

# AJUSTE OPTIMO DE FUNCIONES DE TRANSFERENCIA UTILIZADAS PARA LA IDENTIFICACION DE PARAMETROS DE ROBOTS INDUSTRIALES

ALEJO GUILLEN\*  
CARLOS CERRADA\*\*  
y  
MIGUEL CERROLAZA\*\*\*

*\*Escuela de Ingeniería Mecánica,  
Departamento de Automática,  
Facultad de Ingeniería,  
Universidad del Zulia,  
Maracaibo - Venezuela*

*\*\*Departamento de Ingeniería Eléctrica,  
Electrónica y Control,  
Univ. Nacional de Educación a distancia,  
Ciudad Universitaria, s/n,  
28040 Madrid*

*\*\*\*Instituto de Materiales y Modelos Estructurales,  
Universidad Central de Venezuela,  
Sabana Grande - Caracas - Venezuela*

## RESUMEN

En este trabajo se propone un procedimiento numérico basado en el método de Sanathanan y Koerner y la utilización de técnicas de optimización numérica. El procedimiento propuesto permite obtener un ajuste óptimo del modelo matemático, que gobierna la dinámica de robots industriales, a las mediciones experimentales provenientes de ensayos en el dominio de la frecuencia. Se presentan y discuten los resultados obtenidos al analizar un robot industrial de ensamblado de la familia Scara.

## SUMMARY

In this paper a numerical procedure based upon both the Sanathanan-Koerner method and optimization techniques is proposed. The method discussed herein gives an optimal Fitting - in the interpolation error sense- of the mathematical model, which governs the dynamic of industrial robots, to the experimental data arising from tests in the frequency domain. Some numerical results, obtained when analysing an industrial robot of the Scara family, are presented and discussed.

Recibido: Julio 1988

## INTRODUCCION

En los robots industriales, y con la idea de simplificar, la mayoría de los modelos empleados no consideran ciertos fenómenos que hacen acto de presencia cuando los robots se encuentran en aplicaciones avanzadas tales como el ensamblaje en la fabricación, donde la precisión, la rapidez y la versatilidad son fundamentales. Todo ello trae como consecuencia que se presenten fenómenos de resonancia que se producen en las interconexiones dinámicas entre el sistema electromecánico de accionamiento y el brazo del robot, tal como se pone de manifiesto en los estudios de Liegeois, Dombre y Borrel (1980), Sunada y Dubowsky (1983) y Guillén (1986).

La principal limitación de los modelos publicados hasta la fecha sobre este tipo de robots, como puede verse, por ejemplo en Paul (1982), Stone y Neuman (1984) y Vukobratovic y Potkonjak (1982), es la suposición de que su comportamiento dinámico está representado por cuerpos rígidos interconectados entre sí, impulsados por accionadores modelados como fuentes de par puro o como sistemas de primer orden. Esta suposición no es totalmente cierta debido a la existencia de elementos de desplazamiento en el sistema de accionamiento del robot.

La identificación de los parámetros de estos modelos se puede realizar mediante métodos frecuenciales, planteando e identificando los fenómenos de resonancia que han sido detectados en trabajos anteriores (Guillén, 1986; Guillén, Cerrada y Feliu, 1987). El conocimiento adecuado de las características dinámicas del robot influye decisivamente sobre el posterior diseño de los reguladores que gobiernan el comportamiento del robot. Se comprende, entonces, la enorme importancia de identificar apropiadamente los parámetros del robot, de manera de optimizar su desempeño.

Por tanto, en este trabajo se propone un procedimiento basado en el método de Sanathanan y Koerner (1963), que a su vez proviene del método de Levy (1959), en combinación con técnicas de optimización numérica. El procedimiento aquí propuesto produce un ajuste óptimo —en el sentido de minimización del error de interpolación numérica— del modelo matemático a los datos experimentales.

Se presentan análisis realizados sobre un robot de la familia Scara para distintas posiciones en su espacio de trabajo y se discute la bondad de los ajustes obtenidos en el procedimiento aquí propuesto. Finalmente, se extraen algunas conclusiones de orden práctico.

## MODELO DEL ROBOT

En concordancia con la realidad física, se considera, por un lado, la unión del brazo del robot, transmisión y motores como la parte mecánica. Por otro lado, se debe incluir en el modelo las propiedades electromagnéticas de los motores. El modelo se divide, por tanto, en dos partes: una parte mecánica, donde se establecen las ecuaciones matemáticas que relacionan los pares y el movimiento de cada articulación, y una parte eléctrica, en la cual se relaciona la tensión de entrada a los accionadores con el par, la velocidad y la intensidad de la corriente de cada motor.

Con respecto a la parte mecánica, se presentan dos problemas básicos para el modelado:

- a) El acoplamiento no lineal del movimiento de todas las masas en el conjunto del robot debido a las fuerzas (centrífugas, de Coriolis y términos que dependen de la aceleración) que aparecen en los robots industriales.
- b) La dinámica de los reductores, en especial por la elasticidad y el rozamiento viscoso.

Los parámetros de la parte eléctrica se pueden determinar sin dificultad, ya sea a partir de catálogos suministrados por el fabricante o bien por mediciones directas; pero los parámetros de la parte mecánica presentan especiales dificultades para su determinación. Para ello, se realiza un proceso de identificación mediante la respuesta frecuencial del sistema integrado, midiendo experimentalmente la corriente del motor por medio de un transductor y la velocidad del motor cuando el servomotor es excitado con señales de tipo sinusoidal o aleatorias.

Para un nivel de señal dado, el sistema integrado se caracteriza por una función de respuesta en frecuencia linealizada, la cual se calcula mediante un analizador espectral FFT de señales grabando durante el ensayo tanto la señal de excitación como la señal de respuesta. Ello permite determinar con precisión los parámetros mecánicos del robot en forma indirecta a partir de ciertas funciones de transferencia identificadas ajustando los datos frecuenciales experimentales mediante los métodos de Levy (1959), Sananthanan y Koerner (1963) o el de Ford y Daly (1979). El lector interesado en los detalles de la aplicación y formulación de estos métodos puede consultar, por ejemplo, Feliu (1982).

Como aplicación práctica, se ha analizado un robot industrial de ensamblado de la familia Scara, denominado SEIRO R-65, cuyo aspecto general se ilustra en la Figura 1.

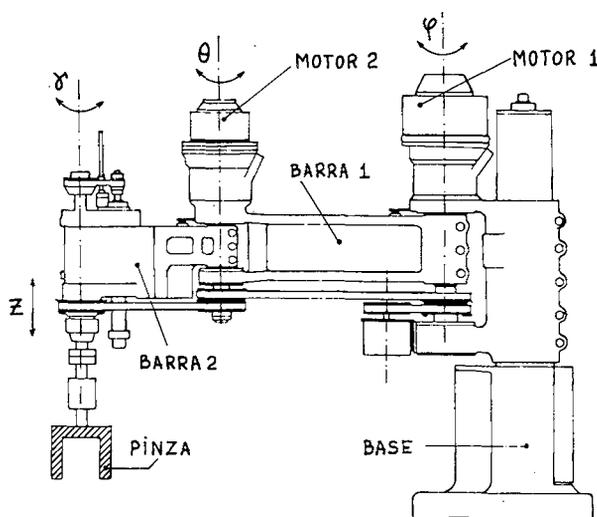


Figura 1. Aspecto general del robot Scara.

Dicho robot posee cuatro grados de libertad, siendo los más importantes los formados por las dos primeras articulaciones accionadas por sendos motores de corriente continua, y que son las que se toman en cuenta en el planteamiento de las ecuaciones dinámicas del robot. En la Figura 2 se muestra un diagrama esquemático formado por dos barras que pueden girar, una alrededor de un eje fijo (articulación 1) y la otra alrededor del extremo de la primera (articulación 2), estando verticales ambos ejes de giro.

