

DETERMINACION DE TENSIONES DE CONTACTO ENTRE MATERIALES ORTOTROPOS MEDIANTE EL M.E.C.

M. DOBLARE
F. ESPIGA
L. GRACIA
y
M. ALCANTUD

*Departamento de Ingeniería Mecánica,
E.T.S.I.I. Universidad de Zaragoza,
María de Luna, 3,
50015 Zaragoza.*

RESUMEN

Se presenta en este trabajo la formulación e implementación del problema de contacto con pequeños desplazamientos y deformaciones entre materiales ortótropos y elásticos mediante el método de los elementos de contorno. El programa incluye elementos isoparamétricos lineales, cuadráticos y singulares con nudo a $1/4$, imponiendo de forma explícita las condiciones de contacto entre dos sólidos. Permite la incorporación de diferentes zonas de contacto entre los cuerpos, con diferentes coeficientes de rozamiento para cada uno de ellos. El algoritmo de resolución optimiza la disposición de las ecuaciones, de forma que el número de éstas a resolver en cada uno de los pasos del proceso incremental sea mínimo. Se incluyen distintas aplicaciones, entre ellas la determinación de tensiones de contacto en uniones roblonadas entre laminados de material compuesto o el estudio de la influencia del contacto entre bordes de grieta en la determinación de los factores de intensidad de tensiones efectivos en los extremos de la misma.

SUMMARY

The Boundary Element formulation and the computer implementation of the 2-D contact problem with small displacements and strains between elastic orthotropic materials are presented in this paper. The computer program includes isoparametric linear, quadratic and quarter-point-traction-singular elements. The algorithm minimizes the number of equations to solve in each load step. Several examples are also included, specially the computation of contact stress intensity factor of crack closure effects.

Recibido: Noviembre 1988

INTRODUCCION

Las exigencias crecientes en el diseño de elementos mecánicos implican la necesidad de incorporar en el análisis aspectos que previamente eran tan solo aproximados e incluso no considerados. Tal es el caso del contacto entre sólidos y las tensiones debidas al mismo en la interfase entre ambos.

Si bien en la mayoría de los casos estas tensiones son muy localizadas y no afectan al comportamiento general de la pieza, en otros casos son las tensiones dominantes o afectan de forma esencial a los parámetros fundamentales del problema. Tal es el caso de elementos de unión, tribología en general y consideración del cierre de grietas.

Durante los últimos años se ha realizado un importante avance en la incorporación de la formulación del contacto a programas estándar de elementos finitos^{7,32}, y de elementos de contorno^{4,19}. De los anteriores parece fuera de duda que en el caso de procesos de contacto con pequeñas deformaciones y desplazamientos como los que suelen ocurrir por ejemplo en bordes de grietas, este último método presenta serias ventajas frente al primero. Es éste pues el objeto de este trabajo y en el que nos centraremos en lo que sigue.

En 1980, Anderson et al³ presentan la primera formulación del problema de contacto elástico mediante ecuaciones integrales singulares. En ese trabajo tan solo eran considerados elementos constantes y problemas sin fricción. En 1981, Anderson⁴ incluye la fricción en sus algoritmos. Más recientemente Garrido¹⁹ y París y Garrido³⁴ atacan el mismo problema pero con elementos discontinuos, y resuelven distintos problemas de gran interés con el mismo³⁵. En todos los casos anteriores, sin embargo, se consideraron materiales isótropos y se obvió la inclusión de elementos singulares para la consideración de efectos en bordes de grietas.

En estos últimos años, sin embargo, han surgido en número creciente, un conjunto de materiales de interés ingenieril con propiedades de anisotropía. Tal es el caso de los laminados de materiales compuestos en los que sus altos índices de resistencia y rigidez por unidad de masa los hace especialmente atractivos para multitud de aplicaciones, no sólo en ingeniería aeroespacial sino en algunas tan variadas como elementos de transporte, prótesis médicas o artículos de deporte, entre muchas otras. Debido a la complejidad que suponen la heterogeneidad y anisotropía inherentes a estos materiales, la obtención de soluciones a problemas clásicos es aún un desafío en muchos casos. En el presente trabajo se aborda el problema general del contacto entre sólidos bidimensionales mediante el Método de los Elementos de Contorno con y sin fricción, para materiales ortótropos.

Uno de los objetivos de este artículo radica en el estudio de la influencia del cierre de grieta en la modificación de los factores de intensidad de tensiones efectivos, y con ello el incremento de la vida a fatiga del material. Es por ello que se han incluido distintos aspectos no considerados hasta el momento en programas de contacto, como son nudos con posibilidad de tensiones de tracción en la zona de contacto o bien elementos con singularidad de tipo $-1/2$, como la que aparece en extremos de grieta.

Inicialmente se plantea el problema elástico 2-D mediante el Método de los Elementos de Contorno, y la formulación y algoritmos empleados para la resolución del problema de contacto entre dos sólidos. Finalmente, se incluyen varios ejemplos

que permiten verificar la validez de la formulación presentada.

FORMULACION DEL M.E.C. EN ELASTICIDAD LINEAL 2-D

El método de los elementos de contorno (M.E.C) consiste básicamente en la transformación de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento elástico en ecuaciones integrales, estableciendo una aproximación sobre las variables del contorno.

La ecuación de partida del M.E.C., en su formulación directa, es la conocida identidad de Somigliana¹⁰, la cual expresa el vector de desplazamientos $u_i(Q)$ en un punto Q de un dominio Ω como una función de los desplazamientos $u_i(P)$ y las tensiones $t_i(P)$ en los puntos del contorno de dicho dominio, y de las fuerzas por unidad de volumen X_i :

$$C_{ik} \cdot u_i(Q) = \int_{\delta\Omega} U_{ik}(Q, P)t_i(P)d\delta\Omega - \int_{\delta\Omega} T_{ik}(Q, P)u_i(P)d\delta\Omega + \int_{\Omega} U_{ik}(Q, P)X_i(P)d\Omega \tag{1}$$

donde U_{ik} es la solución fundamental de la ecuación de Navier, T_{ik} son las tensiones correspondientes a dicha solución fundamental (las expresiones para el caso ortótropo vienen dadas en el apéndice), y C_{ik} viene dado por¹⁶:

$$C_{ik} = \begin{cases} \delta_{ik} & Q \in \Omega \\ C'_{ik} & Q \in \delta\Omega \\ 0 & Q \notin \Omega \cup \delta\Omega \end{cases} \tag{2a}$$

con

$$C'_{ik} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \begin{bmatrix} 2(1-\nu)(\pi + \alpha_1 - \alpha_2) + & \text{sen}^2 \alpha_1 - \text{sen}^2 \alpha_2 \\ + \frac{1}{2}(\text{sen} 2\alpha_1 - \text{sen} 2\alpha_2) & \\ \text{sen}^2 \alpha_1 - \text{sen}^2 \alpha_2 & 2(1-\nu)(\pi + \alpha_1 - \alpha_2) - \\ & - \frac{1}{2}(\text{sen} 2\alpha_1 - \text{sen} 2\alpha_2) \end{bmatrix} \tag{2b}$$

para materiales isótropos, donde α_1 y α_2 tienen el significado geométrico de la Figura 1.

Bajo determinadas condiciones¹⁶, la integral de dominio de (1) puede expresarse como suma de dos integrales de contorno, con lo que es posible conocer los desplazamientos de cualquier punto del dominio en función únicamente de integrales de contorno. En este trabajo no se va a contemplar la existencia de fuerzas por unidad de volumen, por lo que dicha integral desaparece, quedando expresada la ecuación (1) directamente en función de integrales de contorno.

Si se discretiza el contorno mediante N_e elementos (Figura 2), y se aproximan en el interior de cada uno de ellos los valores de los desplazamientos y de las tensiones en función de sus valores nodales como:

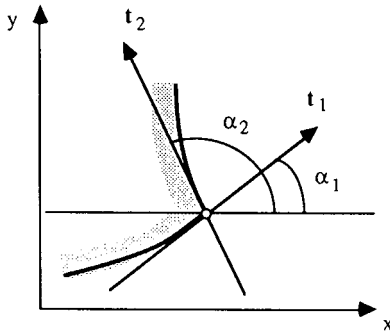


Figura 1. Significado geométrico de α_1 y α_2 .

