

## ANÁLISIS LINEAL Y NO LINEAL DE PROPAGACION DE FISURAS EN HORMIGÓN(\*)

JAVIER LLORCA<sup>1</sup>

MANUEL ELICES<sup>1</sup>

y

ANTHONY R. INGRAFFEA<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Departamento de Ciencia de Materiales,  
E.T.S. Ingenieros de Caminos.  
Ciudad Universitaria. 28040 Madrid.*

<sup>2</sup>*Department of Structural Engineering,  
School of Civil and Environmental Engineering,  
Cornell University, Ithaca, N.Y. 14853. U.S.A.*

### RESUMEN

El desarrollo de los sistemas de cálculo gráficos e interactivos ha permitido la aplicación de las técnicas de Mecánica de Fractura en régimen lineal y no lineal para el estudio de la propagación discreta de fisuras en estructuras de hormigón. En este artículo se presentan los modelos teóricos utilizados en Mecánica de Fractura para el estudio de la propagación de una grieta en un medio bidimensional así como las características del código utilizado en el análisis. Se incluyen dos ejemplos como muestra de la versatilidad y potencia de los sistemas de cálculo desarrollados.

### SUMMARY

Discrete crack propagation in concrete structures is now feasible by using an interactive-graphics computer system. This paper presents a theoretical model, suitable for two-dimensional crack propagation in concrete, as well as a description of the computer code. Analysis of two practical situations exemplifies the versatility and power of the developed system.

### INTRODUCCION

Desde hace más de treinta años, la propagación de fisuras en materiales metálicos se ha estudiado con éxito a partir de los principios de la Mecánica de Fractura. Sin embargo, este método de análisis no se ha empezado a utilizar hasta hace pocos años para determinar el comportamiento en fractura del hormigón. Un reciente estudio bibliográfico<sup>1</sup> permite concluir que se ha preferido utilizar criterios estrictamente tensionales

(\*) Este trabajo está basado en una comunicación presentada al II Simposium sobre Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería. Barcelona, Junio 1986 (E. Oñate, B. Suárez y J. Miguel Canet, Eds.).

Recibido: Febrero 1987

para decidir cuándo se produce la inestabilidad y cuál es la dirección de propagación de una fisura. Se suponía que un elemento se fisuraba al alcanzar la tensión un cierto valor crítico y que la fisura se propagaba en dirección normal a la tensión principal máxima. Un estudio más detallado de los resultados obtenidos con este criterio muestra que los éxitos obtenidos al aplicarlo se deben a que las estructuras analizadas eran insensibles al criterio de fractura utilizado<sup>2</sup>. Además hay resultados experimentales que no se pueden explicar mediante criterios estrictamente tensionales siendo necesario acudir a las técnicas de Mecánica de Fractura: éste es el caso entre otros, de la influencia del tamaño en la fragilidad de estructuras de hormigón en masa y armado<sup>3, 4</sup>.

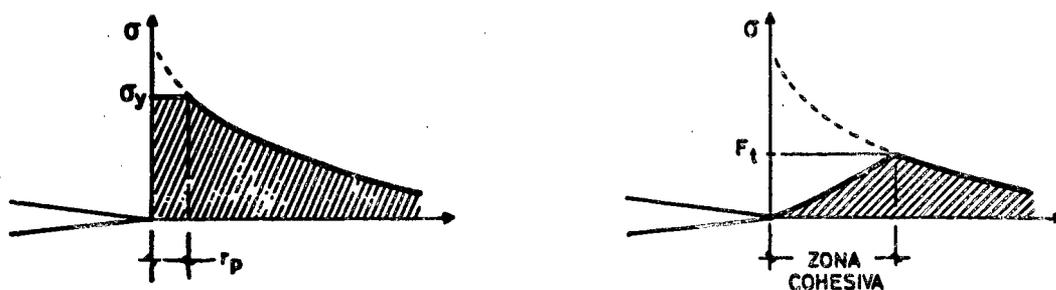


Figura 1. Distribución de tensiones junto a una fisura.  
a) Material metálico. b) Hormigón.

Las razones del retraso en la aplicación de la Mecánica de Fractura al hormigón son de diversa índole. Por un lado, para que la Mecánica de Fractura en su forma más simple —Mecánica de Fractura Elástica y Lineal— se pueda utilizar para caracterizar el crecimiento de una grieta es necesario que la distribución de tensiones en la zona próxima al fondo de la fisura se aproxime lo más posible a una distribución asintótica del tipo  $r^{1/2}$ . Esta condición se suele cumplir en los materiales metálicos donde el tamaño de la zona plástica  $r_p$  es muy pequeño si lo comparamos con la zona asintótica (figura 1a) y con el tamaño de la fisura. En esta situación el estado tensional en el fondo de la grieta está representado por los factores de intensidad de tensiones  $K_I$ ,  $K_{II}$  y  $K_{III}$  o por otras magnitudes como la tasa de liberación de energía  $G$ , directamente relacionada con ellos. En el caso del hormigón, la creación de una nueva superficie libre comienza con la aparición de una zona de microfisuración. En esta región (comúnmente denominada zona de fractura o zona cohesiva) se ha producido una discontinuidad en desplazamientos pero el material sigue siendo capaz de transmitir tensiones. Diversos intentos para estimar el tamaño de esta región<sup>5</sup> han encontrado que, para elementos estructurales de dimensiones normales, su magnitud es parecida o superior a la zona donde el estado tensional viene caracterizado por los factores de intensidad de tensiones (figura 1b). En esta situación la Mecánica de Fractura Elástica y Lineal es sólo aplicable a grandes estructuras de hormigón como presas o muros, habiendo sido necesario usar la Mecánica de Fractura no Lineal e irreversible para estudiar la propagación de fisuras en elementos estructurales menores.

Otras razones de este desfase han sido las dificultades de cálculo que plantea el estudio de la propagación de una fisura mediante las técnicas de Mecánica de Fractura, si se quieren utilizar con toda su potencia. Es necesario disponer de subrutinas que permitan propagar la fisura en cualquier dirección, rehaciendo la malla de elementos

finitos junto al nuevo borde de la fisura y añadiendo los grados de libertad necesarios para mantener la precisión de los cálculos. Además, hay que colocar en la zona circundante a la fisura los elementos finitos especiales que permitan modelizar la singularidad de tensiones. Como la topología de la malla varía en cada paso de la propagación de la fisura, se necesita proceder a la reenumeración automática de los nudos para obtener anchos de banda aceptables en la matriz de rigidez y que los tiempos de cálculo no aumenten excesivamente. Todas estas técnicas numéricas, con el apoyo de otros programas gráficos interactivos, han sido implementados en un código denominado "Finite Elements Fracture Analysis Program" (FEFAP) para casos bidimensionales<sup>2, 6</sup> y han obtenido ya éxito en el estudio de algunos problemas prácticos.