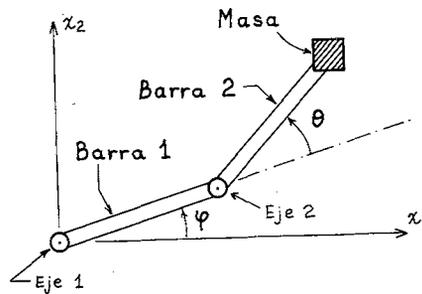


Figura 2. Diagrama esquemático del robot Scara.

Basándose en la formulación de Lagrange, se puede establecer un modelo mecánico del robot, tal como se puede ver en Feliu (1984), cuya forma matricial es

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{T}_m \quad (1)$$

donde

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \end{bmatrix} : \text{vector de ángulos de las articulaciones}$$

$$\mathbf{T}_m = \begin{bmatrix} T_{m1} \\ T_{m2} \end{bmatrix} : \text{vector de pares aplicados por los accionadores en cada dirección}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} I_4 + 2I_5 \cos \theta & I_3 + I_5 \cos \theta \\ I_3 + I_5 \cos \theta & I_6 \end{bmatrix} : \text{matriz de inercias}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix} : \text{matriz de coeficientes de rozamiento viscoso}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} (-2I_5 \sin \theta) \dot{\theta} \dot{\phi} - (I_5 \sin \theta) \dot{\theta}^2 \\ (I_5 \sin \theta) \dot{\phi}^2 \end{bmatrix} : \text{vector de coeficientes de efectos centrífugos y de Coriolis}$$

El modelo matemático de la parte mecánica muestra que el sistema multivariable resultante es no lineal y presenta un alto acoplamiento entre las articulaciones. Un problema importante en el establecimiento del modelo es la determinación de los distintos momentos de inercia y de los rozamientos.

En la obtención de las ecuaciones (1), el brazo es modelado como una interconexión de cuerpos rígidos. Existen movimientos no modelados causados por la flexibilidad de las articulaciones que conectan los sistemas de accionamiento con los miembros del brazo.

Mediante resultados experimentales se ha podido comprobar que los accionadores del robot tienen desplazamiento en serie con la carga, presentándose fenómenos de resonancia que han sido ignorados en muchas investigaciones en robótica (Paul, 1982; Brady, 1984; Craigh, 1986). La existencia de este comportamiento resonante influye decisivamente en el lazo de control del movimiento del robot, lo que motiva el análisis que se presenta más adelante.

En el desarrollo de las ecuaciones del modelo se supone que la velocidad de todas las partes en el sistema motor-carga es igual, esto es, el motor y la carga pueden ser aproximados por un sólo cuerpo. Esta suposición no refleja fielmente la realidad en sistemas de alto comportamiento, puesto que las partes mecánicas son elásticas y deflexionan bajo par. En consecuencia, las velocidades instantáneas de las distintas partes son diferentes. Esta condición da como resultado el fenómeno de resonancia torsional, siendo el más importante el que ocurre entre el motor y la carga.

Dado que el motor está acoplado al brazo del robot, parece razonable aproximar el sistema mecánico a dos cuerpos sólidos, acoplados por un eje de inercia despreciable. El sistema aproximado se muestra en la Figura 3 (Guillén, 1986).

El sistema de la Figura 3 puede ser descrito en forma matricial por la siguiente ecuación (Guillén, 1986):

$$\begin{bmatrix} L_a s + R_a & K_b s & 0 \\ -K_T & J_m s^2 + f s & J_L s^2 \\ 0 & f_1 s + K_1 & -(J_L s^2 + f_1 s + K_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a(s) \\ \theta_m(s) \\ \theta_L(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_a(s) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

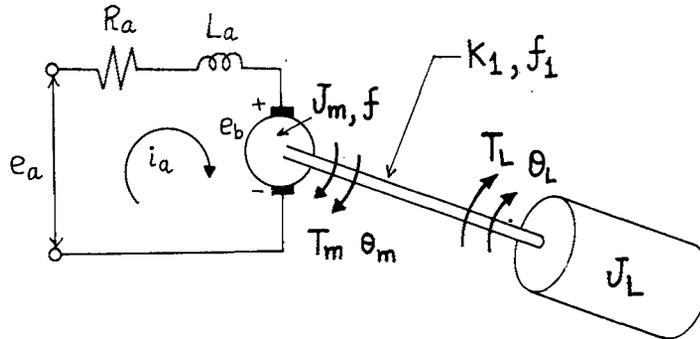
donde  $s$  es la variable compleja  $0 + iw$ . De esta ecuación se puede obtener la relación  $\frac{W(s)}{I_a(s)}$ , es decir

$$\frac{W(s)}{I_a(s)} = \frac{s\theta_m(s)}{I_a(s)} = \frac{K_T(J_L s^2 + f_1 s + K_1)}{(J_m s + f)(J_L s^2 + f_1 s + K_1) + J_L s(f_1 s + K_1)} \quad (3)$$

Manipulando la expresión anterior se obtiene:

$$\frac{W(s)}{I_a(s)} = \frac{K_T J_L s^2 + K_T f_1 s + K_T K_1}{J_m J_L s^3 + (J_m f_1 + J_L f + J_L f_1) s^2 + (J_m K_1 + f f_1 + J_L K_1) s + f K_1} \quad (4)$$

La ecuación (4) está constituida por un cociente de polinomios de variable compleja, el cual debe ajustarse lo mejor posible a las curvas experimentales que representan la



- $T_m$  = par desarrollado por el motor  
 $T_L$  = par de la carga  
 $e_a$  = tensión aplicada a la armadura del motor  
 $e_b$  = fuerza contraelectromotriz  
 $i_a$  = corriente de la armadura del motor  
 $R_a$  = resistencia de armadura  
 $L_a$  = inductancia de armadura  
 $\theta_m$  = desplazamiento angular del motor  
 $\theta_L$  = desplazamiento angular de la carga  
 $J_m$  = momento de inercia del motor  
 $J_L$  = momento de inercia de la carga  
 $f_1$  = coeficiente de fricción viscosa del eje  
 $K_1$  = constante de elasticidad del eje  
 $f$  = coeficiente de fricción viscosa equivalente del motor y la carga, referido al eje del motor  
 $K_T$  = constante de par del motor

Figura 3. Modelo dinámico del sistema motor-carga.

amplitud y el ángulo de fase de la respuesta frecuencial del robot (véanse Figuras 5 a 8). El apropiado ajuste de la expresión (4) a los datos experimentales constituye un punto de singular importancia en la identificación de parámetros del robot.

## OBTENCION DE LA RESPUESTA FRECUENCIAL DEL ROBOT

Por razones de claridad en la exposición, se incluye aquí un breve resumen del método que se sigue para determinar experimentalmente los parámetros mecánicos del robot.

La función que caracteriza la respuesta en frecuencia del robot se determina experimentalmente y se representa en diagramas semilogarítmicos de Bode (véanse Figuras 5 a 8). Las dos mayores fuentes de efectos no lineales son debidas a las variaciones geométricas y las no linealidades en el sistema de transmisión. El efecto de las citadas variaciones geométricas fue observado ensayando el robot en tres posiciones distintas, a saber: una primera posición con el brazo completamente estirado; la segunda con el brazo en una posición intermedia y una tercera posición con el brazo completamente encogido. Estas posiciones abarcan el rango del espacio de trabajo del robot esperado en aplicaciones prácticas. Todas las respuestas en frecuencia se midieron en bucle cerrado de regulación de velocidad y de intensidad de la corriente. Por otro lado, cuando se analiza una articulación, la otra se obliga a permanecer inmóvil.

En primer lugar, se obtuvo la respuesta en frecuencia que relaciona la velocidad angular  $W(s)$  o señal de salida con respecto a la tensión de referencia  $E_r(s)$  o señal de entrada, es decir,  $\frac{W(s)}{E_r(s)}$ . En segundo lugar, se obtuvo la respuesta en frecuencia que relaciona la intensidad de la corriente  $I_a(s)$  o señal de salida con respecto a la tensión de referencia  $E_r(s)$  o señal de entrada, es decir,  $\frac{I_a(s)}{E_r(s)}$ .