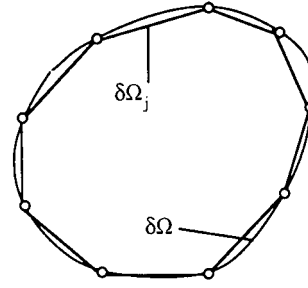


Figura 2. Discretización del contorno.

$$u_i^j = \sum_{k=1}^{Nnj} (u_i^j)_k \varphi_k \quad t_i^j = \sum_{k=1}^{Nnj} (t_i^j)_k \varphi_k \quad (3)$$

donde Nnj es el número de nudos del elemento j , y φ_k son las funciones de aproximación para elementos bidimensionales continuos, la ecuación (1) queda como:

$$C_{ik} u_i(Q) = \sum_{j=1}^{Ne} \int_{\delta\Omega_j} U_{ik}(Q, P) \left[\sum_{m=1}^{Nnj} (t_i^j)_m \varphi_m \right] d\delta\Omega_j - \sum_{j=1}^{Ne} \int_{\delta\Omega_j} T_{ik}(Q, P) \left[\sum_{m=1}^{Nnj} (u_i^j)_m \varphi_m \right] d\delta\Omega_j \quad (4)$$

En el caso, por ejemplo, de elementos lineales (dos nudos por elemento) la ecuación (4) puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{Ne} \begin{bmatrix} A_{111}^{kj} & A_{211}^{kj} & A_{112}^{kj} & A_{212}^{kj} \\ A_{121}^{kj} & A_{221}^{kj} & A_{122}^{kj} & A_{222}^{kj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (u_1^j)_1 \\ (u_1^j)_2 \\ (u_2^j)_1 \\ (u_2^j)_2 \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{Ne} \begin{bmatrix} B_{111}^{kj} & B_{211}^{kj} & B_{112}^{kj} & B_{212}^{kj} \\ B_{121}^{kj} & B_{221}^{kj} & B_{122}^{kj} & B_{222}^{kj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (t_1^j)_1 \\ (t_1^j)_2 \\ (t_2^j)_1 \\ (t_2^j)_2 \end{bmatrix} \quad (5a)$$

con:

$$A_{imn}^{kj} = \int_{\delta\Omega_j} \varphi_i T_{mn}^{kj} d\delta\Omega_j \quad B_{imn}^{kj} = \int_{\delta\Omega_j} \varphi_i U_{mn}^{kj} d\delta\Omega_j \quad (5b)$$

Si se aplica esta ecuación en cada nudo y se introducen las condiciones de contorno pertinentes, se obtiene un sistema algebraico de $[2\Sigma_j(Nn_j - 1)]$ ecuaciones con otras tantas incógnitas, correspondientes a valores de desplazamientos y tensiones en los nudos del contorno¹⁶. Cuando el nudo en que se aplica la ecuación no coincide con uno de los nudos adyacentes al elemento sobre el que se integra, las integrales de (5) se evalúan mediante una cuadratura de Gauss estándar. En cambio, cuando se integra desde un nudo sobre los elementos adyacentes, se producen singularidades en las integrales de (5). En este caso, las constantes B se evalúan con una cuadratura con función de peso logarítmica, mientras que las constantes A , se evalúan, junto con el término libre, imponiendo desplazamientos como sólido rígido al cuerpo en estudio¹⁶.

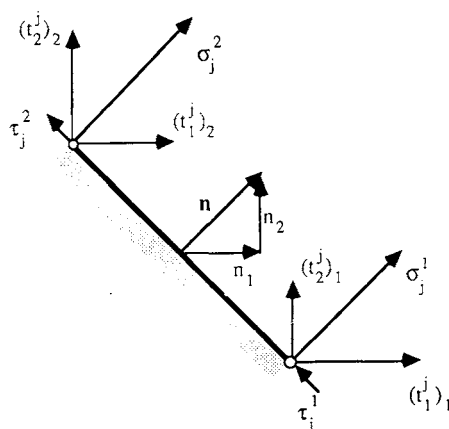


Figura 3. Coordenadas locales.

En cada nudo se pueden establecer dos ecuaciones, y existen seis posibles incógnitas, correspondientes a los dos desplazamientos del mismo, y a dos tensiones en el elemento anterior y otras dos en el elemento posterior. En la mayoría de los casos, éstas suelen venir expresadas en coordenadas locales, por lo que es preciso transformar el vector tensión a dichas coordenadas en la forma (Figura 3):

$$\begin{bmatrix} (t_1^j)_1 \\ (t_1^j)_2 \\ (t_2^j)_1 \\ (t_2^j)_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 & 0 \\ -n_2 & 0 & n_1 & 0 \\ 0 & n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & -n_2 & 0 & n_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_j^1 \\ \sigma_j^2 \\ \tau_j^1 \\ \tau_j^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

En definitiva, una vez ensamblados la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes, y aplicadas las condiciones de contorno, se obtiene un sistema algebraico de la forma:

$$\mathbf{Kx} = \mathbf{f} \quad (7)$$

en el que las incógnitas pueden corresponder tanto a desplazamientos como a tensiones

en el contorno. La resolución de dicho sistema puede llevarse a cabo por distintos métodos, dependiendo del tamaño del mismo.

Una vez conocidos los desplazamientos y tensiones en todo el contorno, los desplazamientos en cualquier punto interior pueden obtenerse por medio de (1), y las tensiones a partir de la aplicación del operador tensión a la misma¹⁰.

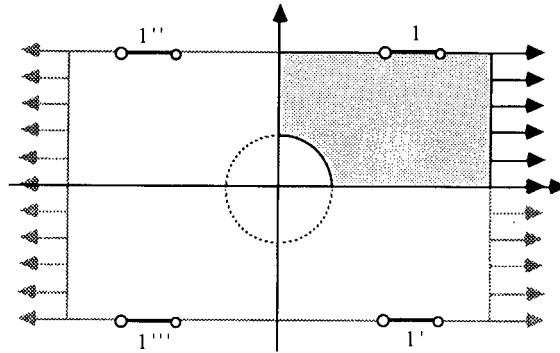


Figura 4. Simetrías.

Finalmente, un aspecto importante es la utilización de las condiciones de simetría con objeto de reducir el número de ecuaciones resultante. En el programa implementado se introducen las condiciones de simetría, de manera implícita, sobre la geometría y las condiciones de contorno del problema, así como sobre los resultados finales. Así, en la Figura 4 sólo sería necesario especificar las características del elemento 1, estando definidas las de los elementos 1', 1'' y 1''' por las condiciones de simetría.

FORMULACION DEL PROBLEMA DE CONTACTO ENTRE SÓLIDOS CON PEQUEÑOS DESPLAZAMIENTOS

El problema de contacto unilateral con pequeños desplazamientos y deformaciones, y aislando cada uno de los sólidos en contacto, no es más que un problema de elasticidad lineal, en cuanto a las ecuaciones básicas de equilibrio, compatibilidad y comportamiento, sometido a unas condiciones de contorno no-lineales, que dependen del nivel de carga y de la geometría de los sólidos en contacto.

Nos centraremos tan solo en la formulación del problema de contacto entre dos sólidos elásticos, ya que la extensión a problemas de contacto multicuerpo o la particularización a contacto con base rígida son inmediatas a partir de la anterior, independientemente de los problemas de implementación que presenta la primera, o de modelización de la segunda. Sean $\delta\Omega^c$ un entorno de un punto determinado de la zona de contacto, y $n = f_A(t)$, $n = f_B(t)$ las ecuaciones que representan las superficies indeformadas de ambos cuerpos A, B sobre las zonas de contacto $\delta\Omega_A^c$, $\delta\Omega_B^c$ ³² en ejes locales tangente-normal (recuérdese que al considerar pequeños desplazamientos dichas ecuaciones serán esencialmente iguales entre sí, e iguales a la ecuación de la zona final

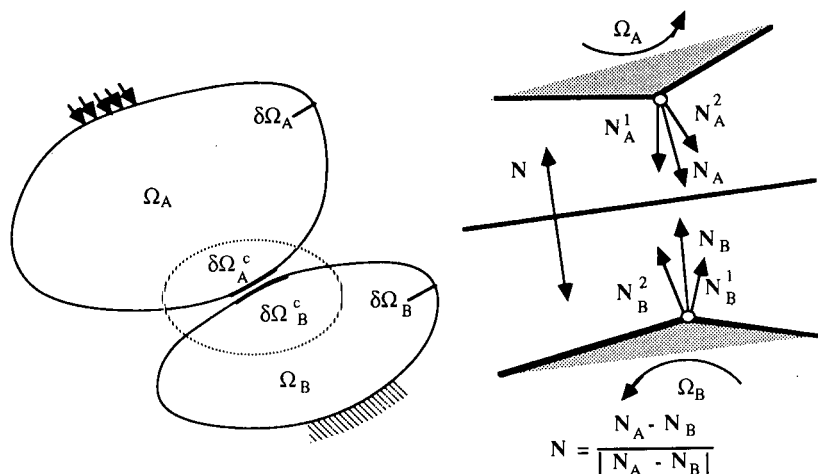


Figura 5. Normal intermedia entre los dos sólidos.

de contacto $\delta\Omega^c$) (Figura 5). La condición de no penetración en dicho punto y con los significados de dicha figura se establece como

$$d_N + u_N \leq 0 \tag{8}$$

con d_N la proyección de la distancia inicial entre los puntos equivalentes (igual posición después del contacto) sobre la normal a $\delta\Omega^c$, y u_N la proyección del desplazamiento relativo entre ambos puntos sobre la misma normal. Puede demostrarse³² que dicha condición no es más que la condición de no penetración general con grandes desplazamientos linealizada en la variable t , alrededor del punto objeto de estudio. Esta expresión de condiciones de contorno cinemática establece de forma aproximada la condición real, de tal forma que sólo será exacta en el caso de que las normales de ambos sólidos en la configuración indeformada sean iguales en el entorno $\delta\Omega^c$, y el desplazamiento relativo de ambos puntos coincida con dicha dirección. En el caso de que ambas normales sean ortogonales se producirá el error máximo, pudiendo incluso vulnerarse la condición de no-penetración. Sin embargo, casos cercanos a éste son en la práctica irreales en problemas de pequeños desplazamientos.