## MODELO DE FRACTURA EN REGIMEN ELASTICO Y LINEAL

### Criterios de Fractura

Supuesto que la zona cohesiva es pequeña en comparación con la profundidad y longitud del frente de la grieta y con la zona en que las tensiones vienen expresadas por la Mecánica de Fractura elástica y lineal, el estado tensional en el fondo de una fisura solicitada en modos I y II queda determinado por los factores de intensidad de tensiones  $K_I$  y  $K_{II}$  (figura 2)<sup>7</sup>. Estos valores de  $K_I$  y  $K_{II}$  dependen únicamente de la geometría del elemento estructural, de las condiciones de carga a que se encuentra sometido y de las características de la grieta. El postulado fundamental de la Mecánica de Fractura elástica y lineal es que la fisura comenzará a propagarse cuando el factor de intensidad de tensiones supere un cierto valor  $K_C$  denominado Tenacidad de Fractura.  $K_C$  es una propiedad del material que si se cumplen determinadas condiciones puede determinarse experimentalmente<sup>8</sup>. Habitualmente la tenacidad de fractura se conoce para el caso en que la fisura está solicitada únicamente con cargas normales a su plano (modo I). En esta situación, la Tenacidad de Fractura  $K_C$  se denomina  $K_{IC}$ . La dirección de propagación de la grieta es conocida y la inestabilidad se produce cuando  $K_I$  supera a  $K_{IC}$ .

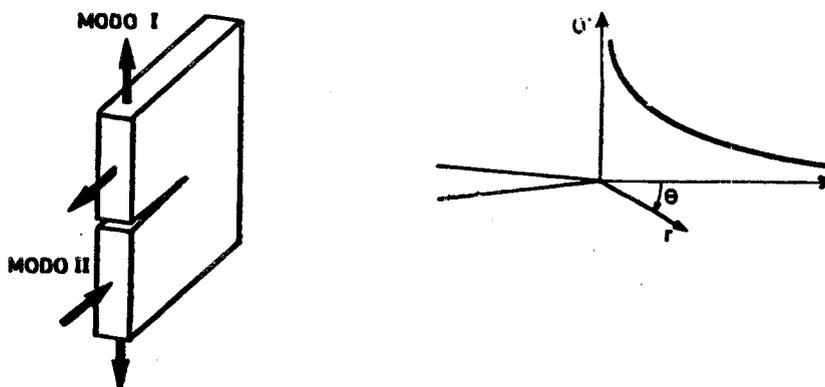


Figura 2. Modos de sollicitación y distribución de tensiones junto a una fisura.

Cuando el elemento estructural fisurado está solicitado en modos I y II, se han formulado varios criterios para calcular la carga crítica y la dirección de propagación. Todos los modelos postulan que la propagación de la fisura se iniciará cuando las cargas alcancen un valor tal que el parámetro característico del modelo sea crítico y que la propagación continuará mientras sea superior a ese valor. El valor crítico de estos parámetros se puede obtener fácilmente a partir de  $K_{IC}$ , suponiendo que la fisura se propaga en el mismo plano.

Los criterios más aceptados están basados en la tensión circunferencial máxima, en la densidad de energía almacenada por deformación y en la tasa de liberación de energía  $G$ .

El criterio de la tensión circunferencial máxima supone que la fisura se propaga en un plano normal a la dirección en que la tensión  $\sigma_\theta$  es máxima. Esta dirección  $\theta_0$  es función de los factores de intensidad de tensiones  $K_I$  y  $K_{II}$  de acuerdo con la expresión:

$$K_I \operatorname{sen} \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) = 0 \quad (1)$$

y la inestabilidad se inicia en el momento en que se verifique:

$$\sigma_\theta (\text{máx}) \sqrt{2\pi r} = K_{IC} \quad (2)$$

Esta última condición puede expresarse en función de  $K_I$  y  $K_{II}$ , llegando a:

$$\cos \frac{\theta_0}{2} \left[ K_I \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \operatorname{sen} \theta_0 \right] = K_{IC} \quad (3)$$

El criterio basado en la densidad de energía debida a deformación supone que el parámetro característico es el factor de densidad de energía de deformación  $S$ , definido así:

$$dW/dV = S/r \quad (4)$$

donde  $dW/dV$  es la densidad de energía debida a deformación y  $r$  la distancia desde el fondo de la fisura al lugar donde se calcula  $dW/dV$ <sup>9</sup>. Según este criterio la dirección de propagación de la fisura es aquella en que  $S$  es mínimo, teniendo que verificarse que,

$$\partial S / \partial \theta = 0 \quad \text{y} \quad \partial^2 S / \partial \theta^2 > 0 \quad (5)$$

La propagación comienza cuando  $S$  alcanza un cierto valor crítico  $S_C$ . En las proximidades de una grieta el factor de densidad de energía debida a la deformación se puede calcular a partir de  $K_I$  y  $K_{II}$ <sup>10</sup>:

$$S = (1/\pi) \left[ a_{11} K_I^2 + 2a_{12} K_I K_{II} + a_{22} K_{II}^2 \right] \quad (6)$$

teniendo en cuenta que los coeficientes  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  y  $a_{21}$  están expresados por:

$$a_{11} = \frac{1}{16\mu} [(1 + \cos\theta)(\kappa - \cos\theta)] \quad (7a)$$

$$a_{12} = \frac{\text{sen}\theta}{16\mu} [2\cos\theta - (\kappa - 1)] \quad (7b)$$

$$a_{22} = \frac{1}{16\mu} [(\kappa + 1)(1 - \cos\theta) + (1 + \cos\theta)(3\cos\theta - 1)] \quad (7c)$$

donde:

$\mu$ : Módulo de rigidez transversal.

$\kappa$ :  $(3 - 4\nu)$  para deformación plana.

$\kappa$ :  $(3 - \nu)/(1 + \nu)$  para tensión plana.