A partir de las dos respuestas en frecuencia anteriores se calculó la función de transferencia que relaciona la velocidad angular  $W(s)$  o señal de salida con respecto a la intensidad de la corriente  $I_a(s)$  o señal de entrada, es decir,  $\frac{[\frac{W(s)}{E_r(s)}]}{[\frac{I_a(s)}{E_r(s)}]} = \frac{W(s)}{I_a(s)}$ . Estos cálculos se realizaron para las dos articulaciones del robot (véase Figura 2).

### IDENTIFICACION DE LOS PARAMETROS DEL ROBOT

En este apartado se propone la aplicación de técnicas de optimización numérica para la mejor identificación de los parámetros del robot. En el contexto de la robótica industrial —disciplina relativamente reciente—, la determinación de dichos parámetros se realiza ajustando los datos experimentales mediante los conocidos métodos de Levy (1959), Sanathanan y Koerner (1963) y Ford y Daly (1979), como puede verse, por ejemplo, en Feliu (1982). Adicionalmente, en el libro de Borrie (1986) puede encontrarse una discusión específica acerca del ajuste de funciones de transferencia complejas en robótica, mediante métodos como, por ejemplo, el propuesto por Rosenbrock (1960). En el conocimiento de los autores y salvo los precitados intentos, no se encuentran en la literatura técnica otras propuestas para el ajuste de funciones que deben ser expresadas como cociente de polinomios complejos.

En este estudio se han observado que tales métodos, si bien producen resultados aproximados a los datos experimentales, presentan dificultades para ajustar razonablemente los efectos de la resonancia, descritos en los apartados anteriores. Así pues, uno de los objetivos de este trabajo consiste en la obtención del ajuste óptimo a los datos experimentales, a partir de soluciones iniciales producidas por los métodos previamente citados.

La función de transferencia  $\frac{W(s)}{I_a(s)}$  representada por la expresión (4) puede ser reescrita como:

$$F(s, \alpha) = \frac{W(s)}{I_a(s)} = \frac{\alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3}{\alpha_4 s^3 + \alpha_5 s^2 + \alpha_6 s + \alpha_7} \quad (5)$$

siendo  $s$  la variable compleja  $0 + iw$  y donde los coeficientes  $\alpha_j$  deben ser obtenidos de forma que la expresión anterior se ajuste lo mejor posible a los datos experimentales.

Se introduce una función de error cuya expresión es:

$$E = \int_{s_0}^{s_n} [F^e(s) - F^c(s, \alpha)]^2 \psi(w) ds \quad (6)$$

donde  $F^e(s)$  expresa la función obtenida experimentalmente,  $F^c(s, \alpha)$  es la función interpolada (o calculada) y  $\psi(w)$  es una función de ponderación arbitraria, real y

definida positiva sobre  $[s_0, s_n]$ .

La idea consiste en minimizar el error cometido al ajustar una función de transferencia  $F^c(s, \alpha)$  sobre todo el intervalo de las mediciones experimentales. Utilizando una regla de aproximación trapezoidal para la integral (6), se puede escribir la función objetivo a minimizar como:

$$F(\alpha) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n [(F^e(s_i) - F^c(s_i, \alpha))^2 (\log w_{i+1} - \log w_{i-1}) \cdot \psi(w_i)] + [(F^e(s_0) - F^c(s_0, \alpha))^2 (\log w_1 - \log w_0) \cdot \psi(w_0) + (F^e(s_n) - F^c(s_n, \alpha))^2 (\log w_n - \log w_{n-1}) \cdot \psi(w_n)] \right] \quad (7)$$

donde  $\alpha$  es el vector de variable a optimizar, la cantidad  $(\log w_{i+1} - \log w_{i-1})$  representa la base del trapecio  $i$  en las gráficas de Bode (véase figuras 5 a 8) y  $n$  es el número de medidas experimentales de que se dispone. El término "log" expresa "logaritmo base decimal".

Las mediciones experimentales obtenidas mediante un analizador espectral FFT proporcionan directamente los valores de la amplitud de la señal de salida expresados en decibelios "dB" y los valores del ángulo de fase entre las señales de entrada y de salida expresados en grados. La Figura 4 muestra un diagrama de Bode construido a partir de las mediciones anteriormente señaladas.

El analizador espectral produce valores en decibelios que se relacionan con la magnitud del módulo adimensional de la manera siguiente:

$$\text{Decibelios} = 20 \cdot \text{Log} |(\text{Módulo})^e| \quad (8)$$

con lo que, el módulo buscado queda:

$$(\text{Módulo})^e = 10^{(\text{Decibelios}/20)} \quad (9)$$

Por otro lado, de la función interpolada  $F^c(s, \alpha)$  se pueden obtener los valores de la amplitud y ángulo de fase. Así, se tiene que:

$$(\text{Módulo})^c = [Re\{F^c(s, \alpha)\}^2 + Im\{F^c(s, \alpha)\}^2]^{1/2} \quad (10)$$

$$(\text{Fase})^c = \tan^{-1} \left[ \frac{Im\{F^c(s, \alpha)\}}{Re\{F^c(s, \alpha)\}} \right] \quad (11)$$

Si se realiza el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} x^e &= (\text{Módulo})^e \cdot \cos(\text{Fase})^e \\ y^e &= (\text{Módulo})^e \cdot \text{sen}(\text{Fase})^e \end{aligned} \quad (12)$$

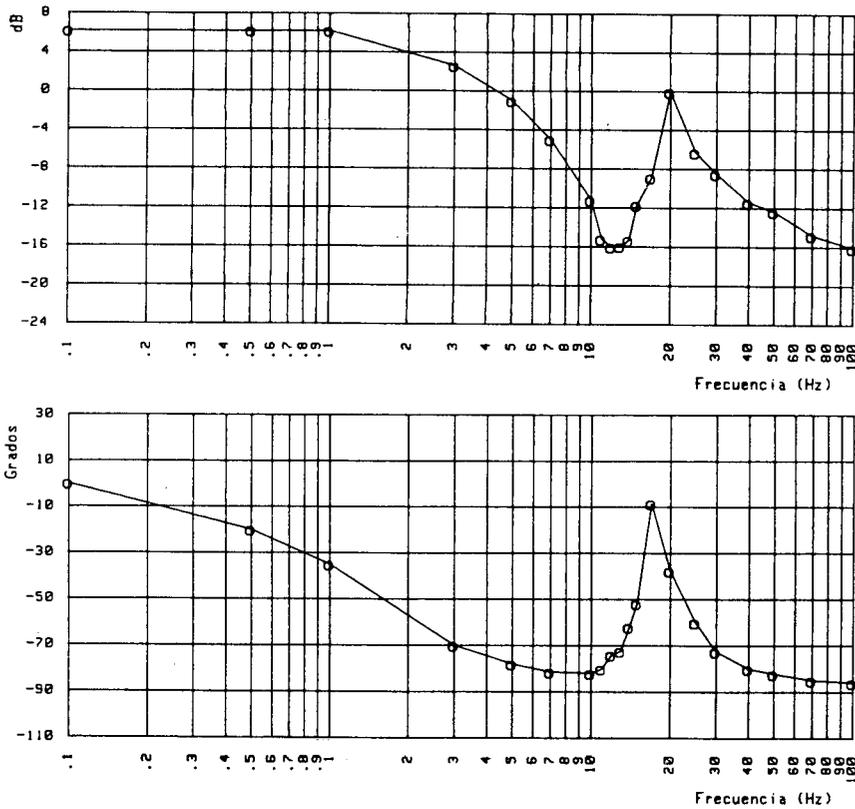


Figura 4. Representación en diagramas de Bode:  
 Superior: Amplitud (decibelios) de  $F(s)$ .  
 Inferior: Angulo de fase (grados) de  $F(s)$ .

