

UNA GENERACION ENERGETICA DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO EN LAMINAS DE LOVE-KIRCHHOFF

S. MONLEON
J.F. MOYA
J. CASANOVA
y
P. FUSTER

*Departamento de Mecánica de los Medios
Continuos y Teoría de las Estructuras
Universidad Politécnica de Valencia*

RESUMEN

Un problema clásico de la teoría de láminas de Love-Kirchhoff (lámina sin deformación transversal) reside en la correcta definición de las condiciones de contorno estáticas. Después de una serie de artículos principalmente dedicados a la presentación de teorías de láminas completas^{6,7,8}, los autores exponen la obtención de las condiciones de contorno asociadas a una teoría incompleta como la de Love-Kirchhoff, denominada CTO en el texto, a partir de una formulación energética consistente con los trabajos anteriores.

SUMMARY

A classical problem in Love-Kirchhoff shell theory stays in statical boundary conditions definition. Following some papers mainly dedicated to the construction of complete shell theories^{6,7,8}, the authors show how to obtain boundary conditions consistent with an uncomplete shell theory, as the Love-Kirchhoff theory, by an energy approach compatible with previous work.

INTRODUCCION

Las teorías matemáticas para el análisis de estructuras laminares suelen construirse a partir de las ecuaciones de campo del continuo 3D, utilizando como sistema coordinado el intrínseco al cuerpo, definido por su superficie de referencia Σ —usualmente su superficie media, definida por los puntos equidistantes de las dos caras externas de la lámina (ver Figura 1)— y una dirección exterior a la misma^{1,2}, o bien formulando directamente una teoría bidimensional asignando a la superficie de referencia un número finito de vectores directores, usualmente uno solo^{9,10}, que completan la descripción de la deformación de Σ proporcionada por el cambio de sus

Recibido: Abril 1988

dos primeras formas fundamentales con el fin de cubrir la deformación de la lámina como sólido.

Ambas vías pueden generarse a partir de una única presentación de las ecuaciones cinemáticas de la lámina partiendo de una formulación 3D en la cual los distintos campos de variables geométricas se desarrollan en serie de potencias de η , coordinada exterior a Σ que completa el triedro local^{1,6}. Cada uno de los factores asociados a las sucesivas potencias de η aparece entonces como vector director según la teoría directa.

Por este procedimiento puede construirse una familia jerárquica de teorías laminares que denominaremos CTN¹¹, siendo de particular interés la CT1 por ser la más sencilla de las teorías completas. Por teoría completa entenderemos aquella que no introduce simplificaciones adicionales a la propia discretización del comportamiento transversal de la lámina. En esta dirección los trabajos presentados por Moya¹¹ y Casanova¹² exponen la incorporación de este tratamiento al problema estático con material hiperelástico y elastoplástico respectivamente.

La principal ventaja del empleo de una teoría completa reside en que cualquiera de las variables estáticas, o esfuerzos generalizados, que intervienen en el equilibrio del cuerpo produce deformación. Por lo tanto se pueden incorporar los esfuerzos cortantes al conjunto de variables energéticas estáticas, y ninguna de las componentes del tensor de deformaciones de Lagrange resulta nula. Esta posibilidad se desvanece en la teoría clásica de láminas, basada en la hipótesis de Love-Kirchhoff^{3,4}. Ello induce una serie de conocidas desventajas puesto que este modelo, que denominaremos en lo sucesivo CTO, no permite reproducir deformaciones transversales y por lo tanto los esfuerzos cortantes sólo pueden interpretarse como resultante de las tensiones tangenciales transversales, pero no como variables energéticas, y en particular se deriva una incompleta reproducción de las condiciones de contorno en los bordes libres.

Fue Kirchhoff³ quien en 1850 presentó una primera prueba de la reducción de las condiciones de contorno en placas, introduciendo sus conocidas reacciones:

$$\begin{aligned} V_x &= Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \\ V_y &= Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \end{aligned}$$

como sistema estáticamente equivalente al formado por cortantes y torsores. En el presente artículo se desarrolla una prueba completa de la consistencia de esta reducción de esfuerzos en el contorno con el modelo cinemático CTO, utilizando para ello argumentos energéticos. Se recurre al cálculo de variaciones para obtener tanto las conocidas ecuaciones de equilibrio de la lámina de Love-Kirchhoff como la expresión de las reacciones de Kirchhoff en un sistema curvilíneo cualquiera, y en particular a lo largo de la curva cerrada que delimita el borde de la lámina sobre la superficie de referencia.

Nótese que todos los cálculos se desarrollan en configuración actual, o deformada, por lo tanto los esfuerzos generalizados serán esfuerzos de Cauchy, o verdaderos, y las ecuaciones de equilibrio obtenidas serán directamente las requeridas para el análisis no-lineal.

MATERIA PRELIMINAR

Comenzaremos por derivar las ecuaciones de equilibrio interno y condiciones de contorno de una lámina \mathcal{B} sometida a fuerzas conservativas en un sistema coordenado convectivo $\theta^\alpha, \alpha = 1, 2$, definido sobre la superficie de referencia de la lámina Σ .

Usualmente esta superficie privilegiada coincide con la superficie media de la lámina, y las coordenadas θ^α se identifican con los parámetros Gaussianos de Σ . El sistema de referencia de las posiciones de los puntos materiales de la lámina en \mathbb{R}^3 se obtiene completando las coordenadas de superficie con una coordenada externa: η , y el contorno del volumen \mathcal{V} ocupado por \mathcal{B} comprenderá los puntos situados sobre las caras inferior y superior de la lámina definidas por $\eta = a, \eta = b$ y denominadas Σ^-, Σ^+ respectivamente, y los puntos pertenecientes a la arista E , definida por el cilindro $\eta \times \partial\Sigma, \eta \in [a, b]$. $\partial\Sigma$ es la curva cerrada que define el contorno de \mathcal{B} sobre la superficie de referencia, luego $\partial\Sigma = \Sigma \cap E$. Todos estos conceptos geométricos se representan en la Figura 1.