A partir de estos resultados es fácil calcular la relación existente entre  $K_{IC}$  y  $S_C$ :

$$S_C = \frac{(\kappa - 1) K_{IC}^2}{8\pi\mu} \quad (8)$$

Es interesante señalar que, en este criterio, la dirección de propagación y la carga crítica dependen del valor del coeficiente de Poisson del material.

Por último, el criterio basado en la tasa de liberación de energía  $G$  señala que la dirección de propagación es aquella para la que  $G$  es máxima teniendo que verificarse que:

$$\partial G / \partial \theta = 0 \quad \text{y} \quad \partial^2 G / \partial \theta^2 < 0 \quad (9)$$

La propagación comienza cuando  $G$  alcanza un valor crítico  $G_C$ . La relación existente entre los factores de intensidad de tensiones y  $G$  es bien conocida<sup>11</sup>,

$$G = \frac{K_I^2(\theta) + K_{II}^2(\theta)}{E'} \quad (10)$$

donde:

$E' = E$  para deformación plana.

$E' = E/(1 - \nu^2)$  para tensión plana.

y  $K_I(\theta)$  y  $K_{II}(\theta)$  son los valores de los factores de intensidad de tensiones en una fisura que se propaga una longitud infinitesimal formando un ángulo  $\theta$  con la dirección principal de la fisura (figura 3). El cálculo de  $K_I(\theta)$  y  $K_{II}(\theta)$  en función de los factores de intensidad de tensiones en el borde de la fisura principal  $K_I$  y  $K_{II}$  fue realizado por Hussain<sup>12</sup> y las expresiones pueden encontrarse en las referencias<sup>12, 13</sup>:

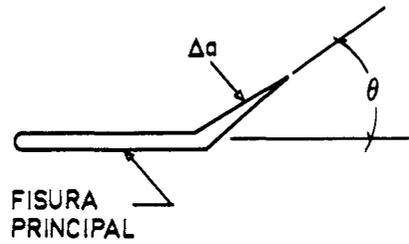


Figura 3. Fisura desviada. Notación.

Cuando se supone que la fisura se propaga dentro de su plano (modo I) se puede calcular la relación entre  $K_{IC}$  y  $G_C$ , llegando a:

$$G_C = K_{IC}^2/E' \quad (11)$$

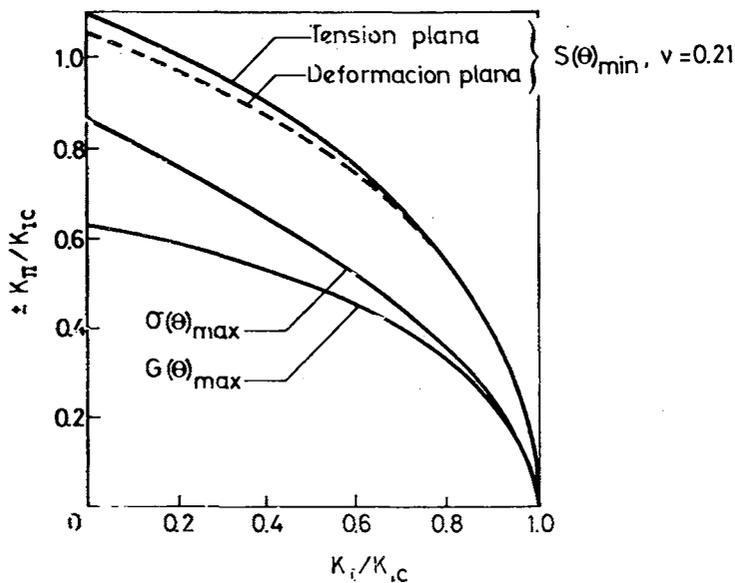


Figura 4. Lugares geométricos de inestabilidad de la fisura según las distintas teorías.

En la figura 4 se han dibujado los lugares geométricos de inestabilidad de la fisura para distintas relaciones entre  $K_I$  y  $K_{II}$  según cada una de las teorías. Los resultados experimentales disponibles sobre hormigones y morteros<sup>14</sup> no permiten sacar conclusiones definitivas. En cualquier caso es necesario señalar que la importancia de esta cuestión es relativa. Cuando una grieta se encuentra bajo una carga importante en modo II cambia rápidamente de dirección al propagarse tendiendo a minimizar o eliminar la componente  $K_{II}$ . Entonces, la mayor parte de la propagación de la fisura se realiza en el dominio de altos valores de la relación  $K_I/K_{II}$ , donde las diferencias entre las tres teorías expuestas son mínimas.

Propagación de la Fisura

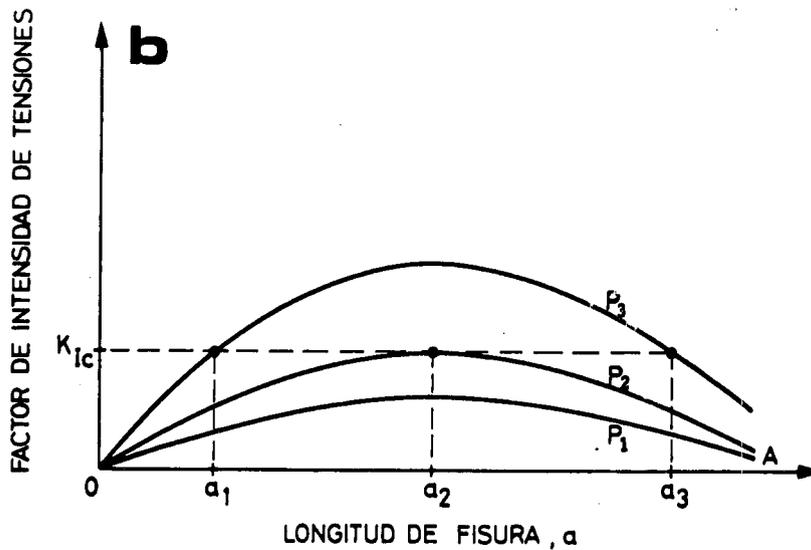
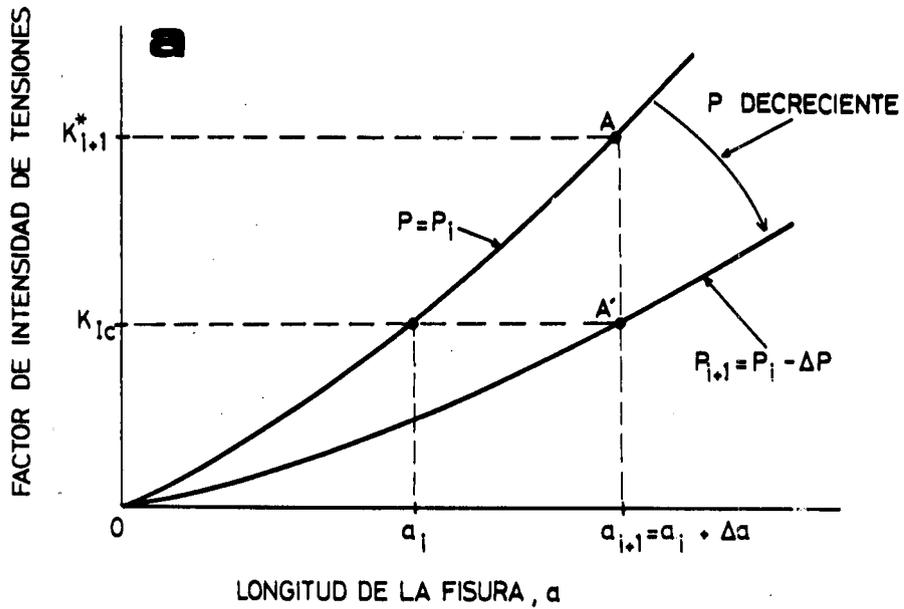