y se observa que

$$\begin{aligned}
 (\text{Módulo})^c * \cos(\text{Fase}^c) &= \text{Re}[F^c(s, \alpha)] \\
 (\text{Módulo}) * \text{sen}(\text{Fase}^c) &= \text{Im}[F^c(s, \alpha)]
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

la expresión del error local puede reescribirse como:

$$e_i^2 = (x_i^e - \text{Re}[F^c(s_i, \alpha)])^2 + (y_i^e - \text{Im}[F^c(s_i, \alpha)])^2
 \tag{14}$$

La expresión (14) permite evaluar simultáneamente el error cometido tanto en el ajuste del módulo como en el ajuste del ángulo de fase. También fueron investigadas otras expresiones para la evaluación del error de interpolación como la sumatoria de los módulos de la diferencia entre la función experimental y la función calculada, de tal manera que

$$E = \int_{s_0}^{s_n} |F^e(s) - F^c(s, \alpha)| \psi(w) ds \quad (15)$$

Sin embargo, aún cuando en algunos casos se obtuvieron resultados algo mejores que los proporcionados por la expresión (6), en la mayoría de las aplicaciones estudiadas en este trabajo el comportamiento de la expresión (6) para calcular el error global ha sido superior al error basado en el módulo de la diferencia propuesto en la expresión (15). Por otro lado, están siendo estudiadas formas alternativas de evaluar el error numérico de la interpolación que permitan tomar en cuenta aspectos específicos como fenómenos de resonancia torsional observados entre las frecuencias de 15 Hz a 25 Hz (ver Figuras 5 a 8).

La función calculada  $F^c(s, \alpha)$  presenta expresiones sumamente complicadas, lo que complica notablemente la obtención de expresiones explícitas de sus gradientes con respecto a los coeficientes  $\alpha_j$ . Esto constituye un inconveniente ya que es conocido que los métodos de optimización que trabajan en base a los gradientes de la función son más eficaces en la mayoría de las aplicaciones que los métodos que optimizan la función sin tomar en cuenta la información de sus derivadas. En el caso que nos ocupa, si bien la obtención de expresiones cerradas de los gradientes de la función  $F^c(s, \alpha)$  es muy complicada y no viable para fines prácticos, éstos podrían ser calculados mediante técnicas aproximadas como, por ejemplo, diferencias finitas u otros métodos numéricos. Sin embargo, la función  $F^c(s, \alpha)$  presenta un comportamiento altamente irregular y es sensible a variaciones relativamente pequeñas de las variables involucradas ( $\alpha_i$ ). Como es conocido (Crandall, 1956; Fox, 1971), la obtención de los gradientes aproximados precisa de la evaluación previa del paso a utilizar ( $\Delta\alpha_i$ ), siendo necesario calcular la expresión del gradiente aproximado con varias magnitudes de  $\Delta\alpha_i$  hasta obtener un valor razonablemente satisfactorio, sobre todo en funciones con evoluciones "no suaves" de los gradientes. Una discusión más completa de este punto puede encontrarse en la obra de Crandall (1956). Esta es una de las razones por las cuales se ha preferido trabajar con métodos que sólo requieren la evaluación de la función, aún cuando se reconoce que es necesario realizar investigaciones adicionales orientadas hacia una posible utilización futura de métodos tipo gradiente.

Así pues, se ha optado por utilizar algoritmos de optimización que sólo requieren de la expresión de la función  $F^c$ . De entre los métodos evaluados en este trabajo, el método de las direcciones conjugadas de Powell (1964) es el que mejores resultados ha proporcionado en este contexto. También han sido investigados otros métodos de búsqueda de mínimos como son la exploración aleatoria y los métodos de direcciones fijas, los cuales, aún cuando producen resultados satisfactorios, no resultan tan óptimos como el de las direcciones conjugadas de Powell. Por otro lado, también se está investigando sobre la posibilidad de aplicar los prometedores algoritmos genéticos o de selección biológica, que permiten optimizar funciones sumamente complejas (Goldberg y Lingle, 1985; Goldberg, 1986). Estos recientes algoritmos efectúan la optimización de la función a partir de una población aleatoria de puntos de partida (individuos) y mediante una terna de operadores genéticos, conocidos como Reproducción, Cruce y Mutación. Se produce, entonces, el desarrollo de nuevas generaciones de "individuos

más aptos" que sobreviven en la población y, por tanto, exhiben las características deseadas para satisfacer la función objetivo.

El método de Powell optimiza la búsqueda del mínimo de una función definida en un espacio  $n$ -dimensional mediante la utilización de ciertas direcciones de búsqueda, denominadas direcciones conjugadas, en combinación con algoritmos auxiliares de minimización cuadrática unidimensional. La demostración matemática de la existencia de tales direcciones conjugadas puede verse, por ejemplo, en Powell (1964) y Fox (1971).

La minimización cuadrática unidimensional, también conocida como interpolación cuadrática (Fox, 1971) consiste en calcular, para una determinada dirección de búsqueda, la longitud incremental de avance que produzca el valor mínimo de la función objetivo en esta dirección.

Por otro lado, es bien conocido que el criterio de parada en métodos de optimización presenta considerables problemas de tipo numérico en el computador. El criterio adoptado en este trabajo es el sugerido por Powell y consiste en evaluar las variaciones producidas en todas las componentes del vector de variables entre dos iteraciones. Si las variaciones en cada dirección son menores que una cierta tolerancia prescrita, entonces se considera que ha habido convergencia y se detiene el proceso de búsqueda. En nuestro caso, esta tolerancia ha sido fijada en 1%, lo cual resulta suficientemente preciso para propósitos prácticos.

El punto de partida de los métodos de búsqueda requiere también de considerable atención si se desea obtener una optimización razonable. Es decir, se debe evitar la convergencia falsa hacia mínimos locales o "puntos silla". En nuestro caso, el punto de partida se ha tomado igual a la solución proporcionada por el método de Sanathanan y Koerner (1963), por considerar que ésta constituye una aproximación razonable del óptimo buscado y, eventualmente, incrementa la probabilidad de excluir posibles mínimos locales conflictivos en su entorno.

Con respecto a la función de ponderación  $\psi(w)$ , se han probado diversas funciones continuas definidas positivas sobre el intervalo de mediciones experimentales. Sin embargo, la alternativa más sencilla y que funciona satisfactoriamente ha sido la de definir  $\psi(w)$  constante por trozos. Esto disminuye el tiempo de computador y permite controlar más eficazmente aquellas regiones que se desee ajustar mejor que otras. Típicamente, se ha tomado un valor de  $\psi(w)$  situado entre 1 y 5 en la región anterior a la resonancia (véanse Figuras 5 a 8) y valores entre 3 y 5 veces mayores en la zona de resonancia. Este criterio, si bien es totalmente empírico, tiene su justificación intuitiva en el hecho de que las zonas más problemáticas para ser ajustadas resultan ser aquellas donde se presentan los fenómenos de resonancia, mientras que la región inicial del intervalo de mediciones experimentales exhibe, habitualmente, un comportamiento "suave" y por tanto fácil de ajustar numéricamente.