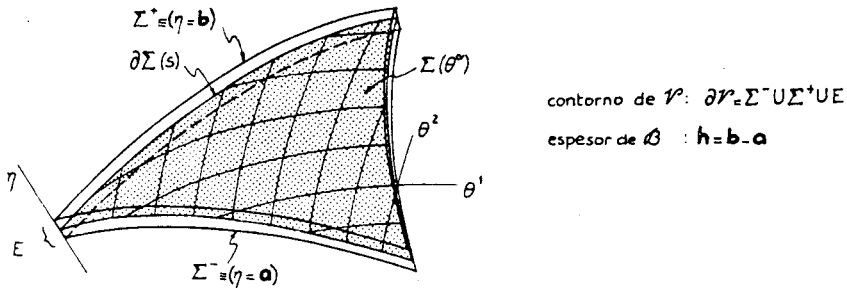


Figura 1. Descripción geométrica de la lámina $\theta^i = \{\theta^\alpha, \eta\}, \alpha = 1, 2 ; i = 1 a 3$.

Las ecuaciones de equilibrio interno y condiciones de contorno pueden generarse de forma cómoda y elegante a partir del principio de trabajos virtuales, expresión de la condición de estacionalidad de la energía potencial, la cual es necesaria y suficiente para asegurar el equilibrio estático del cuerpo en estudio. Para ello partiremos de su expresión 3D, y mediante integración sobre el espesor obtendremos su forma 2D ya definida en las variables de superficie θ^α . El principio variacional mencionado se escribe^{8,14}:

$$\delta V = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{1}{\sqrt{g^*}} \mathbf{T}^i \cdot \delta \mathbf{g}_i^* - \rho^* \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{p} \right) d\mathcal{V} - \int_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{p} dA = 0 \tag{1}$$

quedando recogidas todas las magnitudes empleadas en su definición en la Tabla I. Sea $\mathbf{r}(\theta^\alpha)$ el vector posición de un punto de \mathcal{B} perteneciente a la superficie de referencia, y \mathbf{a}_3 la normal unitaria a Σ . Tendremos entonces

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_\alpha &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^\alpha} = \mathbf{r}_{,\alpha} \\ \mathbf{a}_3 &= \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

\mathbf{a}_α son los vectores naturales del sistema coordenado θ^α o velocidades de Σ . La hipótesis cinemática de Love-Kirchhoff (CTO) se escribirá entonces:

$$\mathbf{p}(\theta^i) = \mathbf{r}(\theta^\alpha) + \eta \mathbf{a}_3 \quad (3)$$

cualquiera que sea la configuración de la lámina \mathcal{B} . Sobre la base de esta hipótesis, la evaluación de los vectores naturales del sistema θ^i en cada punto de \mathcal{V} es inmediata y se incluye en la Tabla I. Nótese que el vector $\mathbf{p} - \mathbf{r}$, que define la posición de un punto de \mathcal{B} respecto a Σ , vale $\eta \mathbf{a}_3$, luego su módulo y dirección respecto a la superficie de referencia permanecerán constantes cualquiera que sea la configuración de la lámina según establece la teoría de Love-Kirchhoff.

Recurriendo a las fórmulas de transformación de los elementos de volumen y área contenidos en la Tabla I, la ecuación de partida se convierte en:

$$\begin{aligned} \delta V = \int_{\Sigma} \left\{ \mathbf{N}^\alpha \cdot \delta \mathbf{a}_\alpha + \mathbf{M}^\alpha \cdot \delta \mathbf{a}_{3,\alpha} + \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{a}_3 - \rho \left(\overset{0}{\mathbf{B}} \cdot \delta \mathbf{r} + \overset{1}{\mathbf{B}} \cdot \delta \mathbf{a}_3 \right) \right\} d\Sigma - \\ - \int_{\partial \mathcal{V}} \mathbf{q} \cdot (\delta \mathbf{r} + \eta \delta \mathbf{a}_3) dA = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

con las siguientes definiciones

$$\mathbf{N}^\alpha = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_a^b \mathbf{T}^\alpha d\eta \quad (5)_1$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_a^b \eta \mathbf{T}^\alpha d\eta \\ \mathbf{Q} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_a^b \mathbf{T}^3 d\eta \end{aligned} \right\} \quad (5)_{2,3}$$

correspondientes a los vectores de esfuerzos generalizados, cuya interpretación se presenta en la próxima sección, ρ será la densidad de masa de \mathcal{B} por unidad de superficie, y $\overset{0}{\mathbf{B}}$, $\overset{1}{\mathbf{B}}$ las fuerzas másicas generalizadas por unidad de masa.