Figura 5. Posibles variaciones del factor de intensidad de tensiones con la longitud de la fisura.

Una vez que se ha iniciado la propagación, es necesario determinar si se producirá la parada de fisura antes de la rotura total o bien si la propagación será inestable. En el caso de que el parámetro que gobierna la propagación de la fisura aumente monótonamente al crecer la grieta, el fenómeno es inestable en control de carga y hay que calcular la disminución de las cargas exteriores para que la fisura se propague una longitud prefijada  $\Delta a$  (figura 5a). Para una carga  $P_i$ , si la fisura inicial es menor que  $a_i$  no habrá propagación. Para  $a = a_i$  la fisura se propagaría hasta rotura puesto que al aumentar  $a$  lo hace el factor de intensidad de tensiones que será siempre superior a  $K_{IC}$ . La nueva carga  $P_{i+1}$  que permite que la fisura se propague una longitud  $\Delta a$  puede obtenerse resolviendo la ecuación:

$$K_{IC} = \alpha_i P_i \sqrt{a_i} = \alpha_{i+1} P_{i+1} \sqrt{a_{i+1}} \quad (12)$$

donde:

$\alpha$ : Factor dependiente de la geometría y de la teoría utilizada.

Entonces:

$$P_{i+1} = (\alpha_i / \alpha_{i+1}) P_i \sqrt{a_i / a_{i+1}} \quad (13)$$

Esta ecuación sólo se puede usar directamente si el coeficiente  $\alpha_{i+1}$  se conoce en el paso  $i$ . De no ser así, otra solución al problema es propagar la fisura  $\Delta a$  en la dirección  $\theta_0$  y calcular el valor del factor de intensidad de tensiones  $K_{i+1}$  para una carga  $P_i$ . El valor del nuevo nivel de carga será:

$$P_{i+1} = (K_{IC} / K_{i+1}^*) P_i \quad (14)$$

Otra situación que puede aparecer está indicada en la figura 5b. El factor de intensidad de tensiones crece hasta alcanzar un máximo y luego decrece al aumentar la longitud de la grieta. Para un nivel de carga  $P_1$  no existe propagación de la fisura. Para un nivel de carga  $P_2$ , la propagación sólo es posible para  $a_2$ , pero  $\Delta a = 0$ . Para un nivel de carga  $P_3$ , la propagación se producirá para  $a_1$  y como será inestable en control de carga, se ha de utilizar un método semejante al del caso 1 para propagar la fisura hasta una longitud  $a_2$ .

Para fisuras mayores que  $a_2$ , la propagación de la fisura es estable bajo control de carga y se necesita un incremento continuo de la carga para propagar la fisura. En este caso puede usarse la ecuación (14). La única diferencia es que el coeficiente  $(K_{IC} / K_{i+1}^*)$  será siempre mayor que 1.

Como es fácil de entender, las demás situaciones que pueden darse en la propagación de la grieta se reducen a uno de los casos anteriores.

Este algoritmo de propagación de la fisura sólo es exacto cuando la grieta está solicitada exclusivamente en modo I. En caso de sollicitación en modo mixto, es necesario que los incrementos de longitud de la fisura sean suficientemente pequeños para obtener resultados precisos.

## Cálculo de los Factores de Intensidad de Tensiones

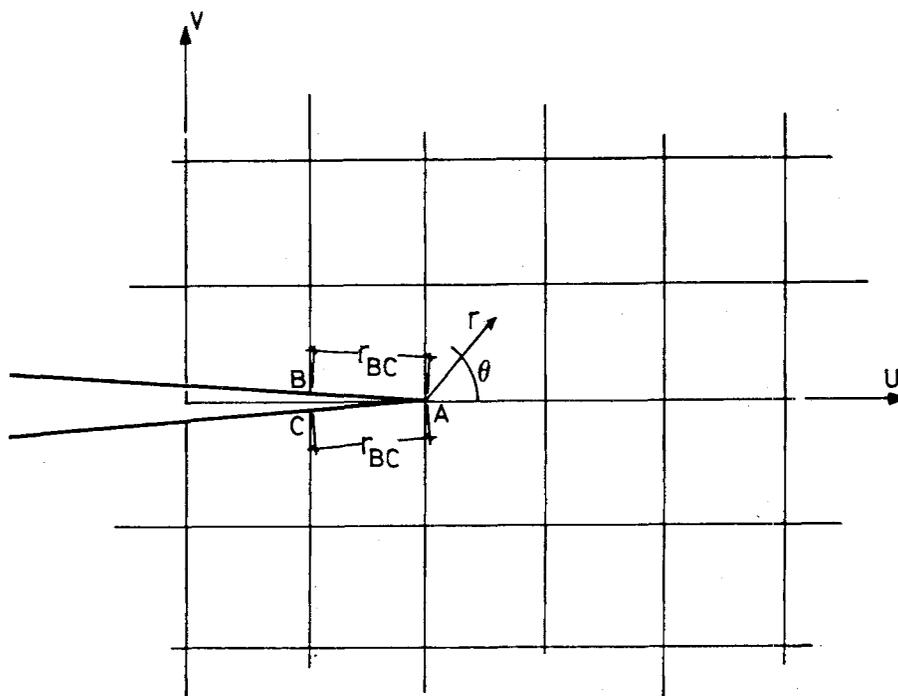


Figura 6. Coordenadas y notación en el fondo de la fisura.

