Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 7, 1, 81–86(1991)

SOLUCIONES EXPLICITAS DE PROBLEMAS(*) MIXTOS PARA SISTEMAS ACOPLADOS DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS PARCIALES

LUCAS JODAR
y
MATILDE LEGUA

Dpto. de Matemática Aplicada,
Univ. Politécnica de Valencia,
Aptdo. 22.012, 46071 Valencia.

RESUMEN

En este artículo obtenemos una solución explícita computable de problemas mixtos para sistemas acoplados de ecuaciones en diferencias parciales que aparecen al considerar aproximaciones en diferencias para sistemas acoplados en derivadas parciales. El enfoque del problema puede considerarse como un método de separación de variables discreto matricial que utilizando series de Fourier discretas permite obtener una solución explícita del problema sin tener que resolver sistemas algrabraicos lineales.

SUMMARY

In this paper an explicit and computable for mixed coupled partial difference systems appearing when one considers difference approximate solutions of coupled systems of partial differential equations is given. By using discrete Fourier series a discrete matrix separation of variables method is proposed. This approach avoids solving algebraic linear systems ocurring is other difference methods.

INTRODUCCION

Muchos sistemas físicos no pueden ser descritos por una sola ecuación en derivadas parciales, sino que son modelados mediante un sistema acoplado de ecuaciones en derivadas parciales. Así, en el estudio de la propagación de señales en un sistema de cables eléctricos aparecen de un modo natural tales sistemas[2,3,6,13]. Sistemas acoplados de ecuaciones en derivadas parciales aparecen también en el estudio de la distribución de la temperatura en un conductor de calor compuesto[12]. Métodos para el estudio de tales sistemas pueden encontrarse en las referencias [2,13,10,3], donde el problema se transforma en un nuevo sistema de ecuaciones desacopladas. Métodos numéricos para su solución han sido propuestos en las referencias [4,5]. El objetivo de este artículo

(*) Este trabajo ha sido financiado con la ayuda PS87–0064 de la D.G.I.C.Y.T.

Recibido: Enero 1990

 ISSN 0213–1315

es obtener soluciones explícitas de ecuaciones en diferencias parciales que aparece de manera natural al aproximar soluciones de sistemas desacoplados de ecuaciones en derivadas parciales del tipo

$$AU_{xx}(x,t) - U_t(x,t) = 0 \tag{1}$$

$$U(0,t) = 0, \quad U(1,t) = 0, \quad t \geq 0 \tag{2}$$

$$U(x,0) = F(x), \quad 0 \leq x \geq 0 \tag{3}$$

donde $U = (u_1, u_2, \cdots, u_m)^T$, $F = (f_1, f_2, \cdots, f_m)^T$, toman valores de $\mathbb{R}^m$ y A es una matriz arbitraria en $\mathbb{R}^{m\times m}$. El enfoque del problema es el equivalente discreto matricial del método de separación de variables. Para su resolución utilizaremos transformadas de Fourier discretas vectoriales, lo que nos permite obtener soluciones explícitas del problema discreto sin resolver sistemas lineales como ocurre al utilizar otros métodos en diferencias, incluso para el caso escalar, véase [1], por ejemplo.

SOLUCIONES EXPLICITAS DE SISTEMAS EN DIFERENCIAS PARCIALES

Supongamos que subdividimos $[0,1]\times]0,\infty[$ en rectángulos iguales de lados $\Delta x = h$, $\Delta t = k$, y sea $P = (ih, jk)$, con i, j enteros positivos, un punto de red rectangular, entonces el valor de la solución en dicho punto P, será denotado por $U(ih, jk) = U(i,j)$. Consideremos las siguientes aproximaciones en diferencias para las derivadas parciales en el punto P[14,p.8]

$$\begin{aligned} U_t(ih, jk) &\approx \frac{U(i,j+1) - U(i,j)}{k} \\ U_{xx}(ih, jk) &\approx \frac{U(i+1,j) - 2U(i,j) + U(i-1,j)}{h^2} \end{aligned} \tag{4}$$

y sea N, r tales que

$$r = \frac{k}{h^2} \quad , \quad h = \frac{1}{N} \quad , \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad j \geq 0 \tag{5}$$