En cuanto a las condiciones de contorno estáticas, en el caso unilateral aquí propuesto y con ley de fricción de Coulomb como la que aquí se ha considerado, se expresan como:

$$\sigma_N \leq 0 \quad \tau \leq \mu \cdot \sigma_N \quad \text{con } \mu \text{ el coeficiente de fricción} \tag{9}$$

Es de destacar que en el programa se ha utilizado como dirección N , en la que se han proyectado los vectores de desplazamientos y tensiones para imponer las condiciones anteriores, la normal intermedia de las medias de las normales a cada uno de los dos elementos que intersectan en cada nudo para cada sólido (Figura 5).

Además de ello han de cumplirse las condiciones de compatibilidad y equilibrio

entre los dos sólidos, en los puntos que hayan alcanzado el contacto. Para ello se definen las siguientes zonas distintas sobre el contorno global de cada sólido (Figura 6):

- Zona fuera de contacto (zona 1). Es aquella que nunca entrará en contacto.
- Zona candidata a contactar (zona 2). Es la zona que todavía no ha contactado pero puede contactar a un nivel de carga determinado.
- Zona en deslizamiento (zona 3). $|\tau| = \mu \cdot \sigma_N$.
- Zona en adherencia (zona 4). $|\tau| < \mu \cdot \sigma_N$.
- Zona de soldadura (zona 5). Se considera este tipo de contacto para dotar de generalidad al programa. Consiste en zona de contacto en la que se consideran soldados ambos sólidos admitiendo por tanto tensiones de tracción.

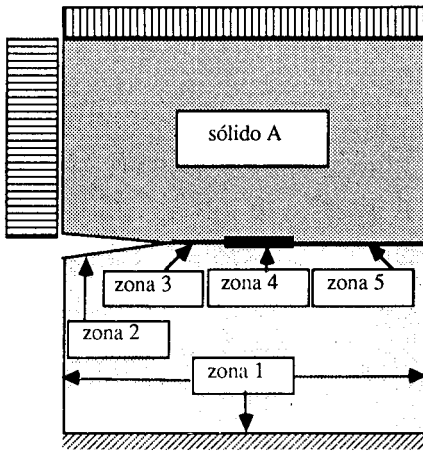


Figura 6. Tipología de zonas.

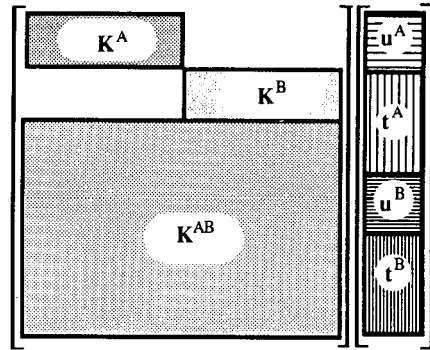


Figura 7. Estructura del sistema de ecuaciones.

El problema de contacto entre dos sólidos consiste pues en el planteamiento de las ecuaciones del M.E.C. para cada uno de los sólidos en contacto, incluyendo en forma implícita o explícita (aquí se ha optado por esta segunda posibilidad) las condiciones de contorno (compatibilidad y equilibrio) en la zona de contacto para cada nivel de carga, y las condiciones de contorno en el resto del mismo para cada uno de los sólidos.

TIPOS DE ELEMENTOS Y NUDOS

El programa que se ha implementado incluye elementos isoparamétricos lineales, cuadráticos y elementos con nudo a un cuarto, todos ellos con continuidad en tensiones y desplazamientos, si bien se incluye el chequeo en zona 1 de la existencia de nudos especiales (nudos con exceso o falta de incógnitas) que se tratan en forma análoga a la referencia [2]. En el caso de existencia de fricción se define el coeficiente de fricción de forma independiente para cada elemento, pudiéndose tener por tanto zonas de contacto independientes entre dos sólidos, con coeficientes de fricción distintos.

Las funciones de aproximación para elementos lineales y cuadráticos son bien conocidas¹⁰, mientras que para elementos singulares puede demostrarse (º por ejemplo) que la disposición del nudo central de un elemento cuadrático a una distancia de 1/4 de longitud del elemento y la realización de la transformación estándar a coordenadas naturales (Figura 8) es equivalente a utilizar una aproximación de desplazamientos en el interior del elemento del tipo:

$$u_i = u_i^1 + (4u_i^2 - u_i^3 - 3u_i^1)\sqrt{\frac{r}{l}} + (2u_i^1 + 2u_i^3 - 4u_i^2)\frac{r}{l} \quad (10)$$

que incluye de forma automática la variación de tipo \sqrt{r} que se produce en el extremo de una grieta. Asimismo, si se utiliza una aproximación singular para las tensiones en la forma:

$$t_i = t_i^{-1}\phi^1\sqrt{\frac{l}{r}} + t_i^{-2}\phi^2\sqrt{\frac{l}{r}} + t_i^{-3}\phi^3\sqrt{\frac{l}{r}} \quad (11)$$

con ϕ^i las funciones de forma estándar para elementos cuadráticos y t_i^j los valores nodales de t_i divididos por los valores nodales de ϕ^i . $\frac{\sqrt{l}}{r}$, puede demostrarse²⁸ que ello es equivalente a considerar una aproximación del tipo:

$$t_i = K\sqrt{\frac{l}{r}} + (2t_i^2 - 3K - 3t_i^3) + (2t_i^3 - 2t_i^2 + 2K)\sqrt{\frac{r}{l}} \quad \text{con } K = \lim_{r \rightarrow 0} t_i^1\sqrt{\frac{r}{l}} \quad (12)$$

que corresponde a la variación del tipo $\frac{1}{\sqrt{r}}$, como la solución analítica en borde de grieta (Figura 8).

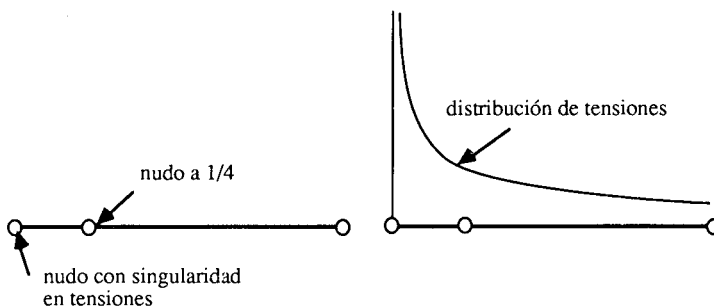


Figura 8. Elemento singular.

Referente a los tipos de nudos utilizados en el programa, y dado que la mayoría de ellos pertenecen a dos elementos (nudos extremos de elemento), pueden asimismo pertenecer a dos zonas distintas de contacto. En base a ello se definen en el programa los siguientes tipos de nudos:

Nudos tipo 11- Son nudos que nunca entrarán en contacto y que por tanto se tratan en forma idéntica a un programa de elementos de contorno estándar.

Nudos tipo $1X$ ($X = 2, 3, 4, 5$)- Son nudos con el elemento a la izquierda en zona 1 y el elemento a la derecha en zona de contacto (2, 3, 4 ó 5).

Nudos tipo $1X$ ($X = 2, 3, 4, 5$)- Idéntico al anterior pero con el elemento a la derecha ahora en zona 1.

Nudos tipo 22- nudos en zona de contacto y libre.

Nudos tipo 33- nudos en zona de deslizamiento.

Nudos tipo 44- nudos en zona de adhesión.

Nudos tipo $5X$ ó $X5$ ($X = 1, 2, 3, 4, 5$)- nudo con un elemento en soldadura y el otro en cualquier tipo de zona.

Es de resaltar que no se han considerado los tipos 23 (32), 24 (42) y 34 (43), ya que en realidad la aproximación utilizada en cada elemento hace en la práctica imposible que un nudo se encuentre en esta situación, ya que el punto de separación entre zonas distintas, en el interior de la zona de contacto, siempre se encontrará en el interior de un elemento. A pesar de ello pueden introducirse como datos, realizando el programa el cambio automático a alguno de los casos posibles. Naturalmente a un nudo tipo ij en el sólido A le corresponde siempre un nudo tipo ji en el sólido B .

Finalmente, también es interesante indicar que los nudos situados sobre los ejes de simetría, cuando se aplica el proceso de simetría implícita, han de ser de los tipos 11, 22, 33, 44 ó 55, detectándose el error en caso contrario, salvo en el caso de elementos con fricción en los que el caso 33 se pasa a 44 automáticamente por el programa. En cuanto a los nudos extremos de elementos singulares en los que se sitúa la singularidad, sólo pueden tener condiciones 52 (25), 53 (35) y 54 (45).

ORGANIZACION Y RESOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES

Dado el carácter no-lineal del problema de contacto, e independientemente del método de solución elegido: incremental, iterativo o incremental-iterativo, es necesario montar y resolver un sistema de ecuaciones lineales un número elevado de veces, de tal forma que el mayor porcentaje del tiempo de ejecución corresponde a este proceso. De ahí la importancia de una elección adecuada del algoritmo a utilizar para minimizar en lo posible este tiempo.

Respecto a la elección de las incógnitas básicas del sistema existen dos posibilidades al respecto: una primera corresponde a elegir las incógnitas estrictamente necesarias para que la sola aplicación de las ecuaciones integrales resuelva el problema, es decir tanto las condiciones de contorno, como las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio en la zona de contacto se incluyen de forma implícita, no apareciendo en el sistema final¹⁹. Con ello, se minimiza el número de ecuaciones, pero es necesario proceder al montaje de las constantes de integración en cada paso, ya que se alteran las incógnitas básicas

del mismo en cada iteración al cambiar las condiciones de contacto en cada paso. Ello implica la necesidad de almacenamiento de las constantes correspondientes a la zona de contacto, ya que un recálculo de las mismas sería completamente ineficiente.