$$\left. \begin{aligned} \rho \overset{N}{\mathbf{B}} &= \int_a^b \mu \rho^* \eta^N \mathbf{b} d\eta \\ \rho &= \int_a^b \mu \rho^* d\eta ; N = 0, 1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Variable	Definición	Expresión general	Expresión en el marco CTO
$\mathbf{p}(\theta^i)$	vector posición de los puntos materiales de la lámina en configuración actual.		
\mathbf{g}_i^*	vectores naturales del sistema coordenado θ^i .	$\mathbf{g}_i^* = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \theta^i} = \mathbf{P}_{,i}$	$\begin{cases} \mathbf{g}_\alpha^* = \mu_\alpha^\beta \mathbf{a}_\beta \\ \mathbf{g}_3^* = \mathbf{a}_3 \end{cases}$
\mathbf{T}^i	vector de tensiones. $\mathbf{T}^i d\theta^j d\theta^k (i \neq j \neq k)$ define la tracción total actuante sobre el elemento de área definido por los incrementos infinitesimales $d\theta^j d\theta^k$.	$\mathbf{T}^i = \sqrt{g^*} T^{ij} \mathbf{g}_j^*$ T_{ij} es el tensor de tensiones de Cauchy.	
\mathbf{b}	fuerzas másicas por unidad de masa.		
\mathbf{q}	fuerzas de superficie por unidad de área.		
ρ^*	densidad de masa por unidad de volumen en configuración actual.		
g_{ij}^*	tensor métrico del sistema coordenado θ^i .	$g_{ij}^* = \mathbf{g}_i^* \cdot \mathbf{g}_j^*$	$\begin{cases} g_{\alpha\beta}^* = a_{\alpha\beta} - 2\eta b_{\alpha\beta} + \eta^2 c_{\alpha\beta} \\ g_{\alpha 3}^* = 0 \\ g_{33}^* = 1 \end{cases}$
g^*	determinante del tensor métrico de $\{\theta^i\}$.	$g^* = g_{ij}^* $	
$a_{\alpha\beta}$	tensor métrico del sistema coordenado θ^α , primera forma fundamental de Σ .	$a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta$	
a	determinante del tensor métrico de $\{\theta^\alpha\}$	$a = a_{\alpha\beta} $	
$b_{\alpha\beta}$	define la segunda forma fundamental de Σ .	$b_{\alpha\beta} = -\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta}$	
$c_{\alpha\beta}$	define la tercera forma fundamental de Σ .	$c_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} = b_\alpha^\lambda \cdot b_{\lambda\beta}$	
dV	elemento infinitesimal de volumen de \mathcal{V} .	$dV = \sqrt{g^*} d\theta^1 d\theta^2 d\eta$	
$d\Sigma$	elemento infinitesimal de superficie sobre Σ .	$d\Sigma = \sqrt{a} d\theta^1 d\theta^2$	
μ_α^β	tensor laminar.	$\mu_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta - \eta b_\alpha^\beta$	
μ	determinante del tensor laminar.	$\mu = \mu_\alpha^\beta = 1 - 2\eta H + \eta^2 K$ H y K son la curvatura media y total de Σ respectivamente.	$\mu = \sqrt{\frac{g^*}{a}}$

Tabla I. Definiciones básicas.

La ecuación (4) contempla el contorno $\partial\mathcal{V}$ de la lámina en su totalidad. Siguiendo su descomposición en caras inferior y superior y arista, expuesta en la Figura 1, la integral correspondiente al trabajo virtual de las fuerzas de contorno \mathbf{q} se descompone en tres sumandos asociados respectivamente a Σ^- , Σ^+ y E según la notación introducida. Cada uno de ellos lleva asociado un elemento de área cuya expresión puede darse en la forma²:

$$d\Sigma^- = \mu^- d\Sigma$$

$$d\Sigma^+ = \mu^+ d\Sigma$$

$$dE = \mu_E ds d\eta$$

con la siguiente definición de los escalares μ^\pm , μ_E :

$$\left. \begin{aligned} \mu^\pm &= \sqrt{\frac{g^\pm}{a}} \quad , \quad g^\pm = |g_{\alpha\beta}^\pm| \\ \mu_E &= \sqrt{1 - 2\eta\lambda^\alpha b_{\alpha\beta}\lambda^\beta + \eta^2\lambda^\alpha c_{\alpha\beta}\lambda^\beta} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$|g_{\alpha\beta}^\pm|$ es el determinante del tensor métrico sobre las caras de la lámina, y λ^α son las componentes contravariantes del vector tangente a la curva $\partial\Sigma$ parametrizada en s , longitud de arco:

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}(s) = \lambda^\alpha \mathbf{a}_\alpha \quad , \quad \lambda^\alpha = \frac{d\theta^\alpha}{ds} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} g_{\alpha\beta}^- &= g_{\alpha\beta}^*|_{\eta=\mathbf{a}} + a_{,\alpha} \cdot a_{\beta} \\ g_{\alpha\beta}^+ &= g_{\alpha\beta}^*|_{\eta=\mathbf{b}} + b_{,\alpha} \cdot b_{,\beta} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Establecidas estas relaciones geométricas sobre $\partial\mathcal{V}$, el principio variacional (4) se convierte en suma de dos integrales:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{V} = \int_{\Sigma} \left\{ \mathbf{N}^\alpha \cdot \delta\mathbf{a}_\alpha + \mathbf{M}^\alpha \cdot \delta\mathbf{a}_{3,\alpha} + \mathbf{Q} \cdot \delta\mathbf{a}_3 - \left[\left(\overset{0}{\mathbf{q}} + \rho \overset{0}{\mathbf{B}} \right) \cdot \delta\mathbf{r} + \left(\overset{1}{\mathbf{q}} + \rho \overset{1}{\mathbf{B}} \right) \cdot \delta\mathbf{a}_3 \right] \right\} d\Sigma - \\ - \oint_{\partial\Sigma} \left(\overset{0}{\mathbf{F}} \cdot \delta\mathbf{r} + \overset{1}{\mathbf{F}} \cdot \delta\mathbf{a}_3 \right) ds = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

La primera de ellas corresponde al trabajo virtual desarrollado por los esfuerzos y fuerzas generalizadas sobre la superficie media de la lámina, y la segunda integral proporciona la reducción al contorno $\partial\Sigma$ de la superficie media del trabajo virtual de las fuerzas aplicadas sobre la arista E . Para la escritura de (10) se han empleado las definiciones auxiliares siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \overset{N}{\mathbf{q}} &= \mu^+ b^N \mathbf{q}^+ + \mu^- a^N \mathbf{q}^- \\ \overset{N}{\mathbf{F}} &= \int_a^b \mu_E \eta^N \mathbf{q}_E d\eta; \quad N = 0, 1 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Las ecuaciones anteriores muestran como se reduce a Σ las tensiones actuantes sobre las caras inferior y superior de β , resultando unas fuerzas de superficie $\overset{0}{\mathbf{q}}$ y unos momentos de superficie $\overset{1}{\mathbf{q}}$, así como las tensiones aplicadas sobre E , arista de la lámina, que se transforman en el marco de la teoría CTO en fuerzas y momentos por unidad de longitud del borde $\partial\Sigma$: $\overset{0}{\mathbf{F}}$ y $\overset{1}{\mathbf{F}}$ respectivamente.

