculos realizados se han puesto de manifiesto las ventajas prácticas de utilizar una partición en múltiples niveles. El programa de ordenador que se ha confeccionado permite además aprovechar resultados intermedios de cálculos previos. Basta para ello tener condensadas y almacenadas en una base de datos las matrices de las subestructuras de niveles inferiores preparadas para su utilización en niveles superiores variando para éstas bien el método de condensación, el número de coordenadas modales, las condiciones de contorno, el número de autovalores para el problema total, etc. También se pueden modificar las condiciones de una de las subestructuras de nivel inferior sin necesidad de tener que volver a recalcular todas las demás.

En las Tablas I, II, y III se muestran los resultados obtenidos para los diversos estudios, variándose en cada uno de ellas el número de coordenadas modales, considerando:

- a) 5 coordenadas modales para todas ellas.
- b) 5 coordenadas modales para la A, y 1 para todas las demás.
- c) 1 coordenada modal para todas ellas.

Como valores de referencia se consideran los calculados para la estructura completa. Atendiendo al error cometido en cada uno de los casos se ve que:

- Para la primera frecuencia el error es del orden del 0.05% en el caso (a) (5 coordenadas modales), del 0.1% en el (b) y del 0.6% en el (c) (1 coordenada modal).
- Para la segunda frecuencia los errores son de los mismos órdenes que para la primera, viéndose que éste disminuye sensiblemente si se emplean fronteras libres en vez de fijas.
- En las restantes frecuencias los errores aumentan, lógicamente, respecto a las primeras. Sin embargo, se sigue manteniendo la misma proporcionalidad entre

	Caso a	Caso b	Caso c	Sol Real
1	.9270	.9275	.9328	.9265
2	1.1929	1.1946	1.2094	1.1919
3	1.8473	1.8698	1.8815	1.8427
4	2.2583	2.2842	2.3653	2.2459
5	3.2189	3.1876	3.4679	3.1863

Tabla I. Frecuencias de vibración (Hz). Todas las subestructuras condensadas con fronteras fijas.

	Caso a	Caso b	Caso c
1	.9270	.9265	.9318
2	1.1929	1.1947	1.2095
3	1.8465	1.8698	1.8815
4	2.2578	2.2773	2.3569
5	3.2139	3.2313	3.4613

Tabla II. Frecuencias de vibración (Hz). Subestructura C con fronteras libres y las restantes con fronteras fijas.

	Caso a	Caso b	Caso c
1	.9269	.9281	.9324
2	1.1925	1.1957	1.2106
3	1.8482	1.8515	2.4001
4	2.2560	2.3213	3.4176
5	3.2159	3.3638	3.7913

Tabla III. Frecuencias de vibración (Hz). Subestructura M con fronteras libres y las restantes con fronteras fijas.

unos métodos y otros.

Con respecto al tiempo de CPU empleado se puede destacar:

- En los casos en que se condensa A con 5 coordenadas modales, debido al gran número de ecuaciones, el tiempo de cálculo necesario para ello es considerable (aproximadamente el 75% del total). Sin embargo, si se condensa con sólo un modo se reduce el tiempo necesario al 65% del total.
- Los tiempos de cálculo para B y C son menores (del 12% para cada uno de ellos), por lo que no supone excesivo problema el recalcularlas tantas veces como se vea necesario.
- Son especialmente insignificantes los tiempos de CPU empleados para condensar M o para resolver el PVVP final (del orden de varios segundos), por lo que se pueden realizar sin gran esfuerzo modificaciones en ambos estudios.

- El tiempo total empleado es del orden de la cuarta parte del que se necesita para resolver el sistema completo.

CONCLUSIONES

Se presenta el método de condensación dinámica de subestructuras, que considera como vectores básicos los modos de vibración de la subestructura apoyada elásticamente en las subestructuras vecinas. Estos vectores básicos representan una buena aproximación a los modos finales de vibración de la estructura completa. Se incluyen aproximaciones de segundo orden: flexibilidad e inercia residuales, con lo que el método garantiza una buena precisión. Se llega a una formulación que es compatible con los métodos convencionales de condensación con fronteras fijas y/o libres, lo que permite una gran flexibilidad en el empleo del método.

Se resuelven de manera eficiente los diversos problemas que presenta la división en subestructuras, utilizando multiniveles, y aprovechando asimismo las ventajas de la existencia de subestructuras definidas en función de otras mediante una relación de copia, giro o simetría.

Se incluyen resultados para un caso real de gran tamaño, siendo éstos de gran precisión incluso utilizando un número pequeño de coordenadas modales, destacándose el ahorro de esfuerzo de cálculo que supone el empleo de las técnicas expuestas.

REFERENCIAS

1. W.C. Hurty, "Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes", *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 4, pp. 687-685, (1965).
2. R.R. Craig y M.C. Bampton, "Coupling of Substructures for Dynamic Analysis", *AIAA Journal*, Vol. 6, No. 7, pp. 1313-1319, (1968).
3. S. Hou, "Review of Modal Synthesis Techniques a New Approach", *Shock and Vibration Bulletin*, Vol. 40, pp. 25-39, (1969).
4. E.C. Kuhar y C.V. Sthale, "Dynamic Transformation Method for Modal Synthesis", *AIAA Journal*, Vol. 12, No. 5, pp. 672-678, (1974).
5. S. Rubin, "Improved Component Mode Representation for Structural Dynamic Analysis", *AIAA Journal*, Vol. 13, No. 8, pp. 995-1006, (1975).
6. Ch.U.A. Bucher, "A Modal Synthesis Method Employing Physical Coordinates, Free Component Modes, and Residual Flexibilities", *Computers and Structures*, Vol. 22, No. 4, pp. 559-564, (1986).
7. G. Rozenblum, "Modal Synthesis: Generalization of Macneal's Method. Theoretical Basis", *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, North Holland, Vol. 48, pp. 139-154, (1985).
8. J.T. Celigüeta, "Aplicación de las Técnicas de Síntesis Modal al Análisis Dinámico de Sistemas Mecánicos con Componentes Móviles", *Tesis Doctoral*, ESII San Sebastián, (1985).
9. M. Ookuma y A. Nagamatsu, "Vibration Analysis by Substructure Synthesis Method (Part 4, Calculation of Residual Compliance Matrix)", *Bulletin of JSME*, Vol. 28, No. 239, pp. 905-910, (1985).

10. A. Curnier, "On Three Synthesis Variants", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **90**, pp. 527-540, (1983).
11. W.C. Hurty, J.D. Collins y G.C. Hart, "Dynamic Analysis of Large Structures by Modal Synthesis Techniques", *Computers and Structures*, Vol. **1**, pp. 535-563, (1971).
12. W.A. Benfield y R. Hruda, "Vibration Analysis of Structures by Component Mode Substitution", *AIAA Journal*, Vol. **9**, No. 7, pp. 1255-1261, (1971).
13. M.M. Segura y J.T. Celigüeta, "Técnicas de Síntesis Modal en el Análisis Dinámico con Subestructuras Multinivel", VII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica, Valencia, (1988).
14. M. Ookuma y A. Nagamatsu, "Vibration Analysis by Component Mode Synthesis Method (Comparison of three methods (1))", *Bulletin of JSME*, Vol. **29**, pp. 882-887, (1986).