La segunda posibilidad estriba en la elección de un vector de incógnitas inalterable a lo largo del proceso, de forma que las únicas ecuaciones a modificar sean las condiciones en la zona de contacto, que ahora se incluyen de forma explícita. El número de ecuaciones se incrementa sensiblemente, sobre todo si el tamaño de la zona de contacto es elevado respecto al resto del contorno, pero por contra el montaje es muy simple debido a la forma de las condiciones de contacto. Al mismo tiempo, es posible desde el principio identificar el vector de incógnitas y el orden de las ecuaciones, y finalmente no es necesario mantener un almacenamiento auxiliar para las constantes de integración, ya que todas ellas se encuentran en la matriz del sistema, siendo muy simple el incorporar este esquema a un programa de elementos de contorno estándar.

En este trabajo se ha optado frente a [4] y [19] por esta segunda posibilidad. A las razones anteriores se une el hecho de que con una adecuada distribución de las incógnitas y ecuaciones, el número de éstas a resolver en cada paso puede hacerse igual en un caso que en otro, reduciéndose ostensiblemente el tiempo y la dificultad del montaje, y la reordenación posterior de las incógnitas que ahora sí, son todas conocidas de forma explícita. Asimismo, el exceso de memoria necesario tampoco es mucho, dado que no es necesario almacenar al margen las constantes de integración sobre la zona de contacto, y además el conocimiento de la situación concreta de cada incógnita permite un almacenamiento por bloques que reduce la memoria necesaria.

Como conclusión puede decirse que ambos procedimientos son prácticamente equivalentes en cuanto a tiempo de ejecución y memoria necesaria, si bien el aquí adoptado es más simple de programar en lo que se refiere al montaje y algo más complejo en lo que se refiere a resolución.

El primer paso a realizar (si así se desea), independientemente del proceso elegido, suele ser la condensación de las incógnitas correspondientes a los nudos fuera de la zona de contacto. Para ello se aplica un proceso estándar de elementos de contorno para cada uno de los dos sólidos, de forma independiente, teniéndose para cada uno de ellos:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_{LL}^S \cdot \mathbf{x}_L^S + \mathbf{K}_{LC}^S \cdot \mathbf{x}_C^S &= \mathbf{V}_L^S \\ \mathbf{K}_{CL}^S \cdot \mathbf{x}_L^S + \mathbf{K}_{CC}^S \cdot \mathbf{x}_C^S &= \mathbf{V}_C^S \end{aligned} \right\} \rightarrow [\mathbf{K}_{CC}^S - \mathbf{K}_{CL}^S \cdot (\mathbf{K}_{LL}^S)^{-1} \cdot \mathbf{K}_{LC}^S] \cdot \mathbf{x}_C^S = \mathbf{V}_C^S - \mathbf{K}_{CL}^S (\mathbf{K}_{LL}^S)^{-1} \mathbf{V}_L^S \quad (13)$$

con $S = A, B$, o bien

$$\bar{\mathbf{K}}^S \cdot \mathbf{x}_C^S = \bar{\mathbf{V}}^S \quad (14)$$

Cada una de las matrices $\bar{\mathbf{K}}^S$ es una matriz $2n \times 6n$ con n el número de nudos de la zona de contacto. Efectivamente, existen dos ecuaciones integrales sobre cada sólido, para cada nudo como punto de colocación, y en cada nudo de la zona de contacto se consideran 6 incógnitas (2 desplazamientos y 2 tensiones en cada elemento anterior y posterior al mismo) que denominaremos $u_1, u_2, \sigma_{ant}, \tau_{ant}, \sigma_{pos}$ y τ_{pos} .

Finalmente, a las ecuaciones anteriores es necesario añadir 8 ecuaciones por cada nudo de contacto que corresponden a las condiciones de contacto (matriz K^{AB}), y que dependen del tipo de nudo. Así, por ejemplo, para un nudo 44 serían las siguientes

$$u_1^A = u_1^B \quad u_2^A = u_2^B \quad \sigma_{\text{ant}}^A = \sigma_{\text{pos}}^B \quad \tau_{\text{ant}}^A = \tau_{\text{pos}}^B \quad \sigma_{\text{ant}}^A = \sigma_{\text{pos}}^B \quad \tau_{\text{ant}}^A = \tau_{\text{pos}}^B \quad (15)$$

La estructura adoptada para la matriz y vector de incógnitas puede verse en la Figura 7, siendo las matrices K^A , K^B y K^{AB} las únicas almacenadas.

En cuanto al proceso de resolución se utiliza un proceso de eliminación de Gauss pero con pretriangulación de las matrices K^A y K^B , que son las que se mantienen inalterables a lo largo de todo el proceso, con pivoteamiento sobre las filas. Con ello, en cada paso incremental, será necesario tan solo resolver un sistema de $6n \times 6n$ ecuaciones ($4n \times 4n$ en la alternativa primera de montaje cuando se considera continuidad obligatoria de las tensiones) muy simples, con múltiples ceros en ellas.

PROCESO INCREMENTAL

La resolución de un problema de contacto con rozamiento exige el conocimiento de la historia completa del proceso, dado el carácter irreversible del mismo. Ello implica la necesidad de seguir un proceso incremental para su solución. En cambio, en un problema de contacto sin fricción, con zona de contacto desconocida, puede seguirse un procedimiento iterativo para la determinación de la misma, y con ella la distribución de tensiones de contacto. Finalmente, en un problema de contacto sin fricción con zona de contacto conocida "a priori" un solo proceso de carga permite conocer la distribución tensional en la misma. El único procedimiento general es por tanto un proceso incremental, y es aquí utilizado.

La siguiente elección estriba en la conveniencia de establecer el valor del incremento de carga por parte del usuario, con un procedimiento iterativo adicional en cada incremento para determinar la nueva zona de contacto, o los cambios deslizamiento-adherencia producidos, o bien plantear un proceso incremental nudo-nudo, con zona de contacto conocida por tanto, dejando el proceso iterativo exclusivamente para los pasos de deslizamiento a adherencia o viceversa, es decir para problemas con fricción. Este último es mucho más simple, descarga al usuario de todo tipo de elección en el proceso incremental, y la única servidumbre estriba en la necesidad de establecer discretizaciones congruentes en las zonas candidatas al contacto de ambos sólidos. Este inconveniente no es tal en casos de pequeños desplazamientos, ya que las geometrías de ambos sólidos en las respectivas zonas candidatas han de diferir muy poco. Se ha optado en definitiva por este proceso al igual que en [19][34] por su simplicidad.

En definitiva dada una determinada situación de la zona de contacto, dividida en las zonas correspondientes, se procede a aplicar un nuevo incremento de carga, durante el cual se considera proceso de carga lineal, de tal forma que genéricamente puede escribirse

$$\Delta Q_n = f_n(Q - Q_{n-1}) \quad (16)$$

con Q la carga total a aplicar al final del proceso, Q_{n-1} la carga aplicada hasta ese momento y f_n el factor de escala a determinar, que corresponde al mínimo factor de escala que modifica las condiciones de algún nudo de la discretización, es decir

$$f_n = \min_{\alpha} f_n^{\alpha} \quad (17)$$

con f_n^{α} el factor de escalado necesario para modificar cada condición de contacto α . Una vez determinado f_n se tendrá que la distribución de desplazamientos y tensiones vendrá dada por

$$\Delta u^k = f_n \cdot \bar{u}_k \quad \Delta t^k = f_n \cdot \bar{t}_k \quad (18)$$

con u^k y t^k los desplazamientos y tensiones de cada nudo k obtenidos al aplicar, con las condiciones de contorno de la iteración $n - 1$, la carga $Q - Q_{n-1}$.

Los posibles cambios que contempla el programa son los siguientes:

a) Formación de un par de contacto. Cambio de un nudo libre (12,21 ó 22) a zona de contacto (deslizamiento 13,31 ó 33; o adhesión 14,41 ó 44). Se produce al no cumplirse la condición de no-penetración y con posterioridad se chequea la condición de deslizamiento o adherencia.

b) Pérdida de contacto. Cambio de un nudo deslizante (33,13 ó 31) a libre (12,21 ó 22) se produce al detectarse tensiones normales de tracción en ese nudo.

c) Pérdida de adherencia. Cambio de un nudo en adherencia (14,41 ó 44) a deslizante (13,31 ó 33). Se produce al detectarse tensiones tangenciales superiores a las de rozamiento.

Obsérvese que no se considera el paso directo de adherencia a libre ya que esta situación es prácticamente imposible sin pasar previamente por deslizamiento. Asimismo, los nudos 5X y X5 (en soldadura) no se chequean, viniendo modificada su situación (la X) por la modificación de los nudos adyacentes.

Finalmente se ha incluido la posibilidad de paso de nudo 5 a nudo 1, es decir pérdida de soldadura, con objeto de realizar análisis de propagación de grietas elemento a elemento como condiciones de contacto. En general, sin embargo, será necesario modificar la malla por lo que las constantes de integración se modifican, siendo necesario recalcular la matriz en estos casos. El criterio introducido para este cambio ha sido el criterio de la tensión circunferencial máxima³⁷.