En el código de ordenador aquí desarrollado, el usuario introduce los  $n$  valores experimentales por triplas de puntos, es decir,  $w$  (hertzios), módulos (decibelios) y ángulo de fase (grados). Adicionalmente, debe proporcionar los coeficientes de la función de transferencia  $F^c(s, \alpha)$  obtenida con cualquiera de los métodos ya citados (Levy, Sanathanan y Koerner, etc.) y un primer estimado de la función de ponderación  $\psi(w)$ . Dicho código está estructurado de forma interactiva. Es decir, cuando se ha obtenido una función de transferencia  $F^c(s, \alpha)$  óptima mediante la técnica de

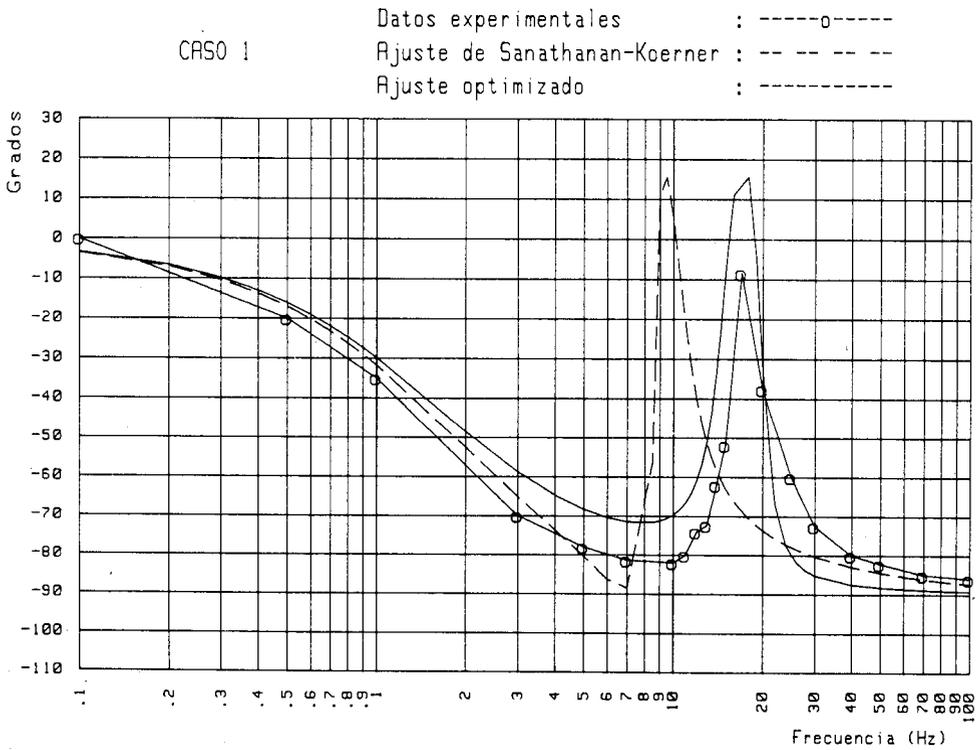
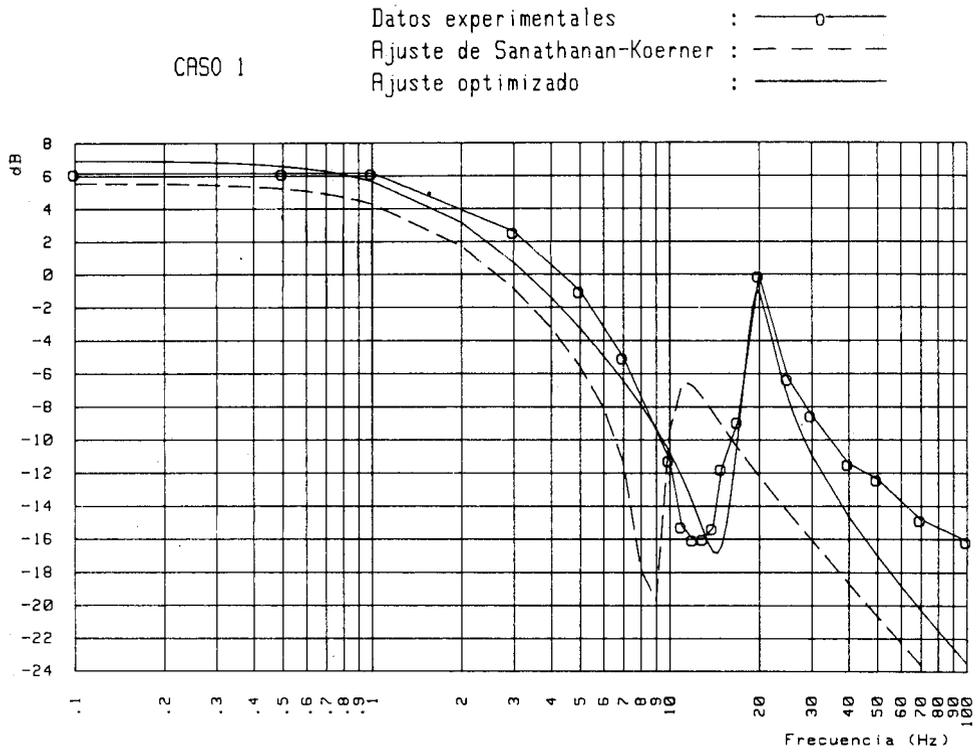


Figura 5. Comparación curvas experimentales vs. modelo matemático: posición totalmente estirada sin carga.

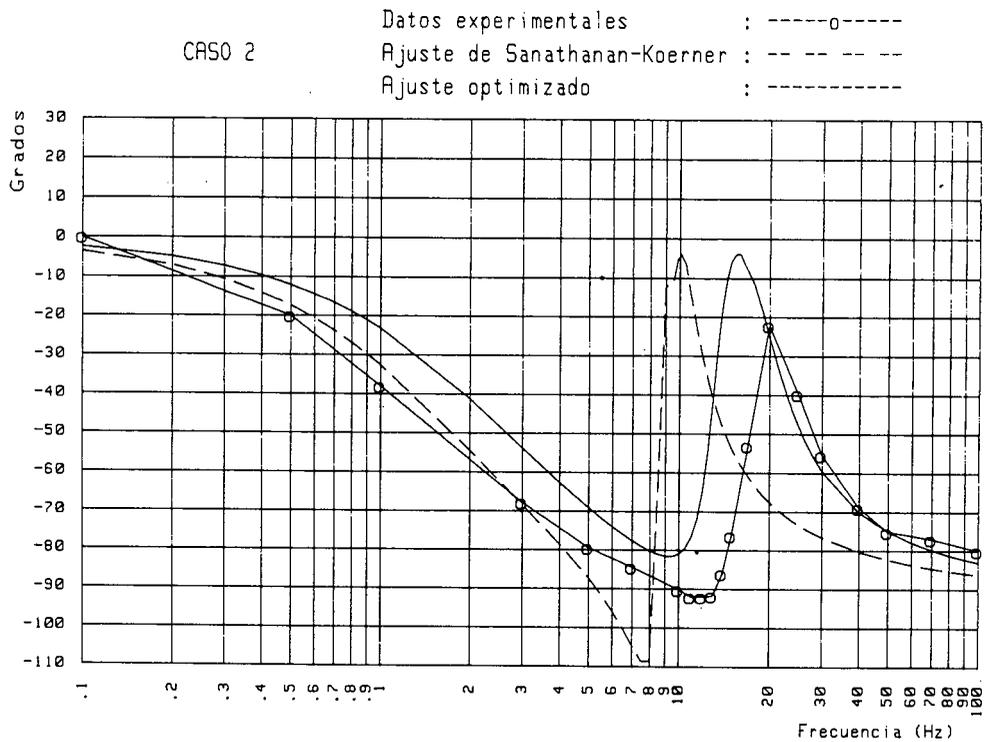
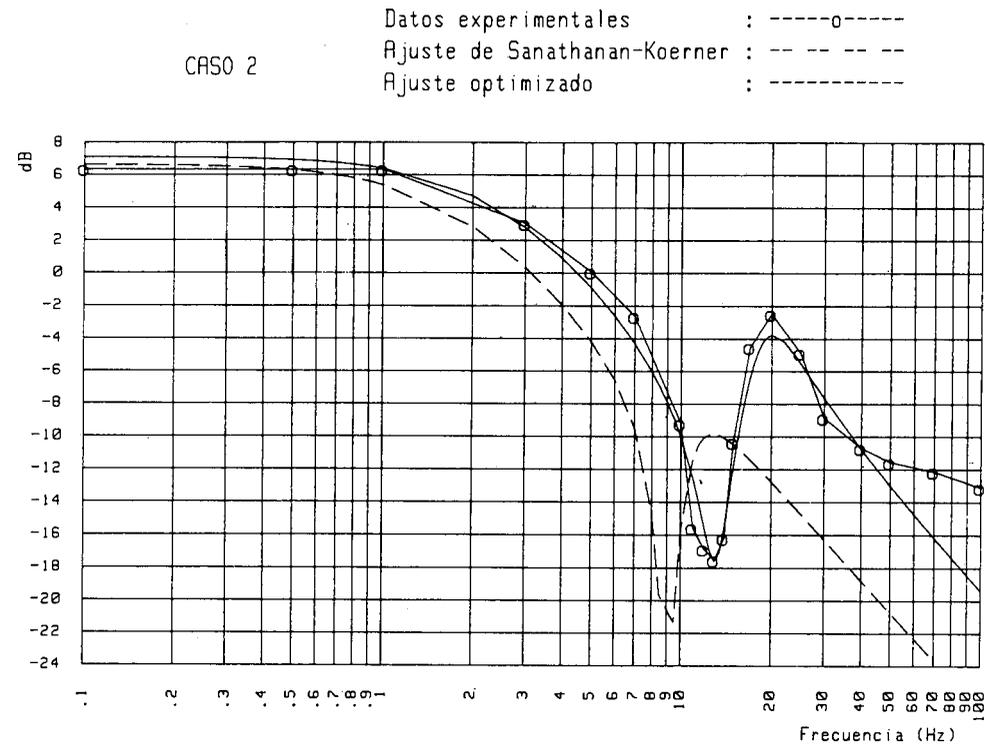