De lo señalado a lo largo de esta sección se puede deducir fácilmente que para un uso eficaz de los criterios de fractura explicados es necesario disponer de un método de cálculo rápido y preciso de los factores de intensidad de tensiones en el fondo de una fisura.

El método más común para determinar el valor de los factores de intensidad de tensiones mediante cálculo por elementos finitos está basado en la relación existente entre los desplazamientos en los nudos situados en el borde de la fisura y los valores de  $K_I$  y  $K_{II}$  según la siguiente expresión (Figura 6).

$$K_I = \sqrt{2\pi/r_{BC}} [\mu/(\kappa+1)] (v_B - v_C) \quad (15)$$

$$K_{II} = \sqrt{2\pi/r_{BC}} [\mu/(\kappa+1)] (u_B - u_C) \quad (16)$$

donde,

$u$ : Desplazamiento paralelo al eje de la fisura.

$v$ : Desplazamiento perpendicular al eje de la fisura.

Sustituyendo los desplazamientos (obtenidos mediante el método de los elementos finitos) de los nudos situados a diferentes distancias  $r$  del borde de la fisura se calculan

diversos valores de los factores de intensidad de tensiones que se aproximan a uno único hasta que  $r$  es muy pequeño y se introduce un error importante en el cálculo. Entonces se hace necesario extrapolar el valor de  $K_I$  y  $K_{II}$  para  $r = 0$  mediante una regresión de los valores para diferentes  $r$ .

La precisión de este método para calcular  $K_I$  y  $K_{II}$  depende de cómo se modelice la singularidad de desplazamientos existente en el borde de la fisura. Los primeros cálculos empleaban como elementos finitos triángulos de deformación constante en unión con mallas extremadamente finas junto a la fisura. Este sistema, así utilizado, planteaba serias dificultades si se quería aplicar para estudiar la propagación de fisuras. En primer lugar, al ser mallas muy finas, los tiempos de cálculo eran muy elevados. Además, al propagarse la fisura se rompían muchos elementos y el número de elementos que era necesario redefinir en el siguiente incremento de longitud de la fisura era muy alto. Finalmente era necesario realizar 2 regresiones para calcular los valores de  $K_I$  y  $K_{II}$  en cada paso. Todo esto llevó a buscar otros métodos que simplificaran estos cálculos. Un importante avance se consiguió al utilizar elementos en los que la función de interpolación de los desplazamientos presentaba una singularidad  $r^{1/2}$ , semejante a la que se produce en el borde de la fisura<sup>15, 16</sup>. El elemento más utilizado porque no necesita que se modifique el programa de cálculo y por la precisión de los resultados obtenidos es el triángulo isoparamétrico de 6 nudos, en el que los nudos situados en el medio de los lados que confluyen en la fisura se colocan a un cuarto del borde de la fisura (Fig. 7). La aplicación de estos elementos para calcular factores de intensidad de tensiones fue propuesta por Shih<sup>17</sup> para problemas con sollicitación en modo I. Aunque el uso de estos elementos permitía usar mallas más gruesas junto a la fisura se continuaba necesitando calcular el factor de intensidad de tensiones mediante una regresión.

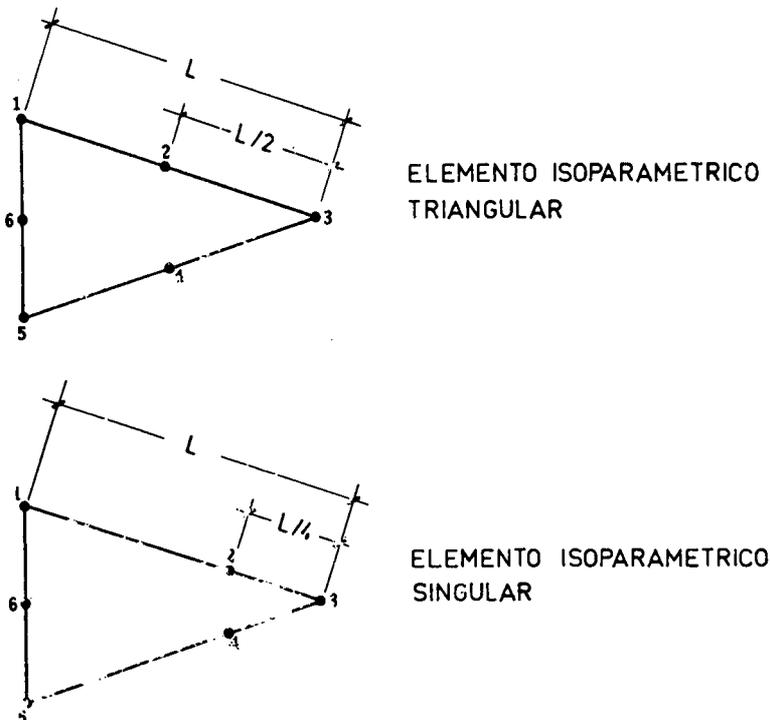


Figura 7. Triángulos isoparamétricos de 6 nudos.

Shih ya señaló que el uso de las expresiones (15) y (16) no explotaba completamente las posibilidades de precisión del nuevo elemento: se podía determinar mejor el factor de intensidad de tensiones igualando todo el coeficiente del término en  $r^{1/2}$  del desarrollo en serie teórico con todo el coeficiente del término en  $r^{1/2}$ , obtenido del elemento singular. Esta técnica mejorada, y su generalización a problemas con sollicitación mixta en modos I y II, fue desarrollada por Ingraffea y Manu<sup>18</sup>.