Invocando el teorema de Gauss, o teorema de la divergencia, la primera de las dos integrales puede transformarse como sigue. La versión 2D del teorema de Gauss se escribe²:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} v_{|\alpha}^{\alpha} d\Sigma &= \int_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{a}} (\sqrt{a} v^{\alpha})_{,\alpha} d\Sigma \\ &= \oint_{\partial\Sigma} v^{\alpha} n_{\alpha} ds \end{aligned} \quad (12)$$

siendo n_{α} las componentes covariantes del vector \mathbf{n} , normal unitaria exterior de $\partial\Sigma$ sobre Σ . La definición de derivada covariante del sistema v^{α} es:

$$v_{|\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{a}} (\sqrt{a} v^{\alpha})_{,\alpha} = v_{,\alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\lambda\alpha}^{\alpha} v^{\lambda} \quad (13)$$

$\Gamma_{\lambda\beta}^{\alpha}$ son símbolos de Christoffel de segunda especie de la superficie $\Sigma(\theta^{\alpha})$. La normal unitaria \mathbf{n} se relaciona con el vector tangente a $\partial\Sigma$ definido en (8) mediante la ecuación:

$$n_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta} \lambda^{\beta} \quad (14)$$

El sistema $\varepsilon_{\alpha\beta}$ es el tensor de permutación, definido por el producto mixto:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= (\mathbf{a}_{\alpha} \mathbf{a}_{\beta} \mathbf{a}_3), \\ \varepsilon_{12} &= -\varepsilon_{21} = \sqrt{a} \\ \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{22} = 0 \end{aligned} \right\}$$

Aplicando directamente (13) a los sistemas $\mathbf{N}^{\alpha} \cdot \delta \mathbf{r}$, $\mathbf{M}^{\alpha} \cdot \delta \mathbf{a}_3$ obtendremos:

$$\begin{aligned} (\mathbf{N}^{\alpha} \cdot \delta \mathbf{r})|_{\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{a}} (\sqrt{a} \mathbf{N}^{\alpha} \cdot \delta \mathbf{r})_{,\alpha} \\ (\mathbf{M}^{\alpha} \cdot \delta \mathbf{a}_3)|_{\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{a}} (\sqrt{a} \mathbf{M}^{\alpha} \cdot \delta \mathbf{a}_3)_{,\alpha} \end{aligned}$$

y derivando por partes en el segundo miembro resulta:

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{N}^\alpha \cdot \delta \mathbf{r})|_\alpha &= \mathbf{N}^\alpha|_\alpha \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{N}^\alpha \cdot \delta \mathbf{a}_\alpha \\ (\mathbf{M}^\alpha \cdot \delta \mathbf{a}_3)|_\alpha &= \mathbf{M}^\alpha|_\alpha \cdot \delta \mathbf{a}_3 + \mathbf{M}^\alpha \cdot \delta \mathbf{a}_{3,\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

donde la definición (13) se ha extendido a un sistema vectorial \mathbf{v}^α (basta sustituir en esta ecuación v^α por \mathbf{v}^α). Llevando (15) a (10) e invocando el teorema de Gauss se obtiene finalmente:

$$\begin{aligned} \delta V &= \oint_{\partial \Sigma} [(\mathbf{N}^\alpha n_\alpha - \overset{0}{\mathbf{F}}) \cdot \delta \mathbf{r} + (\mathbf{M}^\alpha n_\alpha - \overset{1}{\mathbf{F}}) \cdot \delta \mathbf{a}_3] ds - \\ &- \int_\Sigma \left\{ [\mathbf{N}^\alpha|_\alpha + (\overset{0}{\mathbf{q}} + \rho \overset{0}{\mathbf{B}})] \cdot \delta \mathbf{r} + [\mathbf{M}^\alpha|_\alpha + (\overset{1}{\mathbf{q}} + \rho \overset{1}{\mathbf{B}}) - \mathbf{Q}] \cdot \delta \mathbf{a}_3 \right\} d\Sigma = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Con esta última ecuación damos por concluida esta sección dedicada a establecer las ecuaciones básicas sobre las que se asienta el presente trabajo. No obstante, antes de abordar el cuerpo de este artículo complementaremos la definición de los esfuerzos generalizados (5) con la expresión de sus componentes en la base natural \mathbf{a}_i . Utilizando la definición de \mathbf{T}^i dada en la Tabla I en función del tensor de tensiones de Cauchy se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{N}^\alpha &= \int_a^b \sqrt{\frac{g^*}{a}} T^{\alpha i} \mathbf{g}_i^* d\eta = N^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta + N^{\alpha 3} \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{M}^\alpha &= \int_a^b \sqrt{\frac{g^*}{a}} T^{\alpha i} \mathbf{g}_i^* \eta d\eta = M^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta + M^{\alpha 3} \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{Q} &= \int_a^b \sqrt{\frac{g^*}{a}} T^{3i} \mathbf{g}_i^* d\eta = Q^\beta \mathbf{a}_\beta + Q^3 \mathbf{a}_3 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Con las siguientes definiciones de las componentes de los esfuerzos generalizados (basta recurrir a la definición de \mathbf{g}_i^* para teoría CTO, contenida en la Tabla I).

Sistema	Componentes tangentes	Componente normal
\mathbf{N}^α	$N^{\alpha\beta} = \int_a^b \mu \mu_\gamma^\beta T^{\alpha\gamma} d\eta$	$N^{\alpha 3} = \int_a^b \mu T^{\alpha 3} d\eta$
\mathbf{M}^α	$M^{\alpha\beta} = \int_a^b \mu \mu_\gamma^\beta T^{\alpha\gamma} \eta d\eta$	$M^{\alpha 3} = \int_a^b \mu T^{\alpha 3} \eta d\eta$
\mathbf{Q}	$Q^\beta = \int_a^b \mu \mu_\gamma^\beta T^{3\gamma} d\eta$	$Q^3 = \int_a^b \mu T^{33} d\eta$

Tabla II.