Además de las anteriores situaciones, que permiten obtener el factor de escala, es necesario establecer un chequeo de incompatibilidades con objeto de modificar determinadas situaciones supuestas "a priori" y posteriormente no satisfechas dentro ya de una carga determinada. Es el caso típico de la situación inicial establecida por el usuario, si bien también puede presentarse a lo largo del proceso.

Las condiciones de incompatibilidad que pueden producirse son las siguientes:

a) Aparición de tracciones en zonas de adherencia o deslizamiento. Se pasa el nudo correspondiente a libre.

b) Incompatibilidad de condición de deslizamiento (la dirección del desplazamiento

tangencial y la tensión tangencial han de ser contrarios). Se pasa el nudo a adherencia.

c) Tensión tangencial superior a la de fricción. Se pasa el nudo a deslizamiento.

El programa incluye asimismo la posibilidad de múltiples etapas sucesivas de carga, de forma que se comienza cada una con la situación final de la previa, de forma automática. En la Figura 9 se incluyen dos situaciones distintas correspondientes a carga y descarga, con los siguientes significados:

F^n – factor de carga correspondiente al final de la etapa de carga n .

FI – límite inferior de carga para el que se mantienen las condiciones de contacto correspondientes a F^n .

FS_1 – límite superior de carga para el que se mantienen las condiciones de contacto correspondientes a F^n , en una situación en la que es inferior al siguiente pico de carga.

FS_2 – límite superior de carga para el que se mantienen las condiciones de contacto correspondientes a F^n , en una situación en la que es superior al siguiente pico de carga.

F_1^{n+1} – factor de carga correspondiente a la iteración $n + 1$ para el caso FS_1 .

F_2^{n+1} – factor de carga correspondiente a la iteración $n + 1$ para el caso FS_2 .

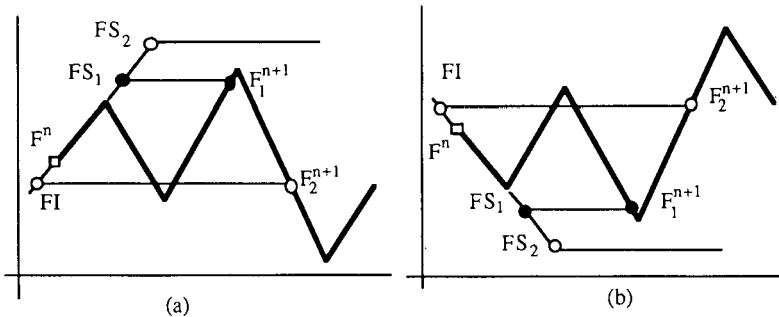


Figura 9. Procesos de carga y descarga.

RESULTADOS

El primer ejemplo corresponde a un caso típico en cualquier programa de contacto, el de un punzón rectangular actuando sobre una base rectangular elástica del mismo material, sin rozamiento, y por tanto con zona de contacto conocida. Una sola etapa de carga basta para conseguir el resultado que se muestra en la Figura 10, que coincide con prácticamente con los obtenidos en [6] [19] entre otros, para el mismo problema. Cabe decir que la singularidad en el extremo del punzón da lugar a un gradiente muy fuerte de tensión en sus proximidades que se puede recoger o bien con una discretización más fina o bien utilizando elementos singulares (aunque los órdenes respectivos de singularidad no coincidan). En este caso se ha utilizado el modelo presentado en la propia Figura 10 con 20 elementos cuadráticos para el punzón y 23 para la base. La zona de contacto está dividida en 13 elementos con densificación hacia el extremo singular. En un segundo caso se introdujo un elemento singular de longitud 5 mm en el extremo singular. Las

características del material de punzón y base son $E = 4000MPa$, $\nu = 0.35$. Los resultados en ambos casos prácticamente coinciden como se observa en la Figura 10 lo que da idea de la gran precisión de ambos tipos de elementos.

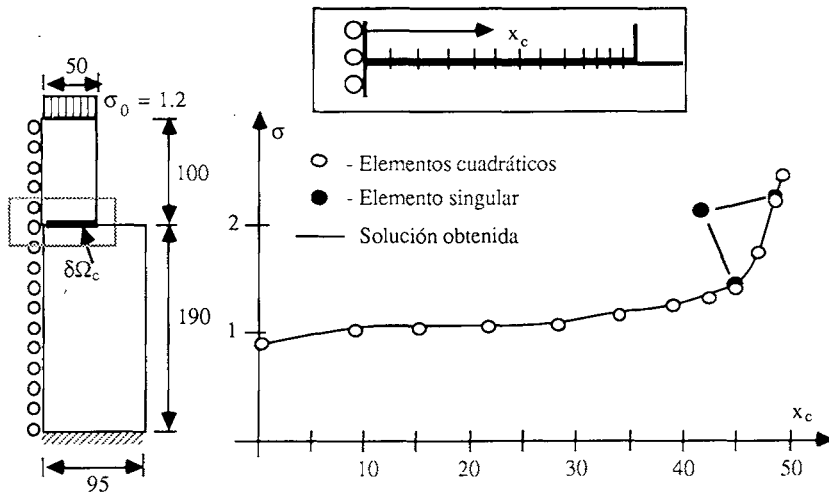


Figura 10. Punzón rectangular sobre base elástica.

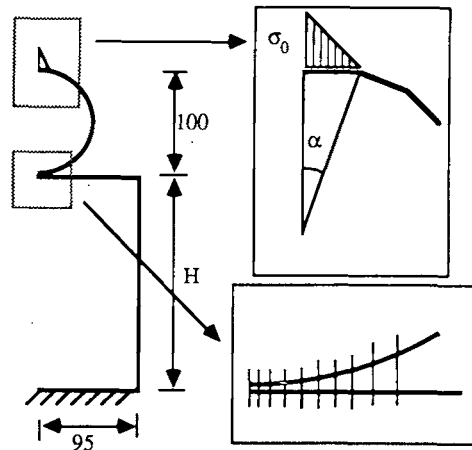


Figura 11. Cilindro sobre base elástica.

El segundo ejemplo corresponde al típico problema de Hertz, también incluido en [6] y [19]. Es el contacto de un cilindro circular sobre una base elástica rectangular con distintos coeficientes de rozamiento y cargado con una carga puntual vertical en el eje de simetría. En la Figura 11 se presenta el modelo en el que se ha utilizado simetría implícita. Se aplica carga hasta conseguir el contacto de la zona inicialmente establecida de 4.099 de semilongitud, discretizada con 11 elementos lineales o 6 cuadráticos. Por ejemplo, la carga necesaria, para el caso de $H = 190\text{ mm}$, $\mu = 0.005$ y $\alpha = 15^\circ$ es

de $P = 568.38$ Nw, que se ha modelizado mediante una distribución lineal sobre un elemento. Las características del material son las mismas que en el caso anterior.

En la Tabla I se muestran los resultados obtenidos para las tensiones normal y tangencial máximas, así como la relación entre la longitud de la zona de adherencia B_1 y la zona total de contacto B , para distintas alturas de la base y ángulos de la carga. Se observa la influencia de la altura de la base y del ángulo de aplicación de la carga en los resultados. Una menor altura de la base y un mayor ángulo de aplicación de la carga incrementan las tensiones tangenciales, y con ello la zona de deslizamiento, siendo necesaria la definición completa del modelo para una comparación de los resultados.

H	α	μ	B_1/B	σ_{\max}	τ_{\max}
190	5°	0.005	0.3	91.13	0.4241
190(*)	5°	0.005	0.3	90.64	0.4204
190(*)	15°	0.005	0.15	95.09	0.4448
160	2°	0.01	0.75	90.99	0.4232
160	5°	0.01	0.75	90.98	0.4448
160	15°	0.01	0.75	90.99	0.479
190	15°	0.01	0.65	91.01	0.625
160	15°	0.05	1.	90.99	0.4904
190	5°	0.	1.	172.35	—

TABLA I.

Los dos valores incluidos en la tabla para la relación B_1/B corresponden a los límites del elemento en el interior del cual se produce el cambio de la zona de adherencia a la de deslizamiento. El asterisco corresponde a los resultados obtenidos con elementos cuadráticos, que no difieren sustancialmente de los lineales. Finalmente, el último resultado corresponde al mismo problema, pero con coeficiente de rozamiento nulo y un

cilindro de material ortótropo con las siguientes constantes elásticas: $E_x = 1000 \text{ MPa}$; $E_y = 8000 \text{ MPa}$; $E_z = 1000 \text{ MPa}$; $\nu_{xy} = 0.3$; $G_{xy} = 833 \text{ MPa}$. La carga necesaria para que se produzca el contacto de toda la zona es en este caso de $P = 1068.3 \text{ Nw}$.

Una vez demostrada la validez del programa por comparación con otros casos pasamos a describir un ejemplo de gran interés similar al incluido en [6] pero con la posibilidad de materiales ortótropos. Corresponde a un remache sometido a cortadura en el que se analizan las tensiones de contacto en la sección central (Figura 12).