Si se aproxima las derivadas parciales U_{xx} y U_t por las diferencias finitas definidas en (4), la ecuación (1) se convierte en

$$\begin{gathered} rA[U(i-1,j) + U(i+1,j)] + (I - 2rA)U(i,j) - U(i,j+1) = 0 \\ 1 \leq i \leq N_1; \quad j \geq 0 \end{gathered} \tag{6}$$

Las condiciones de contorno (2) se traducen en

$$U(0,j) = 0, \qquad U(N,j) = 0 \quad , \quad j \geq 0 \tag{7}$$

y la condición inicial (3) significa

$$U(i,0) = F(i), \qquad 1 \leq i \leq N-1 \tag{8}$$

donde $F(i)$ denota $F(ih)$.

Supongamos que buscamos una solución de la ecuación en diferencias vectorial (6) de la forma

$$U(i,j) = G(j)H(i), \qquad G(j) \in \mathbb{R}^{m\times m}, H(j) \in \mathbb{R}^{m\times m} \tag{9}$$

Sea ρ un número real, y consideremos las ecuaciones en diferencias matriciales,

$$G(j+1) - (I+\rho A)G(j) = 0 \quad , \quad j \geq 0 \tag{10}$$

$$H(i+1) + \left(\frac{-2r-\rho}{r}\right) H(i) + H(i-1) = 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq N-1 \tag{11}$$

Si G, H son soluciones de (10) y (11) respectivamente, entonces $U(i,j)$ definida por (9) satisface (6) porque

$$\begin{gathered} rA[G(j)H(i-1) + G(j)H(i+1)] + (I - 2rA)G(j)H(i) - G(j+1)H(i) = \\ A\rho G(j)H(i) - [(I+\rho A)G(j) - G(j)]H(i) = A\rho G(j)H(i) - \rho AG(j)H(i) = 0 \end{gathered}$$

La solución de (10) que satisface $G(0) = C \in \mathbb{R}^{m\times m}$ viene dada por

$$G(j) = (I+\rho A)^j C \quad , \quad j \geq 0 \tag{12}$$

Por otra parte, si consideramos la ecuación matricial

$$Z^2 - \left(\frac{2r+\rho}{2r}\right) Z + I = 0 \quad , \qquad Z \in \mathbb{C}^{m\times m} \tag{13}$$

y si ρ es un número real tal que $-4r < \rho < 0$, entonces

$$\left(\frac{2r+\rho}{2r}\right)^2 < 0$$

Es fácil observar que (13) admite un par de soluciones diagonales $Z_0, Z_1 \in \mathbb{C}^{m\times m}$,

$$\begin{aligned} Z_0 &= \left\{ \frac{2r+\rho}{2r} + i\left[1 - \left(\frac{2r+\rho}{2r}\right)^2\right]^{1/2} \right\} I \quad ; \\ Z_1 &= \left\{ \frac{2r+\rho}{2r} - i\left[1 - \left(\frac{2r+\rho}{2r}\right)^2\right]^{1/2} \right\} I \end{aligned} \tag{14}$$

Como todos los elementos diagonales de Z_0, Z_1, coinciden y tienen módulo unidad, existe un número real $\theta \in [0, 2\pi[$, tales que

$$Z_0^n = (\cos n\theta + i\text{sen } n\theta)I \quad ; \quad Z_1^n = (\cos n\theta - i\text{sen } n\theta)I \quad ; \quad n \geq 0 \tag{15}$$

Nótese además que $Z_0 - Z_1 = 2i\left\{1 - \left(\frac{2r+\rho}{2r}\right)^2\right\}^{1/2} I$ es invertible, por tanto $\{Z_0, Z_1\}$ define un par completo de soluciones de (13), véase [11] y un conjunto de soluciones de la ecuación (11) viene dado por

$$H(i) = Z_0^i c + Z_1^i d, \qquad i \geq 0 \tag{16}$$

donde c, d son vectores arbitrarios en $\mathbb{C}^m$.