DEDUCCION DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO CONSISTENTES CON LA TEORIA CTO

Para satisfacer el principio de los trabajos virtuales, cuya versión 2D queda recogida en la ecuación (16) referida al sistema coordenado θ^α , deben anularse los dos sumandos del primer miembro de esta ecuación escalar. La integral de superficie proporciona las ecuaciones de equilibrio de la lámina referidas a Σ puesto que ha de ser nula cualesquiera que sean las funciones de prueba δp (desplazamientos virtuales generalizados δr , δa_3 de la superficie de referencia). Se obtiene por lo tanto

$$\begin{aligned} N^\alpha|_\alpha + \bar{q}_0 &= 0 \\ M^\alpha|_\alpha + \bar{q}_1 &= Q \end{aligned} \tag{18}$$

donde $\bar{q}_0 = \overset{0}{q} + \rho \overset{0}{B}$ es la fuerza actuante por unidad de superficie, y $\bar{q}_1 = \overset{1}{q} + \rho \overset{1}{B}$ el momento de primer orden medido en las mismas unidades, ambos vectores reproducen la acción resultante sobre Σ de las fuerzas de masa y las fuerzas superficiales aplicadas sobre las caras Σ^- y Σ^+ de la lámina. El sistema (18) proporciona 6 ecuaciones escalares que involucran 15 incógnitas, de las cuales tan solo 13 son independientes como se muestra a continuación. Recurriendo a la Tabla II, las componentes tangentes del vector Q pueden ponerse como:

$$Q^\alpha = \int_a^b \mu \mu_\gamma^\alpha T^{3\gamma} d\eta = \int_a^b \mu T^{3\alpha} d\eta - b_\gamma^\alpha \int_a^b \mu T^{3\gamma} \eta d\eta$$

donde se ha empleado la definición del tensor laminar μ_γ^α . Por lo tanto resulta

$$Q^\alpha = N^{\alpha 3} - b_\gamma^\alpha M^{\gamma 3} \tag{19}$$

y en forma vectorial:

$$Q \cdot a^\alpha = (N^\alpha - b_\gamma^\alpha M^\gamma) \cdot a_3 \tag{20}$$

Ambas ecuaciones prueban que tan solo 13 componentes de esfuerzos generalizados son independientes, pudiendo eliminar de (18)₂ las componentes Q^α , resultando:

$$\left. \begin{aligned} N^{\alpha\beta}|_\alpha - b_\alpha^\beta N^{\alpha 3} + \bar{q}_0^\beta &= 0 \\ N^{\alpha 3}|_\alpha + b_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + \bar{q}_0^3 &= 0 \\ M^{\alpha\beta}|_\alpha + \bar{q}_1^\beta &= N^{\beta 3} \\ M^{\alpha 3}|_\alpha + \bar{q}_1^3 &= N^{33} \end{aligned} \right\} \tag{21}$$

Numerosos autores han propuesto ecuaciones equivalentes a (21), ya en componentes tensoriales^{1,2,15,16} o físicas¹⁷. Por último, el término N^{33} definido por

$$N^{33} = Q^3 - b_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta}$$

junto con la ecuación asociada (21)₄ suelen descartarse del sistema de ecuaciones de equilibrio interno. Una justificación de esta opción puede esbozarse al estudiar la tracción y momento resultantes sobre una determinada sección de la lámina, cuestión que se aborda dentro de este apartado.

El restante sumando del primer miembro de la ecuación (16) proporcionará por su parte la expresión 2D de las condiciones de contorno al exigir su anulación. Para ello procederemos en primer lugar a expresarlo en componentes tensoriales y a continuación realizaremos una transformación de coordenadas que permita identificar los esfuerzos generalizados actuantes a lo largo del contorno $\partial\Sigma$. Sea $I_{\partial\Sigma}$ la integral en cuestión, invocando (17) se llega a:

$$\oint_{\partial\Sigma} \left\{ \left[(N^{\alpha\beta} n_\alpha - F^\beta) \delta \mathbf{r} + (M^{\alpha\beta} n_\alpha - F^\beta) \delta \mathbf{a}_3 \right] \cdot \mathbf{a}_\beta + \right. \\ \left. + \left[(N^{\alpha 3} n_\alpha - F^3) \delta \mathbf{r} + (M^{\alpha 3} n_\alpha - F^3) \delta \mathbf{a}_3 \right] \cdot \mathbf{a}_3 \right\} ds = 0$$

Los desplazamientos virtuales generalizados pueden expresarse a su vez en el triedro local. Basta introducir la definición del campo de desplazamientos de Σ , que denominaremos $\mathbf{d}(\theta^\alpha)$:

$$\mathbf{d} = \mathbf{r} - \mathbf{R} \quad (22)$$

donde el vector posición \mathbf{R} define una configuración de referencia de la superficie $\Sigma(\theta^\alpha)$, usualmente su configuración inicial (libre de tensiones y deformaciones). Por ser \mathbf{a}_3 perpendicular a esta superficie, y unitario se cumplirá:

$$\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_\alpha = 0 \quad , \quad \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = 1$$

luego en virtud de (2)₁

$$\left. \begin{aligned} \delta \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_\alpha &= -\delta \mathbf{r}_{,\alpha} \cdot \mathbf{a}_3 \\ \delta \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

y puesto que $\delta \mathbf{d} \equiv \delta \mathbf{r}$, resulta para $I_{\partial\Sigma}$:

$$I_{\partial\Sigma} = \oint_{\partial\Sigma} \left\{ (N^{\alpha\beta} n_\alpha - F^\beta) \delta \mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_\beta + \right. \\ \left. + \left[(N^{\alpha 3} n_\alpha - F^3) \delta \mathbf{d} - (M^{\alpha\beta} n_\alpha - F^\beta) \delta \mathbf{d}_{,\beta} \right] \mathbf{a}_3 \right\} ds = 0 \quad (24)$$