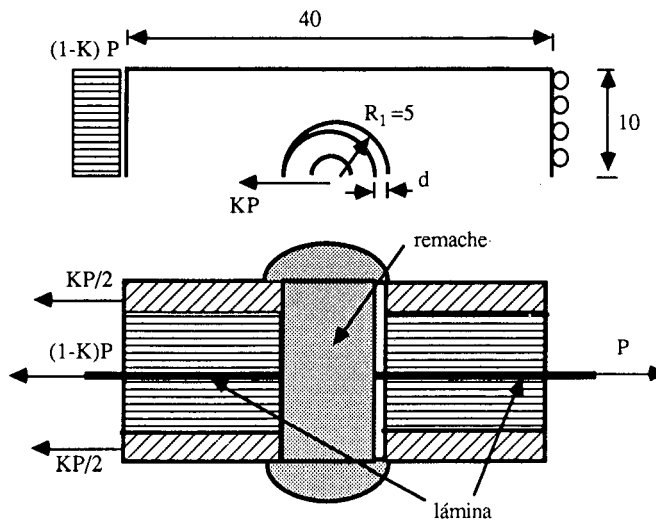


Figura 12. Remache de acero y lámina de aluminio o composite.

La distribución de tensiones en los bordes de un orificio en materiales compuestos es un problema de creciente interés y ha sido estudiado experimentalmente por ejemplo por Godwin et al²¹ y analíticamente por Ueng et al⁴². Sin embargo, la distribución de tensiones de contacto como consecuencia de una tracción aplicada a las láminas unidas por el remache no ha sido aún suficientemente estudiada.

En las Figura 13 a 16 se incluyen las distribuciones de tensiones normales y tangenciales para coeficientes de rozamiento $\mu = 0$ y $\mu = 0.2$ y distintos valores de K , para 4 materiales distintos de la lámina, siempre utilizando acero como material para el remache. Son estos:

Fig. 13. Material aluminio isótropo⁴¹ de características: $E_1 = E_2 = 69 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0.3$, $G_{12} = 26.538 \text{ GPa}$.

Fig. 14. Laminado $[0/90]_s$ de material compuesto con matriz epoxy y fibras de grafito T300/N5208 de características⁴¹ $E_1 = E_2 = 95.991 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0.0302$, $G_{12} = 7.17 \text{ GPa}$.

Fig. 15. Laminado $[45/-45]_s$ de T300/N5208 de características⁴¹ $E_1 = E_2 = 25.051 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0.7469$, $G_{12} = 46.591 \text{ GPa}$.

Fig. 16. Laminado $[0/0]_s$ de T300/N5208 de características⁴¹ $E_1 = 181 \text{ GPa}$, $E_2 = 10.3 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0.0159$, $G_{12} = 7.17 \text{ GPa}$.

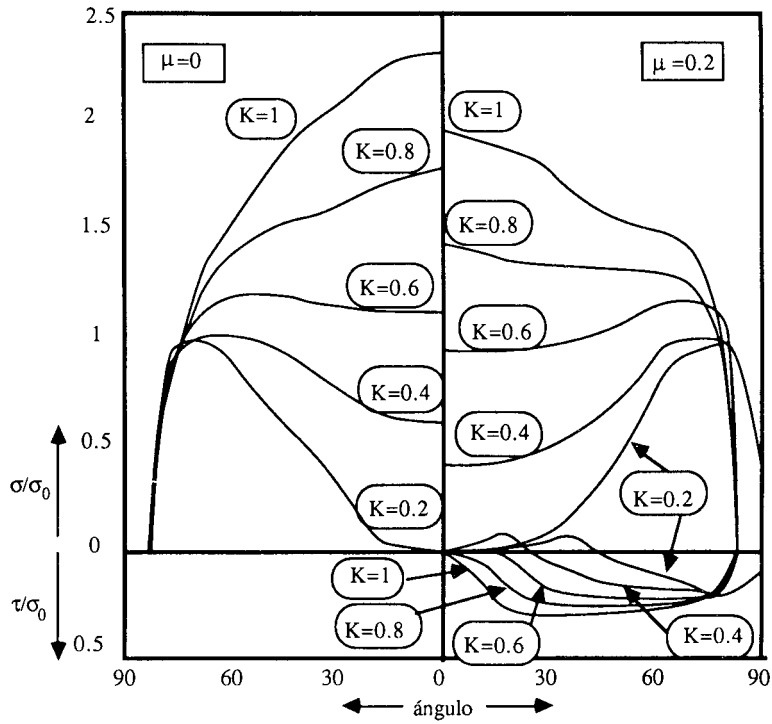


Figura 13. Lámina de aluminio.

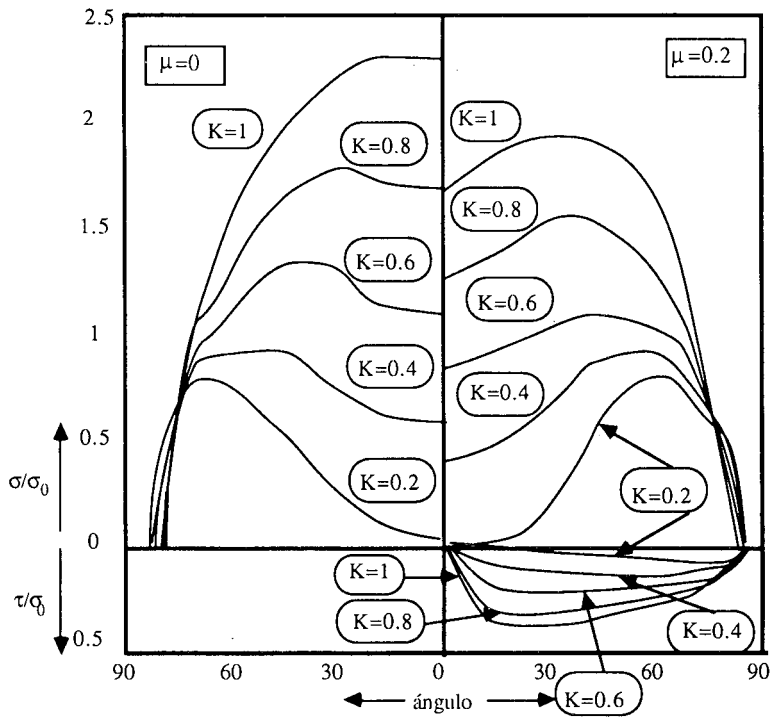


Figura 14. Lámina [0/90], de T300/N5208.

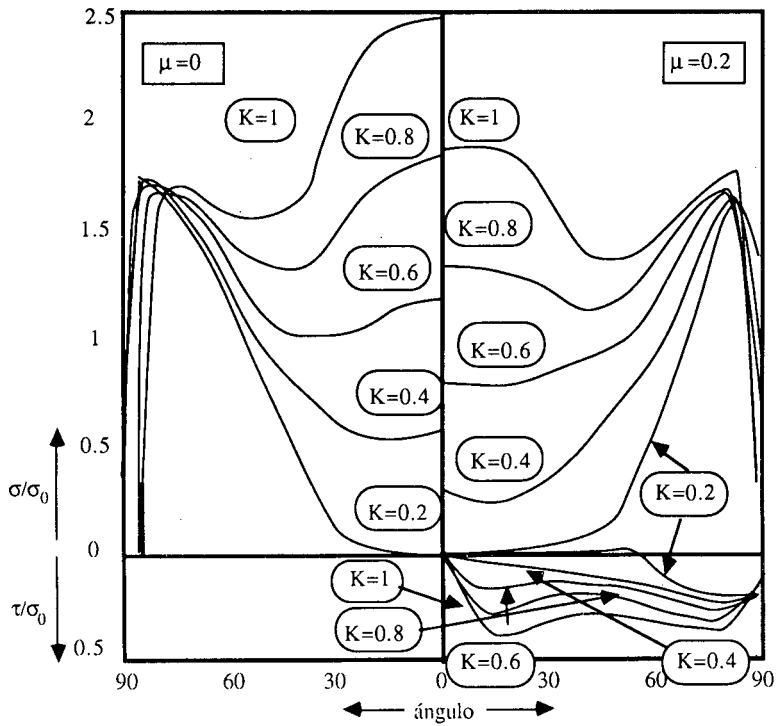


Figura 15. Lámina $[45/-45]$, de T300/N5208.

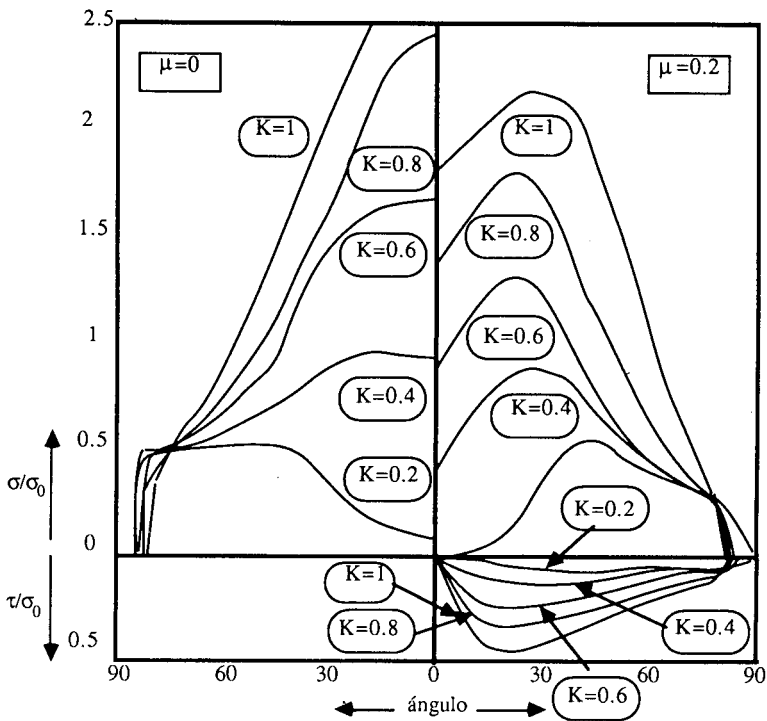


Figura 16. Lámina $[0/0]$, de T300/N5208.