Figura 6. Comparación curvas experimentales vs. modelo matemático: posición intermedia sin carga.

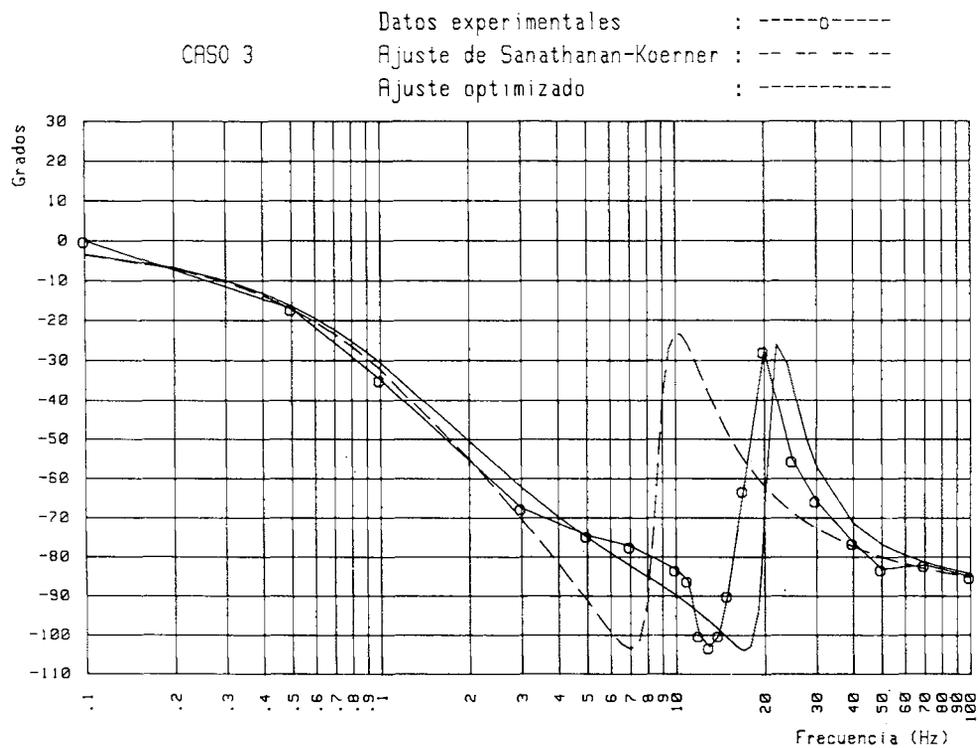
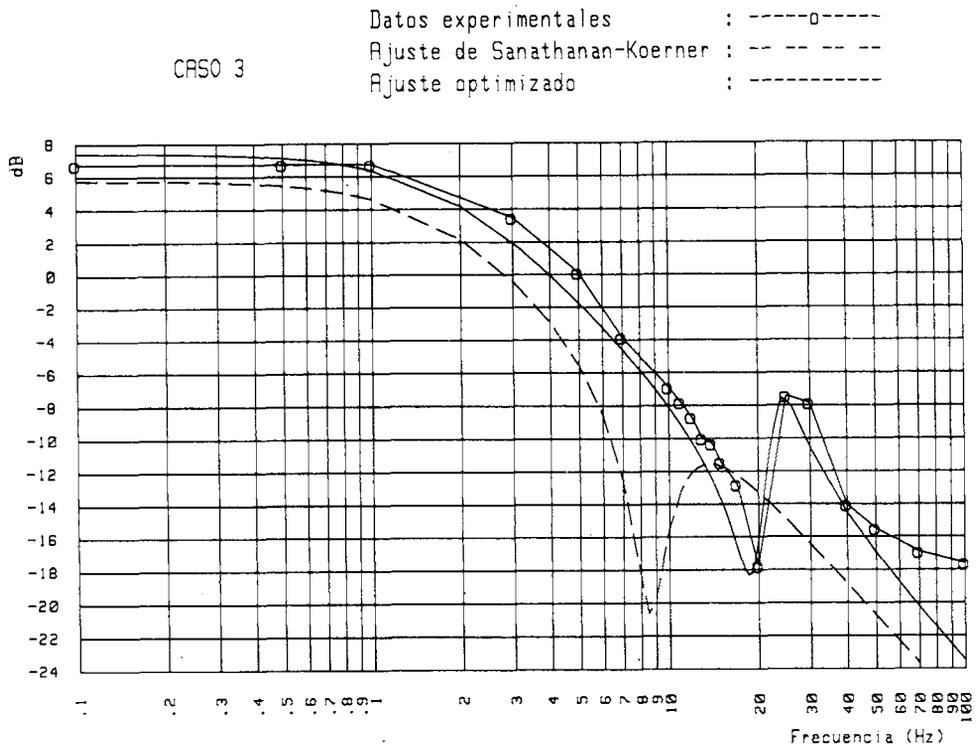


Figura 7. Comparación curvas experimentales vs. modelo matemático: posición totalmente encogida sin carga.