De (7) y (9), resulta que H tiene que satisfacer las condiciones de contorno

$$H(0) = 0, \qquad H(N) = 0 \tag{17}$$

De (16) y (17) resulta que $c = -d$ y $2i\text{sen}(N\theta) = 0$. Si buscamos una solución no idénticamente nula de (11), (17), ha de verificarse $\text{sen}(N\theta) = 0$. De este modo basta tomar enteros a tales que $N\theta = s\pi$,

$$\theta = s\pi/N \quad , \quad s = 1, 2 \cdots, N-1 \tag{18}$$

De aquí una familia de soluciones de (11), (17), viene dada por

$$H_s(i) = (\text{sen}(is\pi/N))g \qquad s = 1, 2, \cdots, N-1 \tag{19}$$

donde g es un vector arbitario en $\mathbb{C}^m$. De la definición de θ, de (5) tenemos que $\cos\theta = (2r + \rho)/2r$, o bien,

$$\rho = \rho_s = -2r(1 - \cos\theta) = -4r\text{sen}^2(s\pi/2N) \quad , \quad s = 1, 2, \cdots, N-1 \tag{20}$$

Resolviendo (10) para este valor de ρ, obtenemos que

$$G_s(j) = (1 - 4r\text{sen}^2(s\pi/2N)a)^j C \qquad , \qquad s = 1, 2 \cdots, N-1 \tag{21}$$

es solución de (10) para cualquier matriz $C \in \mathbb{C}^{m\times m}$

De (9), (19) y (21), para cada $s = 1, 2, \cdots, N_1$, obtenemos una solución $U_s(i, j)$ del problema homogéneo (6)–(7), dada por

$$U_s(i, j) = (1 - 4r\text{sen}^2(s\pi/2N)A)^j \,\text{sen}(is\pi/N)v_s \tag{22}$$

para cualquier vector $v_s \in \mathbb{R}^m$.

Ahora se trata de superponer las soluciones $U_s(i, j)$ del problema homogéneo (6)–(7), tomando vectores v_s apropiados de manera que se satisfaga la condición inicial (8). Nótese que los vectores buscados v_s, $1 \leq s \leq N-1$ han de satisfacer

$$U(i, 0) = \sum_{s=1}^{N-1} \text{sen }(is\pi/N)v_s = F(i) \quad , \quad 1 \leq i \leq N-1 \tag{23}$$

De aquí, utilizando series de Fourier discretas[9,cap.4--7,cap.2], si llamamos f_p, $v_{s,p}$, la p-ésima componente de F y v_s, respectvamente, para $p = 1, 2, \cdots, m$ cada componente $v_{s,p}$ viene dada por

$$v_{s,p} = (2/N) \sum_{i=1}^{N-1} \operatorname{sen}(is\pi/N) f_p(i)$$

que podemos escribir en forma vectorial

$$v_s = (2/N) \sum_{i=1}^{N-1} \operatorname{sen}(is\pi/N) F(i), \qquad s = 1, 2, \cdots, N-1 \tag{24}$$

resumiendo hemos demostrado el siguiente resultando:

TEOREMA 1. Sea N un entero positivo, $h = 1/N, k > 0$ y sea $r = k/h^2$. Entonces para $0 \leq i \leq N$, $j \geq 0$, una solución del problema (6), (7), (8), viene dada por

$$U(i,j) = \sum_{i=1}^{N-1} (1 - 4\operatorname{sen}^2(s\pi/2N)A)^j \operatorname{sen}(is\pi/N) v_s \tag{25}$$

donde v_s está definido por (24) para $1 \leq s \leq N-1$.