El primer caso presenta una práctica total concordancia con los resultados de [6], mientras que en el resto de las figuras se observa la influencia decisiva de las características del material ortótropo en las distintas distribuciones, cambiando incluso el sentido de las tensiones tangenciales de contacto en algún caso.

Naturalmente, sólo se han considerado laminados equilibrados para poder considerar materiales ortótropos y no anisótropos en general.

El último ejemplo se refiere al estudio del contacto entre labios de una grieta central en una sección sometida a flexión simple. La Figura 17 muestra el modelo presentado y la Tabla II los resultados del caso de longitud de grieta $a = 0.3$. F es el factor de intensidad de tensiones normalizado $F = K_I/\sigma_0\sqrt{\pi a^*}$, con a^* la longitud efectiva (longitud abierta) de la grieta.

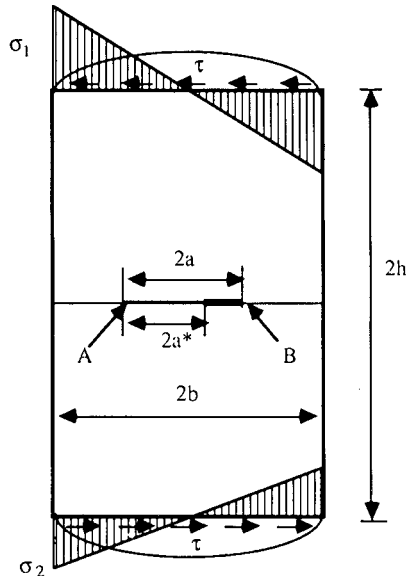


Figura 17. Grieta central sometida a flexión simple.

Es de resaltar que la longitud de cierre que se ha considerado ha sido la correspondiente al punto central del elemento en el cual se produce el cierre, y no difiere sustancialmente para ninguno de los casos aquí incluidos oscilando alrededor del valor $a^* = 0.2047$ mostrado en la Tabla II. Tampoco se alteran demasiado los factores de intensidad de tensiones para distintos materiales, a pesar de la fuerte relación de módulos elásticos en el material ortótropo, mientras que sí es decisivo el considerar el coeficiente de rozamiento a la hora de determinar los factores de intensidad de tensiones en modo II, como era previsible.

μ	0.(is.)	0.(or.)	0.4(is.)	0.4(or.)
F_I^A	0.3423	0.3451	0.3424	0.3451
F_{II}^A	0.2065	0.2035	0.1945	0.1942
F_{II}^B	0.2065	0.2035	0.0845	0.0822

Tabla II. Longitud de grieta $a = 0.3$. Longitud reducida $a^* = 0.2047$.

CONCLUSIONES

Se ha presentado la formulación completa del problema de contacto con pequeñas deformaciones y desplazamientos entre medios ortótropos mediante el M.E.C., y se han demostrado las posibilidades del mismo, con grandes ventajas frente a otros métodos de dominio.

La precisión conseguida tanto en la determinación de la zona de contacto como en la distribución de tensiones es alta, como ha sido demostrado en distintas referencias y en este mismo trabajo. Asimismo es muy simple la incorporación de efectos de singularidades, especialmente en grietas, y de fricción.

La precisión de los elementos cuadráticos (singulares en bordes de grieta) los hace especialmente aconsejables en problemas con grandes gradientes.

No se han notado diferencias sensibles en los resultados obtenidos por otros autores con elementos discontinuos, si bien en estos casos aparece un número superior de puntos de colocación y ecuaciones frente a los continuos para una misma discretización, si bien es cierto que, salvo en zonas de gradiente muy alto, discretizaciones relativamente bastas producen muy buenos resultados, sobre todo con elementos cuadráticos.

De los resultados obtenidos se prueba que no puede ni siquiera aproximarse los resultados para materiales ortótropos con características de isótropos, variando sustancialmente las distribuciones de tensiones de contacto con las características relativas en las direcciones de ortotropía. Ello da lugar a que la disposición de las láminas en laminados de materiales compuestos sea decisiva en la distribución

de tensiones de contacto, por ejemplo en uniones remachadas como las que aquí se estudian.

Finalmente, se corrobora el resultado ya conocido de la necesidad de incorporar los efectos de contacto en bordes de grieta para efectos de flexión a la hora de determinar factores de intensidad de tensiones efectivos.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por la Diputación General de Aragón, a través del C.O.N.A.I. dentro del Proyecto de Investigación ITE/85-12.

REFERENCIAS

1. O. Aksogan, "Partial Closure of a Griffith Crack under General Loading", *Int. J. of Fract.*, Vol. 11, pp. 659-670, (1975).
2. E. Alarcón, A. Martín y F. Paris, "Boundary Elements in Potential and Elasticity Theory", *Computers and Structures*. Vol. 10, pp. 351-362, (1979).
3. T. Andersson, B. Fredricksson, B.G. Allan Pearson, "The Boundary Element Method applied to two-dimensional contact problems", *New Dev. in B.E.M.*, Ed. C.A. Brebbia CML Publ., (1980).
4. T. Andersson, "The Boundary Element Method applied to two-dimensional Contact Problem with Friction", in *B.E.M.* III Ed. C.A. Brebbia pp. 239-258, Springer Verlag, (1981).
5. T. Andersson, "The second generation Boundary Element Contact Program", in *B.E.M.* IV. Ed. C.A. Brebbia. Springer Verlag, (1982).
6. T. Andersson y B.G. Allan Pearson, "The Boundary Element Method applied to two-dimensional contact problems", *Progress in B.E.M.*, Ed. C.A. Brebbia Vol. 2, Pentech Press, (1983).
7. P.K. Banerjee y R. Butterfield, *Boundary Elements Methods in Engineering Science*, McGraw Hill, (1981).
8. K.J. Bathe y A. Chaudary, *A Solution Method for Planar and Axisymmetric Contact Problems*, John Wilry and Sons Ltd., (1983).
9. G.E. Blanford, A.R. Ingraffea y J.A. Ligget, "Two-Dimensional Stress Intensity Factor Computation using the Boundary Element Method", *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, Vol. 17, pp. 387-404, (1981).
10. C.A. Brebbia, *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press, (1978).
11. C.A. Brebbia y J.C.F. Telles, *Boundary Element Techniques-Theory and Applications*, Springer Verlag, (1984).
12. E.E. Burniston y W.Q. Gurley, "The Effect of Partial Closure on the Stress Intensity Factor of a Griffith Crack", *Int. J. Fract. Mech.*, Vol. 9, pp. 9-19, (1973).
13. N. Chandrakaran, W.E. Haisler y R.E. Goforth, "A Finite Element Solution Method for Contact Problems with Friction", *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, Vol. 24, pp. 477-495, (1987).
14. W.H. Chen y J.P. Jeh, "Finite Element analysis of Finite Deformation Contact Problems with Friction", *Comp. and Struct.*, Vol. 29, pp. 423-436, (1988).
15. M. Comminou y J. Dundurs, "On the Frictional Contact in Crack Analysis", *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 12, pp. 117-123, (1979).