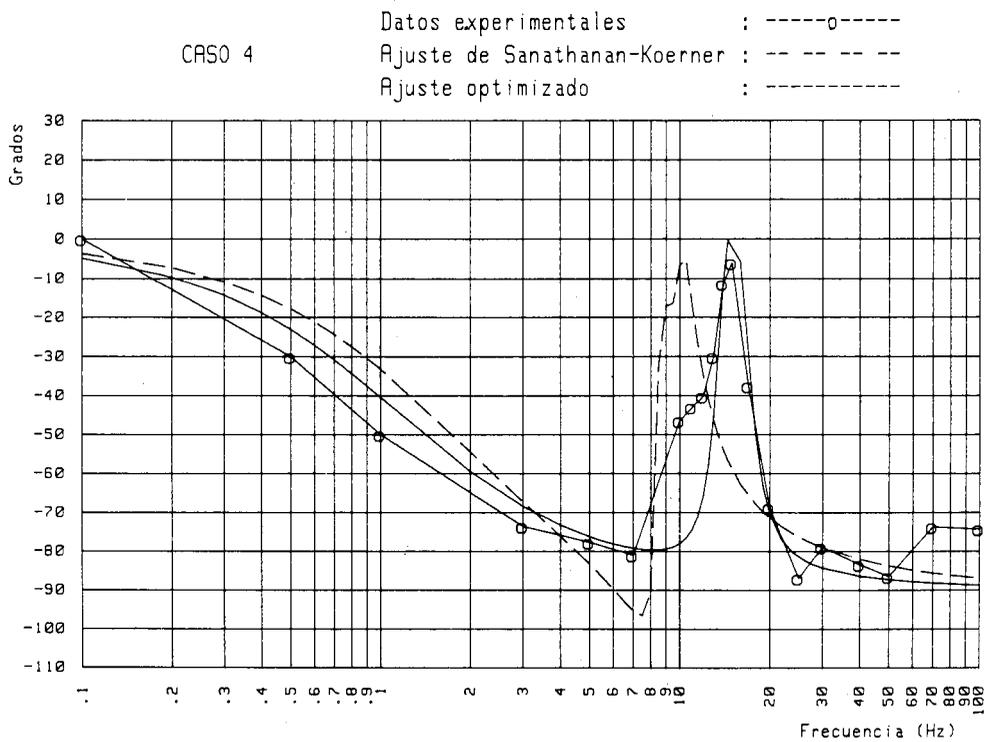
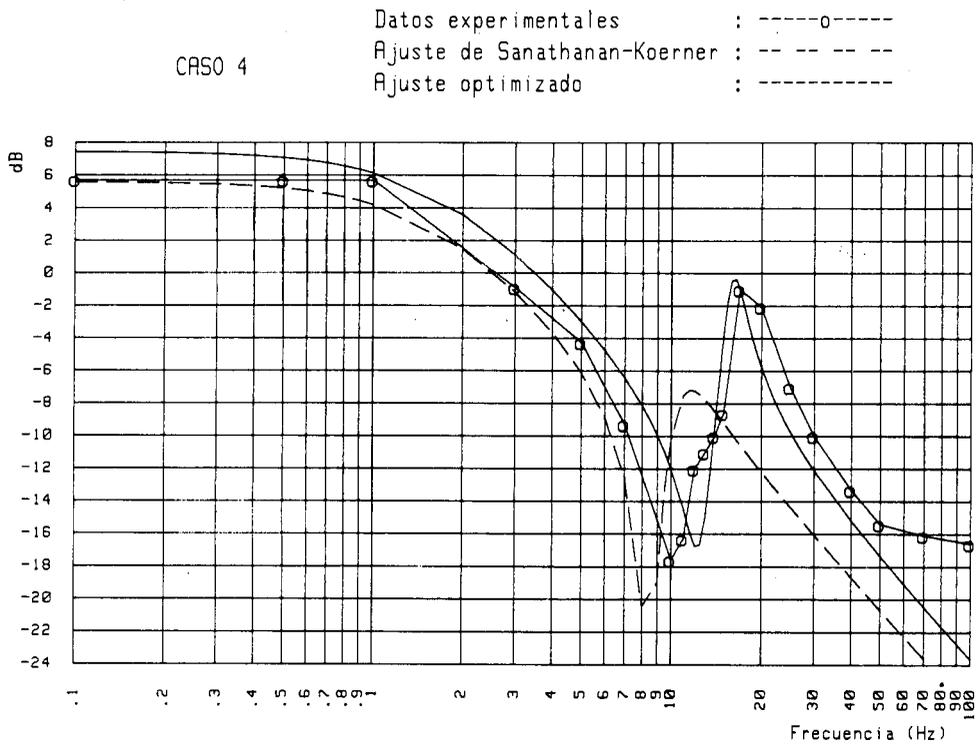


Figura 8. Comparación curvas experimentales vs. modelo matemático: posición totalmente estirada con carga.

optimización numérica descrita, el usuario obtiene los correspondientes diagramas de Bode, donde aparecen tanto la curva experimental como la función interpolada. Si se desea obtener un nuevo ajuste, se pueden variar los valores de la función de ponderación  $\psi(w)$  y así generar una nueva  $F^c(s, \alpha)$ . Esta característica interactiva tiene la ventaja de que el usuario tiene un control más efectivo sobre la bondad del ajuste numérico efectuado.

En el apartado siguiente se presentan algunos ejemplos numéricos, relativos a la primera articulación del robot, que demuestran la precisión obtenida con el procedimiento propuesto.

### CASOS ANALIZADOS: DISCUSION DE RESULTADOS

Con la finalidad de evaluar la flexibilidad y precisión del método propuesto, se han estudiado tres diferentes posiciones del brazo del robot, las cuales abarcan el rango de espacio de trabajo del mismo en las aplicaciones prácticas. Se realizó la identificación de la articulación 1 (véase Figura 2), dejando fija la orientación relativa de la barra 2 con respecto a la barra 1.

Asimismo, los casos que aquí se presentan se refieren únicamente al eje 1, dado que es en esa articulación donde se presentan los fenómenos de resonancia. La identificación de la articulación 2 no ofreció prácticamente problemas numéricos al no ser detectado ningún fenómeno de resonancia, obteniéndose curvas experimentales de evolución muy "suave". En efecto, la función de transferencia  $F(s, \alpha)$  para esta articulación responde a la expresión

$$F(s, \alpha) = \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_2 s}$$

en la cual, la determinación de las dos constantes  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  no reviste ninguna dificultad y puede realizarse mediante procedimientos tradicionales.

Las gráficas que se presentan a continuación están identificadas en función del número del caso analizado, de acuerdo a la siguiente leyenda:

CASO 1: Posición del brazo totalmente estirada sin carga (ángulo  $\theta = 0^\circ$ .)

CASO 2: Posición del brazo intermedia sin carga (ángulo  $\theta = 90^\circ$ )

CASO 3: Posición del brazo totalmente encogida sin carga (ángulo  $\theta = 150^\circ$ .)

CASO 4: Posición del brazo totalmente estirada con una carga de 6 kg. en el extremo de la barra 2 (ángulo  $\theta = 0^\circ$ .)

En todos los casos estudiados, se realizaron medidas experimentales previas, las cuales se recogen en las Figuras 5 a 8 identificadas con pequeños círculos. Posteriormente, fue realizado un ajuste preliminar con el método Sanathanan y Koerner (en adelante, método de S-K) previamente citado, cuyo resultado se incluye con

propósitos comparativos y queda identificado en las Figuras 5 a 8 con líneas de trazos.

La solución proporcionada por el método S-K se utilizó como punto de partida para realizar el proceso de optimización mediante el método de Powell, descrito anteriormente. La solución así obtenida se muestra en las Figuras 5 a 8 identificada con líneas continuas.

Como puede observarse, en todos los casos se han encontrado funciones de transferencia  $F(s)$  considerablemente mejor ajustadas a las mediciones experimentales que las obtenidas con el método de S-K. Las zonas donde se presentan los fenómenos de resonancia, en nuestro caso a partir de frecuencias mayores de aproximadamente 15 Hz. hasta 25 Hz., han sido notablemente mejor interpoladas, observándose que los valores pico en magnitud y fase coinciden razonablemente bien dentro de la incertidumbre que acompaña a fenómenos de esta naturaleza.

La Tabla I contiene los valores de los coeficientes  $\alpha_i$  iniciales y optimizados para todos los casos analizados. Puede notarse que algunos valores optimizados difieren notablemente de los valores iniciales proporcionados por el método de S-K, utilizados como punto de partida del proceso de optimización.

CASO		$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$
1	$\alpha_{\text{inic}}$	4.600	2.497	342.380	.440	5.235	110.760	179.860
	$\alpha_{\text{opt}}$	1.516	5.873	337.150	.231	1.189	89.891	151.424
2	$\alpha_{\text{inic}}$	4.840	1.642	377.080	.350	6.832	109.750	175.230
	$\alpha_{\text{opt}}$	2.822	7.249	490.040	.266	3.006	95.723	216.110
3	$\alpha_{\text{inic}}$	3.920	6.901	340.400	.650	10.030	110.250	175.330
	$\alpha_{\text{opt}}$	4.631	18.524	1706.580	.704	5.576	389.437	725.931
4	$\alpha_{\text{inic}}$	3.800	2.324	331.380	.300	5.845	112.350	173.540
	$\alpha_{\text{opt}}$	3.596	8.574	563.890	.553	2.504	143.403	239.475

TABLA I.