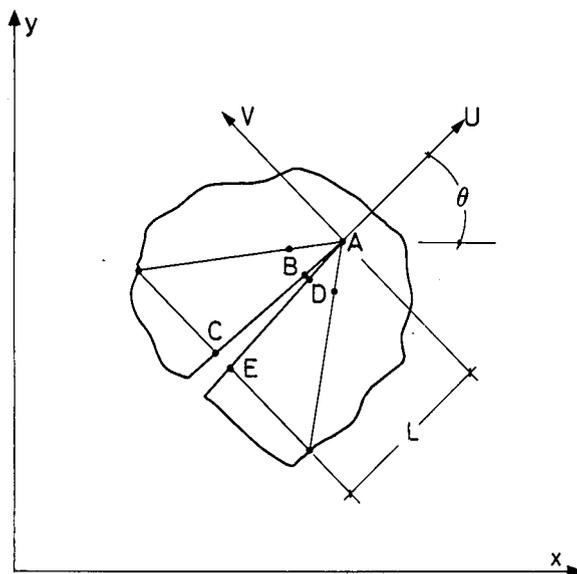


Figura 8. Elementos singulares junto a la fisura.

En esencia, el método consiste en lo siguiente: supongamos una fisura rodeada por elementos singulares como se indica en la figura 8. Los desplazamientos de los labios de la fisura en función de los desplazamientos en el resto de los nudos son:

$$v = v_A + (-3v_A + 4v_B - v_C)\sqrt{r/L} + (2v_A - 4v_B + 2v_C) r/L \quad (17)$$

$$u = u_A + (-3u_A + 4u_B - u_C)\sqrt{r/L} + (2u_A - 4u_B + 2u_C) r/L \quad (18)$$

Expresiones similares se obtienen a lo largo de la línea ADE. Igualando los valores obtenidos analíticamente (ecuaciones 15 y 16) a los calculados (ecuaciones 17 y 18) y obligando a que los coeficientes de la misma potencia de  $r$  sean iguales se llega a las expresiones:

$$K_I = \sqrt{2\pi/L} \frac{\mu}{k+1} [4(v_B - v_D) + v_E - v_C] \quad (19)$$

$$K_{II} = \sqrt{2\pi/L} \frac{\mu}{k+1} [4(u_B - u_D) + u_E - u_C] \quad (20)$$

La precisión de estas sencillas expresiones ha sido comprobada comparando con los resultados obtenidos por otros autores para diversas geometrías<sup>6</sup>. Las conclusiones a que se llega es que la precisión depende de la relación  $L/a$  y del número de elementos singulares que rodean la fisura.

Con relación al parámetro  $L/a$ , se han comparado los resultados obtenidos con este método con los indicados en la norma ASTM-E399 para probetas de flexión en tres puntos<sup>18</sup>. Las diferencias eran  $-8\%$  para  $L/a = 0.20$  y  $-1\%$  para  $L/a = 0.03$ . En general, y para evitar mallas excesivamente finas, se puede señalar que el parámetro  $L/a$  debe estar comprendido entre:

$$0,05 < L/a < 0,15 \quad (21)$$

Aunque FEFAP no incluye esta condición, el usuario puede interactivamente modificar el tamaño de los elementos situados en el borde de la fisura variando la posición de algunos nudos.

Respecto de los elementos que rodean la fisura, los resultados indican que ningún elemento debe abarcar un ángulo mayor de  $60^\circ$ , siendo óptimo el valor de  $45^\circ$ . Para las probetas de flexión en tres puntos, según la norma ASTM E399, el efecto de aumentar el número de elementos que rodean la fisura de 6 ( $60^\circ$ ) a 8 ( $45^\circ$ ) es doblar la precisión de los resultados para un mismo valor del parámetro  $L/a$ <sup>18</sup>.

## TECNICAS NUMERICAS Y GRAFICAS

El modelo expuesto anteriormente requiere realizar un gran número de operaciones cada vez que se va a propagar la fisura (cálculo de los factores de intensidad de tensiones, determinación de la dirección de propagación, estabilidad de la propagación, etc.). Si cada una de estas tareas debe realizarse manualmente, el tiempo empleado en cada análisis sería demasiado elevado. Para poder disponer de una herramienta eficaz ha sido necesario desarrollar una serie de subrutinas que automaticen esos procesos. Con la ayuda de estos algoritmos y de las técnicas de diseño gráfico asistido por ordenador se ha conseguido elaborar un código versátil y eficaz para el análisis de la propagación de fisuras en estructuras de hormigón.

### Pre-Proceso y Post-Proceso

La generación de la malla de elementos finitos se realiza automáticamente por el programa a partir de los datos del contorno suministrados al ordenador mediante una tableta gráfica. Entre los diversos métodos existentes para la generación de la malla (transformaciones laplacianas, isoparamétricas, etc.) se eligieron las transformaciones transfinitas<sup>19</sup>. El método general de las transformaciones transfinitas genera una superficie o un volumen que se ajusta al volumen o superficie descado en un número no numerable de puntos en contraste con las transformaciones isoparamétricas que lo hacen en un número finito de puntos. Sin entrar en más detalles (véase, por ejemplo<sup>20</sup>) este tipo de transformaciones permite —en dos dimensiones— modelizar exactamente cualquier tipo de contorno, y los puntos singulares del contorno no necesitan un tratamiento especial cuando se genera la malla. Junto a esto, el programa está dotado de rutinas para generar las curvas del contorno con el fin de minimizar los datos de entrada.

Una vez generada la malla es necesario añadir el resto de la información necesaria para el análisis. Aunque algunos de estos datos han de introducirse numéricamente (p.e.: las propiedades de los materiales), la unión de estos atributos con los datos geométricos se puede realizar de manera sencilla mediante técnicas gráficas tales como señalar los nudos o los elementos a lo que se quiere conferir una determinada propiedad.

Una vez realizado un cálculo, el módulo de post-proceso permite acceder a los resultados (reacciones, tensiones, deformaciones, factores de intensidad de tensiones, etc.), con objeto de que el usuario pueda adoptar las medidas que crea necesarias en el siguiente análisis (Figura 9). La naturaleza modular de los programas de pre-proceso y post-proceso permite en cualquier momento del análisis variar las propiedades de los materiales, las cargas exteriores o las condiciones de contorno, de modo que se pueda reflejar mejor el comportamiento real de la estructura.