Como puede observarse, en la ecuación anterior intervienen exclusivamente la variación de los desplazamientos de Σ , $\delta \mathbf{d}$, y su derivada respecto a las coordenadas de superficie, $\delta \mathbf{d}_{,\beta}$. Anotando que en el sistema local se cumple:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= v_\alpha \mathbf{a}^\alpha + v_3 \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{v}_{,\beta} &= (v_{\alpha|\beta} - b_{\alpha\beta} v_3) \mathbf{a}^\alpha + (v_{3,\beta} + b_\beta^\gamma v_\gamma) \mathbf{a}_3 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

tendremos para $\delta \mathbf{d}(\theta^\alpha)$:

$$\left. \begin{aligned} \delta \mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_\beta &= \delta d_\beta \\ \delta \mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_3 &= \delta d_3 \\ \delta \mathbf{d}_{,\beta} \cdot \mathbf{a}_3 &= \delta d_{3,\beta} + b_\beta^\gamma \delta d_\gamma \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

relaciones directamente utilizadas para expresar (24) exclusivamente en componentes tensoriales:

$$\left. \begin{aligned} I_{\partial\Sigma} &= \oint_{\partial\Sigma} \left\{ (\hat{N}^{\alpha\beta} n_\alpha - \hat{F}^\beta) \delta d_\beta + (N^{\alpha 3} n_\alpha - \overset{0}{F}^3) \delta d_3 - \right. \\ &\quad \left. - (M^{\alpha\beta} n_\alpha - \overset{1}{F}^\beta) \delta d_{3,\beta} \right\} ds = 0 \\ \hat{N}^{\alpha\beta} &= N^{\alpha\beta} - b_\gamma^\beta M^{\alpha\gamma} \\ \hat{F}^\beta &= \overset{0}{F}^\beta - b_\gamma^\beta \overset{1}{F}^\gamma \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

La ecuación (27)₁ está referida al sistema coordenado θ^α , pero la integral que la define ha de evaluarse sobre la curva cerrada $\partial\Sigma(s)$ donde s es el parámetro longitud de arco. Por lo tanto sobre el contorno de Σ tendremos $\theta^\alpha = \theta^\alpha(s)$ y puede entonces realizarse el cambio de coordenadas únicamente válido en un entorno de cada punto de esta curva definida por:

$$\mathbf{r}(\theta^\alpha) = \mathbf{r}(s) + \nu \mathbf{n}(s) \quad (28)$$

siendo $\mathbf{n}(s)$ la normal unitaria exterior a $\delta\Sigma$, cuyas coordenadas covariantes se definieron en (14), y ν es un infinitésimo: $|\nu| \ll 1$. En lo sucesivo las coordenadas curvilíneas así definidas se escribirán $\bar{\theta}^\alpha$:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\theta}^1 &\equiv s \\ \bar{\theta}^2 &\equiv \nu \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Se comprueba inmediatamente que este sistema es ortogonal, y que sus vectores naturales son unitarios sobre $\partial\Sigma$, por lo tanto las componentes de cualquier sistema expresado en la base \bar{a}_α y evaluadas sobre el contorno de la superficie de referencia coincidirán con sus componentes físicas. Los nuevos vectores base valen:

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_1 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{\theta}_1} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \boldsymbol{\lambda} + \nu \frac{d\mathbf{n}}{ds} \\ \bar{a}_2 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{\theta}_2} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \nu} = \mathbf{n} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

La curva $\partial\Sigma$ se definirá ahora por $\bar{\theta}^2 = 0$. Las ecuaciones de transformación de coordenadas sobre la superficie Σ serán según (28) y (29):

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_1 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{\theta}_1} = \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial \bar{\theta}^1} \mathbf{a}_\alpha \\ \bar{a}_2 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{\theta}_2} = \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial \bar{\theta}^2} \mathbf{a}_\alpha \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

e invocando (30) se deduce directamente:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial \bar{\theta}^1} \Big|_{\bar{\theta}^2=0} &= \lambda^\alpha \\ \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial \bar{\theta}^2} &= n^\alpha \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Estas últimas relaciones nos permiten transformar cualquier tensor de superficie en los puntos de la curva cerrada $\partial\Sigma$. Previamente adoptaremos la siguiente notación para los desplazamientos virtuales δd :

$$\delta d \equiv \mathbf{u}$$

resultando para los distintos órdenes de tensores implicados en la integral de contorno:

$$\left. \begin{aligned} M^{\alpha\beta} &= \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial \bar{\theta}^\gamma} \frac{\partial \theta^\beta}{\partial \bar{\theta}^\sigma} M^{\gamma\sigma} \\ N^{\alpha\beta} &= \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial \bar{\theta}^\gamma} N^{\gamma\beta} \\ u_\beta &= \frac{\partial \bar{\theta}^\gamma}{\partial \theta^\beta} \bar{u}_\gamma \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

donde $M^{\gamma\sigma} \dots$ son las componentes de $\mathbf{M}^\gamma \dots$ en la base \bar{a}_σ . Invocando (32), se obtiene en cada punto de $\partial\Sigma$:

$$\left. \begin{aligned} M^{\alpha\beta} &= \lambda^\alpha \mathcal{M}^{11} \lambda^\beta + \lambda^\alpha \mathcal{M}^{12} n^\beta + n^\alpha \mathcal{M}^{21} \lambda^\beta + n^\alpha \mathcal{M}^{22} n^\beta \\ N^{\alpha 3} &= \lambda^\alpha \mathcal{N}^{13} + n^\alpha \mathcal{N}^{23} \\ u_\beta &= \lambda_\beta \bar{u}_1 + n_\beta \bar{u}_2 \end{aligned} \right\}$$

Llevando estas relaciones a (27) y utilizando las propiedades intrínsecas de los vectores λ, n (unitarios y ortogonales entre sí) así como la nueva definición de δd resulta:

$$I_{\partial\Sigma} = \oint_{\partial\Sigma} \left\{ (\mathcal{N}^{2\alpha} - \hat{\mathcal{F}}^\alpha) \bar{u}_\alpha + (\mathcal{N}^{23} - \hat{\mathcal{F}}^3) \bar{u}_3 - (\mathcal{M}^{2\alpha} - \hat{\mathcal{F}}^\alpha) \bar{u}_{3,\alpha} \right\} d\bar{\theta}^1 = 0 \quad (34)$$

Conviene realizar una interpretación física de los distintos sistemas que constituyen la última ecuación presentada, con objeto de asignarles en sentido más afín a los conceptos técnicos de esfuerzos generalizados, como el de esfuerzos de membrana, momentos flectores y torsores. Los sucesivos aspectos a destacar son:

- (I) La integral $I_{\partial\Sigma}$ ha quedado expresada en el sistema coordenado $\bar{\theta}^\alpha$, en el cual $\bar{\theta}^1$ coincide con la coordenada curvilínea s , longitud de arco de la curva $\partial\Sigma$ que delimita el contorno de la superficie de referencia de la lámina. Además, para el cálculo de esta integral todas las funciones que pertenecen a su integrando han de tomar sus valores sobre esta curva. Este aspecto debe tenerse en cuenta para el desarrollo de los cálculos siguientes.
- (II) El sistema N^α definido en (5)₁ proporciona directamente la tracción resultante sobre una “ α -sección” de la lámina según la definición de T^α incluida en la Tabla I. Una α -sección comprende al conjunto de puntos de \mathcal{B} tales que $\{\theta^\alpha = C^{ste} \forall \theta^\beta, \eta \text{ y } \alpha \neq \beta\}$. Por lo tanto si el sistema de referencia adoptado es precisamente $\bar{\theta}^\gamma$, las componentes de la tracción total a lo largo de $\partial\Sigma(\bar{\theta}^1)$ serán precisamente las N^{2i} resultando:

- componentes tangentes, o de membrana: N^{21} y N^{22} ,
 - componente externa, o cortante: N^{23} .
- Todas ellas quedan representadas en la Figura 2.

- (III) El momento actuante a lo largo de una α -sección será:

$$\left. \begin{aligned} m^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_a^b (\eta a_3) \times T^\alpha d\eta \\ &= a_3 \times M^\alpha \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

y si el sistema M^α se expresa en coordenadas $\bar{\theta}^\gamma$, las componentes del momento actuante a lo largo de $\partial\Sigma(\bar{\theta}^1)$ serán:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{m}^2 &= \mathcal{M}^{21}(\mathbf{a}_3 \times \bar{\mathbf{a}}_1) + \mathcal{M}^{22}(\mathbf{a}_3 \times \bar{\mathbf{a}}_2) \\ &= -\mathcal{M}^{21}\mathbf{n} + \mathcal{M}^{22}\boldsymbol{\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Por lo tanto \mathcal{M}^{21} definirá el momento torsor y \mathcal{M}^{22} el momento flector a lo largo del contorno de la superficie de referencia de la lámina. También se han representado en la Figura 2. En los comentarios anteriores no se incluye ninguna interpretación de N^{33} y $M^{\alpha 3}$. Estas últimas componentes de \mathbf{M}^α no intervienen directamente en el equilibrio local de la lámina como demuestra la ecuación (19), y pueden omitirse en desarrollos posteriores. Sin embargo Q^α y $b_\gamma^\alpha M^{\gamma 3}$ tienen carácter de esfuerzo cortante en virtud de esta misma ecuación y de la interpretación realizada del sistema $\mathcal{N}^{\alpha 3}$. Más detalles sobre otros aspectos de esta cuestión pueden hallarse en^{7,18}.

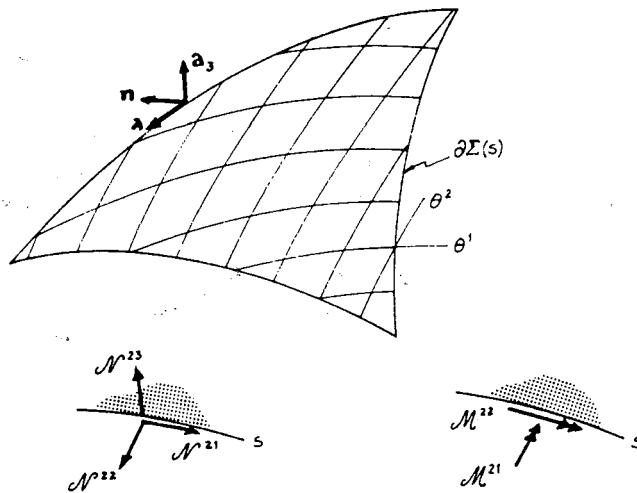


Figura 2. Interpretación de los componentes de \mathbf{N}^α , \mathbf{M}^α .

Vamos a interesarnos a continuación por el tercer sumando de la integral de contorno (34). Recordando lo expresado en el punto (I) anterior, podremos reescribirlo como:

$$(\mathcal{M}^{2\alpha} - \mathcal{F}^{\alpha})\bar{u}_{3,\alpha} = \frac{d}{d\theta^1} \left[(\mathcal{M}^{21} - \mathcal{F}^1)\bar{u}_3 \right] - (\mathcal{M}^{21} - \mathcal{F}^1)_{,1}\bar{u}_3 + (\mathcal{M}^{22} - \mathcal{F}^2)\bar{u}_{3,2} \quad (37)$$

Llevando (37) a (34) resulta:

$$I_{\partial\Sigma} = \oint_{\partial\Sigma} \left\{ (\hat{N}^{2\alpha} - \hat{F}^\alpha) \bar{u}_\alpha + (\hat{N}^{23} - \hat{F}^3) \bar{u}_3 - (\mathcal{M}^{22} - \hat{F}^2) \bar{u}_{3,2} \right\} d\bar{\theta}^1 = 0 \left. \begin{aligned} \hat{N}^{23} &= N^{23} + \mathcal{M}_{,1}^{21} \\ \hat{F}^3 &= F^3 + \mathcal{F}_{,1}^3 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

puesto que la diferencial total obtenida al introducir la expresión (37) en $I_{\partial\Sigma}$ produce un trabajo virtual nulo sobre el contorno cerrado $\partial\Sigma(\bar{\theta}^1)$. El sistema de fuerzas por unidad de longitud \hat{N}^{2i} define los esfuerzos *efectivos* sobre el contorno. Las condiciones de contorno se obtienen directamente de la ecuación anterior. Se deducen condiciones de contorno cinemáticas en aquellos puntos de $\partial\Sigma$ donde están restringidos los movimientos por las condiciones de sustentación de la estructura, y condiciones de contorno estáticas o de tensión impuesta, en aquellos puntos de $\partial\Sigma$ sobre los que actúan fuerzas efectivas \hat{F}^i o momentos \hat{F}^2 . Tendremos por lo tanto:

$$\left. \begin{aligned} \text{(I) sobre } \partial\Sigma_u : \bar{u}_i &= 0, \bar{u}_{3,2} = 0 \\ \text{(II) sobre } \partial\Sigma_\sigma : \hat{N}^{2i} &= \hat{F}^i, \mathcal{M}^{22} = \hat{F}^2 \\ \partial\Sigma &= \partial\Sigma_u U \partial\Sigma_\sigma \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Nótese que el torsor no interviene en (II). Un caso particular de interés se presenta cuando $\partial\Sigma$ coincide con una de las coordenadas de superficie, pongamos θ^β , sobre una determinada longitud. En tal caso esta zona de la arista E de la lámina coincidirá con una α -sección ($\alpha \neq \beta$), y tendremos por lo tanto⁵:

$$\left. \begin{aligned} ds &= \sqrt{a_{\beta\beta}} d\theta^\beta \\ \hat{N}^{\alpha 3} &= N^{\alpha 3} + \frac{1}{\sqrt{a_{\beta\beta}}} M^{\alpha\beta, \beta} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

En (40)₂ quedan definidas las *reacciones de Kirchhoff* de la lámina CTO. Proporcionan un sistema estáticamente equivalente al constituido por los cortantes $N^{\alpha 3}$ y los torsos $M^{\alpha\beta}$ a lo largo de la α -sección y constituyen, junto con los esfuerzos de membrana $\hat{N}^{\alpha\gamma}$ y el flector $M^{\alpha\alpha}$, el sistema de esfuerzos en el contorno consistente con la hipótesis cinemática de Love-Kirchhoff (3). El principio de Saint-Venant garantiza que las condiciones de contorno así formuladas conducirán a la solución correcta en el interior de Σ , produciéndose una alteración de la misma al considerar puntos muy próximos a $\partial\Sigma$ (este fenómeno se conoce como efecto de borde de Kirchhoff).

CONCLUSIONES

El objetivo del presente artículo es doble: por una parte se pretende mostrar cómo, recurriendo a técnicas variacionales ya empleadas en trabajos anteriores^{7,8,11}, se pueden generar las condiciones de contorno formalmente consistentes con el modelo cinemático adoptado para describir las deformaciones de la lámina en forma 2D, y ello aún en

el caso de optar por una teoría laminar incompleta como lo es la de Love-Kirchhoff (CTO), puesto que es incapaz de reproducir la deformación por cortante —ecuación (38)₁—. Además, y este es el segundo punto tratado, este mismo abordaje del problema de equilibrio muestra cuáles han de ser en tal caso las variables estáticas a computar sobre el borde de la lámina con objeto de imponer satisfactoriamente las condiciones de contorno, llegando así a la definición de las reacciones de Kirchhoff de la lámina CTO en la ecuación (38)₂:

$$\hat{N}^{23} = N^{23} + M_{,1}^{21}$$

Esta ecuación define el cortante efectivo a lo largo del contorno $\partial\Sigma(s)$. Su particularización al caso de contorno coincidente con una de las coordenadas de superficie se facilita en la ecuación (40).

REFERENCIAS

1. P.M. Naghdi, "The theory of shells and plates", Handbuch der Physik, Band VI a/2, Springer, (1972).
2. M. Dikmen, "Theory of thin elastic shells", Pitman Books Ltd., (1982).
3. A.E. Green y W. Zerna, "Theoretical Elasticity", Clarendon, 2nd ed., (1968).
4. A.E.H. Love, "A treatise on the mathematical theory of elasticity", 4th ed., Dover (1944).
5. E. Popov, J. Penzien y Z.A. Lu, "Finite element solution for axisymmetric shells", *J. of the Eng. Mech. Div. ASCE.*, Vol. 80, (1964).
6. S. Monleón, J.F. Moyá y P. Fuster, "Cinemática de láminas", *Hormigón y Acero*, no. 152, pp. 39-76, (1984).
7. S. Monleón, J.F. Moyá y P. Fuster, "Teoría variacional de láminas", *Hormigón y Acero*, no. 152, pp. 155-213, (1984).
8. S. Monleón, J.F. Moyá y P. Fuster, "Formulaciones lagrangianas en el análisis no lineal de láminas", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para el Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 1, no. 3, pp. 3-25, (1985).
9. J. Casanova, J.F. Moyá, S. Monleón y P. Fuster, "An algorithmic generation of shape functions on the nonlinear analysis of shells", *Proceedings de la International Conference on Computational Plasticity*, Barcelona, (1987).
10. W. Günter, "Analoge systeme von schalenleichungen", *Ing.-Arch.*, Vol. 30, pp. 160-186, (1961).
11. J.F. Moyá, "Una teoría variacional para el análisis de láminas hiperelásticas basada en la jerarquización a orden N del modelo cinemático transversal: Aplicación de orden uno al estudio del comportamiento no-lineal y de la estabilidad", *Tesis Doctoral*, ETSICCP Valencia, (1984).
12. J. Casanova, "Una aportación al análisis elastoplástico, cinemáticamente no lineal, de estructuras laminares", *Tesis Doctoral*, Escuela Técnica Superior de Ing. de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Valencia, (1987).
13. G. Kirchhoff, "Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen schein", *Crelles J.*, Vol. 40, pp. 51-88, (1850).
14. K. Washizu, "Variational Methods in elasticity and plasticity", Pergamonn Press, 2nd ed., (1974).

15. L. Sanders, "Nonlinear theories of thin shells", *ONR Tech. Report.*, No 10 (Harvard University), (1961).
16. R.W. Leonard, "Nonlinear first approximation thin shell and membrane theory", *NASA*, Langley field, (1961).
17. V.V. Novozhilov, "*Thin shell theory*", 2nd ed., Walters-Noordhoff, Groningen, (1970).
18. I.N. Vekua, "*On one version of the consistent theory of elastic shells*", En: Niordson, F.I. (editor): *Theory of thin shells*, pp. 59-84, Springer, Berlin, (1969).