NOTA. Para el caso desacoplado, es decir, para una sola ecuación escalar, el método aquí propuesto ha sido utilizando en [8]. Aunque es claro que el cálculo de los coeficientes v_s y de los vectores $U(i,j)$, definidos en el teorema 1, son fácilmente implementables en un ordenador, y que el cálculo de los v_s se reduce a los correspondientes de las respectivas componentes $f_p(i)$ $1 \leq p \leq n$, de $F = (f_1, \cdots, f_m)^T$, desde un punto de vista computacional puede resultar costoso para valores grandes de N y j. Para mejorar este aspecto se han desarrollado métodos, algoritmos y programas eficientes computacionalmente y numéricamente estables. Estos llamados genéricamente como basados en la transformada rápida de Fourier (FFT-methods) han sido muy estudiados en los últimos años. Excelentes referencias son [16], donde se encuentran programas Fortran y Algol; [15] y [17]. Estos algoritmos y programas permiten reducir el volumen computacional en 4 veces aproximadamente[7,p.45].

REFERENCIAS

1. B.L. Buzbee, G.H. Golub y C.W. Nielson, "On direct methods for solvinf Poisson's equations" *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. **7**, pp. 627–656, (1970).
2. F.H. Branin, Jr., "Transient analysis of lossless transmission lines", *Proc. IEEE (Letters)*,Vol. **55**, pp. 2012–2013, (1967).
3. Fung-Yuel Chang, "Transient analysis of lossless coupled transmission lines in a nonhomogeneous dielectric medium", *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, MIT 18, pp. 616–626, (1970).
4. B. Fornberg, "On a Fourier method method for the integration of hyperbolic equations", *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. **12**, pp. 509–528, (1975).

5. H.O. Kreiss, y J. Oliger, "Comparison of accurate methods for the integration of hyperbolic equations", *Tcllus*, Vol. **24**, pp. 199-215, (1972).
6. P.I. Kuznetsov y R.L. Stratonovich, "The propagation of electromagnetic waves in multiconductor transmission lines", Macmillan, New York, (1964).
7. M. Pickering, "An introduction to fast Fourier transform methods for partial differential equations with applications", *RSP Research Studies Press*, Hertfordshire, England, (1986).
8. P.N. Swartztrauber, "The methods of cyclic, Fourier analysis and the FACR algorithm for the discrete solution of Poisson's equation on a rectangle", *SIAM Review*, Vol. **19**, pp. 490, (1977).
9. L. Sirovich, "Introduction to Applied Mathematics", Texts in Applied Maths. 1, Springer Verlag, New York, (1988).
10. E.C. Zachmanoglou y D.W. Thoe, "Introduction to partial differential equations with applications", William and Wilkins, (1976).
11. L. Jodar, "Explicit solutions for second order operator differential equations with two boundary value conditions", *Linear Algebra Appl.*, Vol. **103**, pp. 73–86, (1988).
12. J.R. Cannon y R.E. Klein, "On the observability ans stability of the temperature distribution in a composite heat conductor", *SIAM J. Applied Math.*, Vol. **24**, pp. 596–602, (1973).
13. H.W. Dommel, "A method for solving transient phenomena systems", Rep. 5.8, *Proc. 2nd Power Systems Computation Conf.*, Stockholm, Sweden, (1966).
14. G.D. Smith, "Numerical Solution of Partial Differential Equations", "*Finite Difference Methods*", Clarendon Press, Oxford, (1978).
15. W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky y W.T. Vetterling, *"Numerical Recipes"*, Cambridge Univ. Press, (1986).
16. E.O. Brigham, *"The fast Fourier Transform"*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1974).
17. C. Temperton, "On the FACR(2) algorithm for the discrete Poisson Equation", *J. Comput. Phys.*, Vol. **34**, pp. 314, (1980).