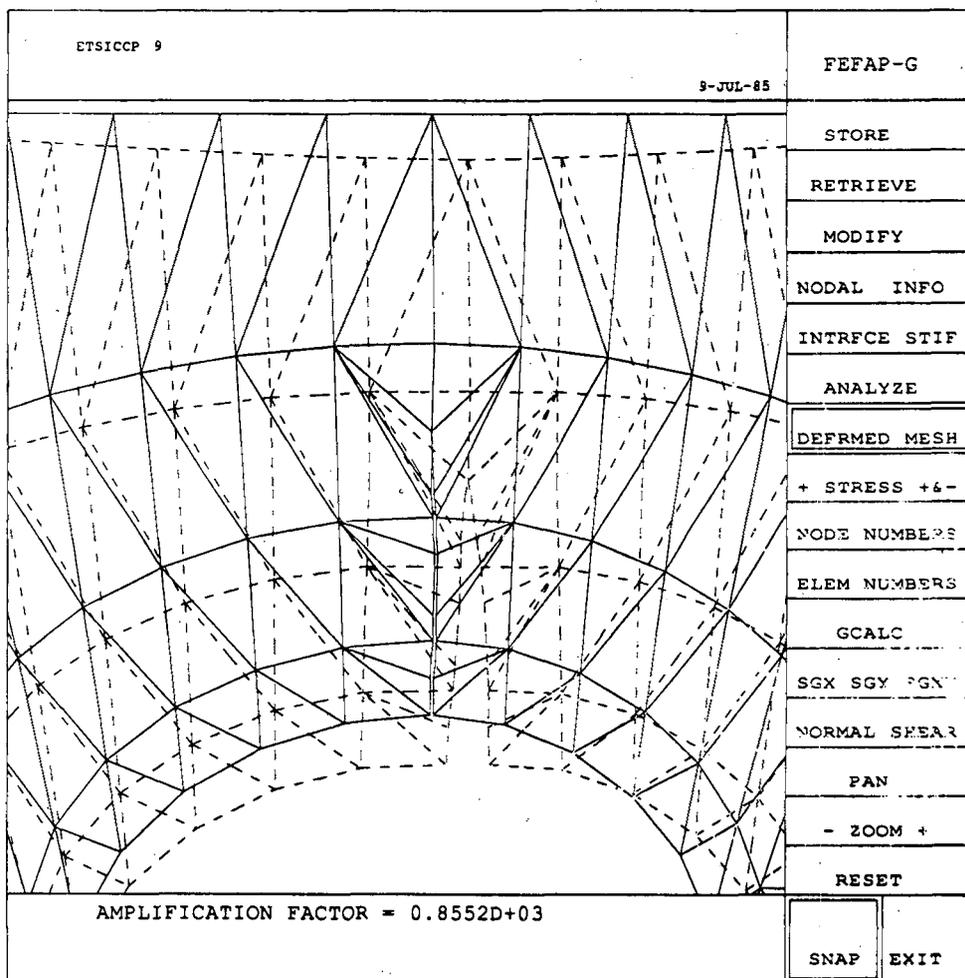


Figura 9. Malla fisurada y deformada de la estructura.

### Propagación de la Fisura

Sin embargo, la característica más importante de FEFAP es su capacidad de modificar automáticamente la topología de la malla de elementos finitos para simular la aparición o la propagación discreta de una fisura en una dirección y una longitud arbitrarias. En el caso más general, una fisura al propagarse puede atravesar un elemento triangular o rectangular de varios modos diferentes: puede entrar por un nudo o por un lado y salir por otro nudo u otro lado o detenerse dentro del elemento. Todas estas situaciones dan lugar a 25 combinaciones diferentes (Fig. 10) que se han tenido en cuenta al desarrollar el programa. Una vez que la fisura ha atravesado completamente un elemento, el programa busca cuál de los elementos adyacentes será atravesado y, en su caso, si la fisura se detendrá dentro de él.

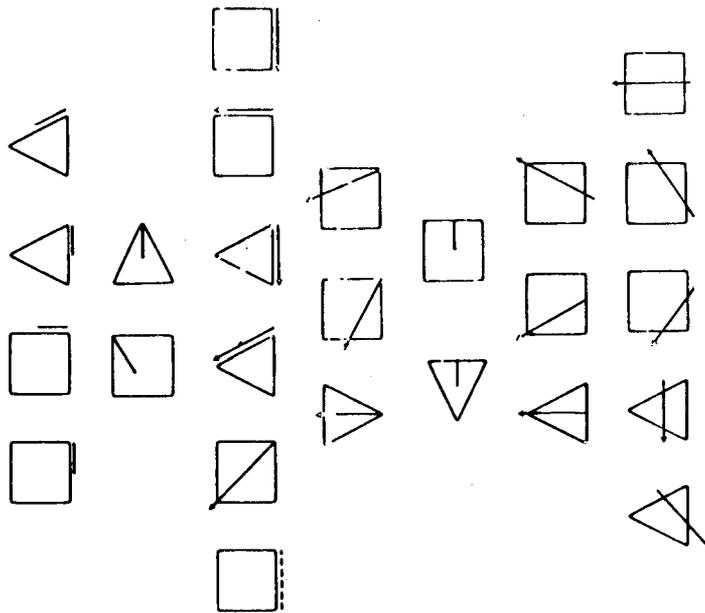


Figura 10. Modos de propagación de la fisura en un elemento.

Aunque se ha realizado un gran esfuerzo para automatizar completamente este proceso, es imposible asegurar que el algoritmo cubre todas y cada una de las posibles propagaciones de cada análisis. Por ello, en este punto es el juicio del investigador el que, con la ayuda de un terminal gráfico de alta resolución, puede interactivamente hacer las correcciones que crea oportunas en la malla modificada. Estas correcciones permiten cambiar la posición de un nudo o de un lado de un elemento o bien aumentar el número de elementos singulares que rodean la fisura con objeto de que la malla resultante permita obtener unos valores suficientemente precisos de los factores de intensidad de tensiones.

Si en un determinado momento de análisis se desea iniciar una fisura, el usuario sólo debe indicar el lugar y cuál de los dos sentidos posibles de propagación desea (ambos situados en la perpendicular a la dirección de las tensiones principales máximas en ese punto). El programa genera dos nudos en el punto donde se va a iniciar la fisura y la propaga la longitud requerida de acuerdo con los criterios antes expuestos.

Cuando la nueva malla cumple todos los requisitos deseados, una última rutina determina qué lados de los elementos que rodean el borde de la fisura confluyen en ésta y desplaza en estos lados los nudos intermedios para convertir los nuevos elementos

en elementos singulares. Mediante la reenumeración automática de todos los nudos<sup>21</sup> se consigue un ancho de banda mínimo con lo que los tiempos de cálculo en cada paso del programa se mantienen dentro de límites aceptables.