16. M. Doblare, "M. Computational Aspects of the B.E.M. in Topics" in *B.E. Research III*, Ed. C.A. Brebbia, pp. 51-131, Springer Verlag, (1987).
17. B. Fredriksson, "Finite Element Solution for Surface Nonlinearities in Structural Mechanics with Special Emphasis to Contact and Fracture Mechanics Problems", *Computers and Structures*, Vol. 6, pp. 281-290, (1976).
18. F.J. Gallego, "Study of the Contact Problems Between Two-Dimensional Solids", Application to the Modelling of the Contact in Rail-Wheel Systems (in spanish), *Ph D. Thesis*, University of Zaragoza, (1987).
19. J.A. Garrido, "The contact problem in Elasticity by using integral equation methods (in spanish)", *Ph D. Thesis*, Univ. of Seville.
20. G.M.L. Gladwell, "Contact Problems in the Classical Theory of Elasticity. Sijthoff Noordhoff, (1980).
21. E.W. Godwin y F.L. Matthews, "A Review of the Strength of Joints in Fibre-Reinforced Plastics", Part I: Mechanically Fastened Joints. *Composites*, Vol. 11, pp. 155-160, (1980).
22. J.J. Kalker, "Variational Principles in Contact Elastostatis", *J. Inst. Maths. Appl.*, Vol. 20, pp. 199-219, (1977).
23. G.A. Karami, "Multi Domain B.E. Modelling of Crack Closure Problems", *Proc. of B.E.M. X Int. Congress*, Ed. C.A. Brebbia, Vol. 3, pp. 185-194, (1988).
24. G.A. Karami, "A Boundary Integral Equation Method for Two-Dimensional Elastic Contact Problems", *Ph. D. Thesis*, University of London, (1983).
25. N. Kikuchi, "A Smoothing Technique for Reduced Integration Penalty Methods in Contact Problems", *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, Vol. 18, pp. 343-350. (1982).
26. S.G. Lekhnitskii, "Theory of Elasticity of an Anisotropic Body", *Holden Day*, (1963).
27. C. Lum y R.O. Foschi, "Arbitrary V-Notches in Orthotropic Plates", *A.S.C.E. J. of Eng. Mech.*, Vol. 114, pp. 638-655, (1988).
28. J. Martínez y J. Domínguez, "On the use of Quarter-Point Boundary Elements for Stress Intensity Factor Computation", *Int. J. Appl. Mech. in Eng.*, Vol. 20, pp. 1941-1950, (1984).
29. D.A. Mendelsohn y K.W. Whang, "Localized Asymmetric Crack Closure with Stick-Slip in the Contact Eng.", *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 29, pp. 365-384, (1988).
30. J.T. Oden y E.B. Piren, "Nonlocal and Nonlinear Friction Laws and Variational Principles for Contact Problems in Elasticity", *J. Appl. Mech.*, Vol. 50, pp. 67-76, (1983).
31. J.T. Oden y E.B. Piren, "Algorithms and Numerical Results for Finite Element Approximations of Contact Problems with Classical Nonfriction Laws", *Comp. and Struct.*, Vol. 19, pp. 137-147, (1984).
32. J.T. Oden y N. Kikuchi, "Finite Element Special Problems in Solid Mechanics", *Finite Element*, Vol. 5, Prentice Hall, (1984).
33. P.D. Panagiotopoulos, "Boundary Integral Equation Methods for the Signorini-Fichera Problems", *B.E.M. VII*, Ed. C.A. Brebbia, Springer Verlag, (1985).
34. F. Paris y J.A. Garrido, "On the use of Discontinuous Elements in Two-Dimensional Contact Problems", *B.E. VII*, Ed. C.A. Brebbia, Springer Verlag, (1988).
35. F. Paris y J.A. Garrido, "Friction Multicontact Problems with B.E.M.", *Proc. B.E.M. X*, Ed. C.A. Brebbia, Vol. 3, pp. 305-319, Springer Verlag, (1988).
36. H. Pina, "Numerical Integration in Topics", *B.E. Research*, Vol. III, pp. 36-50, Ed. C.A. Brebbia, Springer Verlag, (1987).
37. V.E. Saouma, M.L. Ayari y D.A. Leavell, "Mixed Model Crack Propagation in Homogenous Anisotropic Solids", *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 27, pp. 171-184, (1987).

38. M.D. Snyder y T.A. Cruse, "Boundary Integral Equation Analysis of Cracked Anisotropic Plates", *Int. J. of Fract.*, Vol. 11, pp. 315-328, (1975).
39. B.R. Torstenfelt, "Contact Problems with Friction in General Purpose Finite Element Programs", *Comp. and Struct.*, Vol. 16, pp. 487-493, (1983).
40. B.R. Torstenfelt, "An Automatic Incrementation Technique for Contact Problems with Friction", *Comp. and Struct.*, Vol. 19, pp. 393-400, (1984).
41. S.W. Tsai, H.T. Hahn, "Introduction to Composite Materials", *Technomics*, Lancaster, (1985).
42. C.E.S. Ueng y J.K. Link, "Stress Concentrations in Composite Materials", *A.S.C.E. J. of Eng. Mech.*, Vol. 113, pp. 1181-1193, (1987).
43. M. Vable y D.L. Sikarslie, "Stress Analysis in Plane Orthotropic Material by the Boundary Element Method", *Int. J. Solids & Struct.*, Vol. 24, pp. 1-11, (1988).
44. C.W. Woo, Y.K. Cheung, Y.Z. Chen y Y.H. Wang, "A simple Model for the Contact Problem of a Finite Cracked Plate in Bending", *Enf. Fract. Mech.*, Vol. 29, pp. 227-231, (1988).

APENDICE

Si se escriben las relaciones tensiones-deformaciones para un material ortótropo en la forma:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

donde los elementos B_{ij} vienen dados en función de las constantes elásticas²⁶, la solución fundamental viene dada en función de los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\sqrt{B_{11}B_{22}} - B_{12} - c} \\ b &= \sqrt{\sqrt{B_{11}B_{22}} + B_{12} + c} \\ c &= \frac{1}{2G_{12}} \end{aligned} \quad (A.2)$$

y de las siguientes variables que dependen además de la geometría:

$$\begin{aligned} l &= \frac{\sqrt{2}x_r y_r}{\sqrt{B_{11}x_r^2 + B_{22}y_r^2}} \\ l_1 &= \frac{bx_r^2}{B_{22}y_r^2 + (B_{12} + c)x_r^2} \\ l_2 &= \frac{by_r^2}{B_{11}x_r^2 + (B_{12} + c)y_r^2} \\ m &= B_{11}x_r^4 + 2(B_{12} + c)x_r^2 y_r^2 + B_{22}y_r^4 \end{aligned} \quad (A.3)$$

Dependiendo del valor del parámetro a , la solución fundamental en desplazamientos resulta:

a) a real

$$\begin{aligned} U^{11} &= -K_{11} \ln \frac{m}{B_{22}} - C_{11}^r \operatorname{arc} \operatorname{tg}(al_1) \\ U^{12} &= U^{21} = K_{12}^r \ln \left[\frac{l+al}{l-al} \right] \\ U^{22} &= -K_{22} \ln \frac{m}{B_{11}} - C_{22}^r \operatorname{arc} \operatorname{tg}(al_2) \end{aligned} \quad (A4)$$

b) a cero

$$\begin{aligned} U^{11} &= -K_{11} \ln \frac{m}{B_{22}} + C_{11}^0 l_1 \\ U^{12} &= U^{21} = K_{12}^0 l \\ U^{22} &= -K_{22} \ln \frac{m}{B_{11}} + C_{22}^0 l_2 \end{aligned} \quad (A5)$$

c) a imaginario

$$\begin{aligned} U^{11} &= -K_{11} \ln \frac{m}{B_{22}} - C_{11}^i \ln \left[\frac{l+ial_1}{l-ial_1} \right] \\ U^{12} &= U^{21} = K_{12}^i \operatorname{arc} \operatorname{tg}(ial) \\ U^{22} &= -K_{22} \ln \frac{m}{B_{11}} - C_{22}^i \ln \left[\frac{l+ial_1}{l-ial_1} \right] \end{aligned} \quad (A6)$$

con

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{[(b^2 - c)c + (a^2 + c)b^2]}{8\sqrt{2}\pi b\sqrt{B_{22}}} & K_{22} &= \frac{[(b^2 - c)c + (a^2 + c)b^2]}{8\sqrt{2}\pi b\sqrt{B_{11}}} \\ C_{11}^r &= \frac{[(b^2 - c)a^2 - (a^2 + c)c]}{4\sqrt{2}\pi a\sqrt{B_{22}}} & K_{12}^r &= \frac{a^2 b^2 + c^2}{8\pi ab} & C_{22}^r &= \frac{[(b^2 - c)a^2 - (a^2 + c)c]}{4\sqrt{2}\pi a\sqrt{B_{11}}} \\ C_{11}^0 &= \frac{c^2}{4\sqrt{2}\pi a\sqrt{B_{22}}} & K_{12}^0 &= \frac{c^2}{4\pi b} & C_{22}^0 &= \frac{c^2}{4\sqrt{2}\pi\sqrt{B_{11}}} \\ C_{11}^i &= \frac{[(b^2 - c)a^2 - (a^2 + c)c]}{8\sqrt{2}\pi ia\sqrt{B_{22}}} & K_{12}^i &= \frac{a^2 b^2 + c^2}{4\pi iab} & C_{22}^i &= \frac{[(b^2 - c)a^2 - (a^2 + c)c]}{8\sqrt{2}\pi a\sqrt{B_{22}}} \end{aligned} \quad (A.7)$$

Para las tensiones, se tiene en todos los casos:

$$\begin{aligned}
 T^{11} &= -\frac{A_1 y_r^2 + B_1 x_r^2}{m} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \\
 T^{12} &= \frac{C_1 x_r^2 + D_1 y_r^2}{m} y_r n_x - \frac{A_2 x_r^2 + B_2 y_r^2}{m} x_r n_y \\
 T^{21} &= -\frac{A_1 y_r^2 + B_1 x_r^2}{m} y_r n_x + \frac{C_2 x_r^2 + D_2 y_r^2}{m} x_r n_y \\
 T^{22} &= -\frac{A_2 x_r^2 + B_2 y_r^2}{m} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

con:

$$A_1 = \frac{\sqrt{B_{22}}(b^2 - c)}{2\sqrt{2\pi}b} \quad A_2 = \frac{\sqrt{B_{11}}(b^2 - c)}{2\sqrt{2\pi}b}$$

$$B_1 = \frac{\sqrt{B_{11}}(b^2 + c)}{2\sqrt{2\pi}b} \quad B_2 = \frac{\sqrt{B_{22}}(b^2 + c)}{2\sqrt{2\pi}b}$$

$$C_1 = \frac{(b^2 + c)\sqrt{B_{11}B_{22}} - 2(a^2 + c)b^2}{2\sqrt{2\pi}b\sqrt{B_{11}}}$$

$$C_2 = \frac{(b^2 - c)B_{11}}{2\sqrt{2\pi}b\sqrt{B_{22}}}$$

$$D_1 = \frac{(b^2 - c)B_{22}}{2\sqrt{2\pi}b\sqrt{B_{11}}}$$

$$D_2 = \frac{(b^2 + c)\sqrt{B_{11}B_{22}} - 2(a^2 + c)b^2}{2\sqrt{2\pi}b\sqrt{B_{22}}}$$