Por su lado, la Tabla II recoge algunos parámetros típicos del proceso de optimización como son el error inicial —obtenido con los valores proporcionados por el método de S-K— y el error final del proceso de búsqueda obtenido con los valores optimizados. La tercera columna refleja el número de iteraciones necesarias en el

método de Powell hasta llegar a la convergencia. En la gran mayoría de los casos aquí estudiados y debido a la razonable aproximación inicial que produce el método de S-K, este número no sobrepasó los 10 ciclos de Powell.

CASO	ERROR INICIAL	ERROR FINAL	NUMEROS CICLOS DE POWELL	NUMERO EVALUACIONES DE LA FUNCION
1	4.04	1.09	10	943
2	4.94	1.69	9	1006
3	4.19	1.01	6	692
4	4.23	1.26	9	928

TABLA II.

La cuarta columna de la Tabla II contiene el número de evaluaciones de la función objetivo (expresión (6)) necesarias para alcanzar la convergencia. En términos generales, se puede decir que cada ciclo iterativo de Powell requirió de aproximadamente unas 100 evaluaciones de la función objetivo. No obstante, aún cuando este número de evaluaciones por ciclo da una visión global del esfuerzo computacional requerido, no constituye un parámetro útil por sí solo ya que el proceso de minimización cuadrática precisa de un mayor número de evaluaciones de la función objetivo en algunas direcciones de búsqueda cuyos gradientes varían más fuertemente que en otras direcciones menos conflictivas.

Se ha observado que la rama final de las curvas, en particular la correspondiente a las magnitudes, se separa de la curva experimental. Aún cuando no se tiene todavía una justificación suficientemente rigurosa para este hecho, se puede estimar que se debe, básicamente, a la imposibilidad que presenta la función  $F(s)$  (ecuación (5)) de ajustar la curvatura de la rama de bajada mencionada. Posiblemente, si se dispusiera de un mayor número de puntos experimentales de medición, se conseguiría que el método ajustase mejor la función  $F(s)$  en esta zona.

En los casos 1 y 2 se apreció que el ajuste de la magnitud fue de mayor calidad que el correspondiente a la fase, aún cuando este último presentó una notable mejora al ser comparado con el producido por el método de S-K.

También se realizaron intentos para obtener mejores ajustes extrapolando ficticiamente la rama final de las citadas curvas, sin conseguirse mejora apreciable en los resultados. Adicionalmente, resulta prácticamente imposible obtener mediciones más allá de los 100 Hz, debido a las propias limitaciones físicas del robot.

## CONCLUSIONES

Se observa que el comportamiento dinámico real del robot presenta fenómenos de resonancia mayores en la primera articulación que en la segunda, ya que la carga inercial para el primer accionador es muy superior a la del segundo, de acuerdo con la configuración del brazo.

Los modelos matemáticos obtenidos con el procedimiento propuesto se han ajustado satisfactoriamente a los datos experimentales en el dominio de la frecuencia. En todos los casos analizados, se obtuvo una precisión en el ajuste numérico considerablemente superior que la obtenida con el método de Sanathanan y Koerner. Sin embargo, se reconoce que aún quedan por justificar más rigurosamente algunas irregularidades detectadas en ciertas zonas de las gráficas presentadas, como lo es la evidente dificultad que presenta la función de transferencia calculada para ajustarse a la rama final en las gráficas correspondientes a la magnitud.

Con respecto a la convergencia del método propuesto puede decirse que, si bien en todos los casos estudiados se obtuvo convergencia hacia soluciones mejoradas, en algunos de ellos fue necesario experimentar con el empleo de valores diferentes de la función de ponderación para mejorar aún más el ajuste polinómico. Este hecho pone de manifiesto la necesidad de estudiar en más detalle la influencia de la función de ponderación sobre el método de ajuste, especialmente en las zonas de resonancia torsional del brazo del robot.

Es de hacer notar aquí que los modelos matemáticos obtenidos han significado un destacado avance en lo que se refiere al posterior diseño de los reguladores y, como consecuencia directa, en la reducción sustancial de vibraciones indeseables en los movimientos del brazo y en la obtención de una mayor precisión y rapidez en el comportamiento dinámico del robot.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores deben expresar su agradecimiento al Instituto de Cooperación Iberoamericana (ICI, España) y al Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico (CDCH, Venezuela) por el apoyo prestado para la realización de parte de este trabajo.

## REFERENCIAS

1. J. Borrie, "Modern Control System: A Manual of Design Methods", Prentice-Hall, (1986).
2. M. Brady, "Robot Motion: Planning and Control", MIT Press, (1984).
3. J.J. Craig, "Introduction to Robotics: Mechanics & Control", Addison Wesley, (1986).
4. S.H. Crandall, "Engineering Analysis - A survey of numerical procedures", Mc. Graw-Hill, Nueva York, (1956).
5. V. Feliu, "Diseño automático con computador de sistemas discretos de control multivariables", Tesis Doctoral, ETSII Madrid, (1982).
6. V. Feliu y E. Carrizosa, "Modelado e identificación del comportamiento dinámico de un robot de ensamblado", Proc. II Simposio Nac. de la IFAC sobre Aut. Ind., Zaragoza, (1984).

7. R. Fletcher, "Function Minimization without Evaluating Derivatives-A Review", *Computer J.*, Vol. 8 (1), pp. 33-41, (1965).
8. M.P. Ford y K.C. Daly, "Dominance improvement by pseudo-decoupling", *Proc. IEE*, Vol. 126, pp. 12, (1979).
9. R.L. Fox, "*Optimization Methods for Engineering Design*", Addison Wesley, (1971).
10. D.E. Goldberg y R.L. Lingle, "Alleles, Loci and the travelling salesman problem", *Proc. of an International Conf. on Genetic Algorithms and Their Applic.*, Grefenstette J. (Editor), pp. 154-159, Pittsburgh, (1985).
11. D.E. Goldberg y M. Samtani, "*Engineering Optimization via Genetic Algorithms*", Electronic Computations, (1986).
12. A. Guillén, "Estudio del comportamiento en frecuencia de robots industriales. Efecto de la torsión", *Tesis de Maestría*, ETSII, Madrid, (1986).
13. A. Guillén, C. Cerrada y V. Feliu, "Estudio del comportamiento dinámico de robots industriales mediante técnicas frecuenciales", *Proc. II Congreso Mundial del País Vasco*, España, (1987).
14. E.C. Levy, "Complex-curve fitting", *IRE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-4, pp. 37-44, (1959).
15. A. Liegeois, E. Dombre y P. Borrel, "Learning and Control for a Compliant Computer-controlled manipulators", *IEEE, Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-25, 6, pp. 1097-1102, (1980).
16. R.C. Paul, "Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control", *MIT press*, (1982).
17. M.J. Powell, "An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives", *Computer Journal*, Vol. 7 (4), pp. 155-162, (1964).
18. M.J. Powell, "An iterative method for finding stationary values of a function of several variables", *Computer Journal*, Vol. 5 (2), pp. 147-151, (1962).
19. H.H. Rosenbrock, "Automatic Method for finding the Greatest or Least value of a function", *Computer Journal*, Vol. 3 (3), pp. 175-184, (1960).
20. C.K. Sanathanan y J. Koerner, "Transfer function synthesis as a ratio of two complex polynomials", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-8, pp. 56-58, (1963).
21. H.W. Stone y C.P. Neuman, "Dynamic modeling of the three degree-of-freedom robotic manipulator", *IEEE Trans. on System, Man & Cybernetics*, Vol. SMC-14, pp. 4, (1984).
22. W.H. Sunada y S. Dubowsky, "On the dynamic analysis and behaviour of industrial robotic manipulators with elastic members", *ASME Journal of Mech., Trans. & A. Design*, Vol. 105, pp. 1, (1983).
23. M. Vukobratovic y P. Potkonjak, "*Dynamics of manipulation robots: Theory and Application*", Springer-Verlag, Berlin, (1982).
24. W.I. Zangwill, "Minimizing a Function without calculating derivatives", *Computer Journal*, Vol. 10 (3), pp. 293-296, (1967).