El programa tiene también en cuenta algunas situaciones patológicas que pueden aparecer. Por ejemplo, cuando la fisura atraviesa alguna barra de la armadura. Como es evidente que la fisura se propagará en el hormigón sin romper la barra de acero, se han introducido las modificaciones convenientes para asegurar la continuidad en desplazamientos de los elementos que modelizan el acero. Otra situación particular puede aparecer cuando un elemento es dividido en dos al propagarse la fisura y uno de los nuevos elementos tiene una relación alto/ancho demasiado alta o baja. Entonces uno de los lados del elemento original se modifica de modo que la fisura se propague entre los bordes de dos elementos adyacentes (Fig. 11).

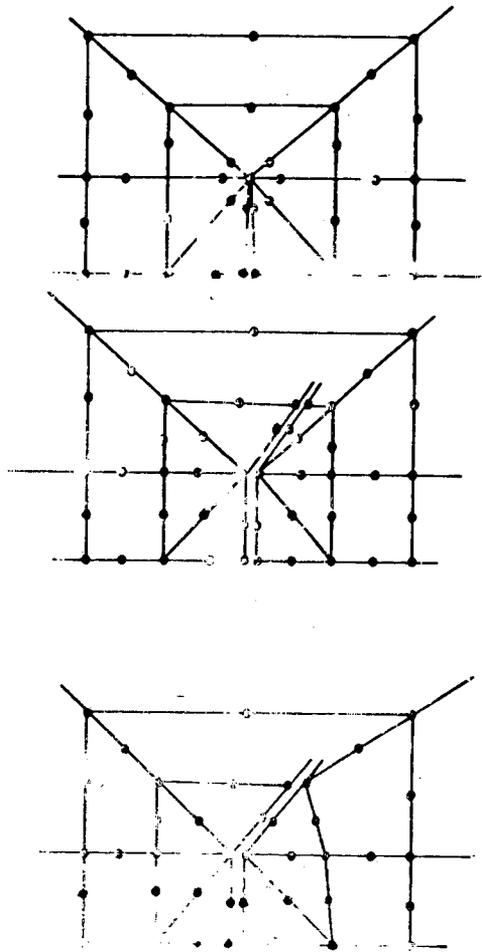


Figura 11. Generación automática de la malla al propagarse la fisura.



el hormigón microfisurado depende del COD y del deslizamiento producido entre los labios de la grieta (comúnmente denominado CSD, "Crack Sliding Displacement"). Desde el punto de vista del cálculo por el método de los elementos finitos el comportamiento no lineal del hormigón en la zona de fractura se ha incorporado generando topológicamente en esa zona una grieta y uniendo los labios de la fisura mediante unos elementos finitos especiales<sup>23</sup>.

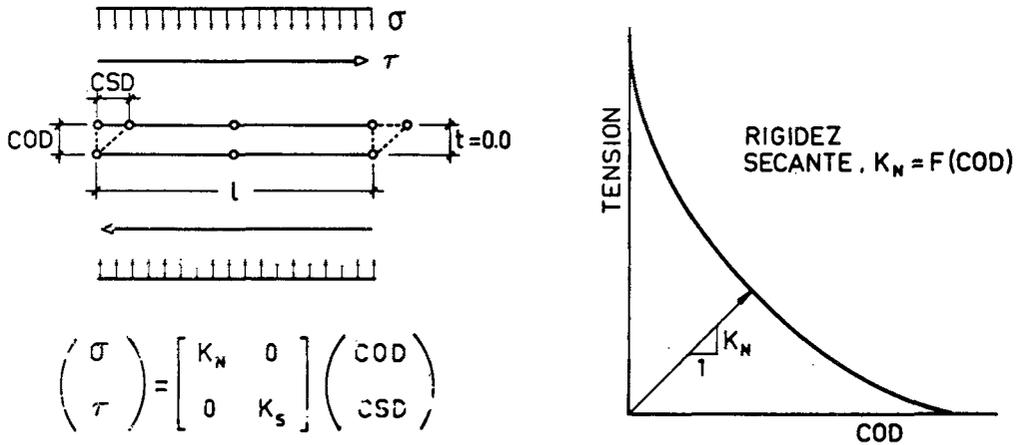


Figura 13. Elementos de junta para modelizar el comportamiento no lineal en la zona de fractura.

La formulación básica y el comportamiento de estos elementos de junta se ha representado en la figura 13a. Inicialmente, al insertarse en la malla, estos elementos tienen espesor nulo. Cuando, en el curso del análisis, son sometidos a tracción presentan un ablandamiento normal y tangencial que depende de los valores del COD y del CSD a través de las rigideces secantes normal y tangencial  $K_N$  y  $K_T$  (figura 13b). Por compatibilidad con el resto de los elementos finitos usados por FEFAP, los elementos de junta son isoparamétricos y la matriz de rigidez es de la forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_N & 0 \\ 0 & K_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} COD \\ CSD \end{bmatrix}$$

donde:

$\sigma$ : Tensión normal a la fisura.

$\tau$ : Tensión tangencial a lo largo de la fisura.

cuando están sometidos a tracción. Los elementos de junta impiden el solapamiento de los labios de la grieta y cuando el COD alcanza un valor crítico, su rigidez es nula

indicando que en ese punto se ha llegado al final de la microfisuración produciéndose una verdadera fisura.

En cada elemento de junta, las rigideces secantes se obtienen a partir de las curvas de tensión normal y tangencial frente al COD y al CSD obtenidas experimentalmente para el material estudiado. El equilibrio entre tensiones y desplazamientos en estos elementos se consigue mediante cálculos iterativos. Durante cada una de las iteraciones, los desplazamientos nodales calculados en cada paso se almacenan y son utilizados en el siguiente paso para determinar las tensiones a partir de las rigideces secantes. Con esas nuevas tensiones se realiza un nuevo análisis, obteniéndose los nuevos desplazamientos en los nodos. En el caso de coincidir con los desplazamientos de partida se ha llegado a la convergencia y, en caso de no ser así, se repite el proceso.

El algoritmo no lineal de propagación de fisuras del programa FEFAP utiliza los elementos de junta a la vez que los elementos singulares usados en el análisis lineal. Estos elementos son emplazados automáticamente por la rutina de propagación de fisuras al final de la zona de fractura. Existen dos razones que explican este modo de proceder. Por un lado, al disponer de los elementos singulares siempre se puede, en un mismo análisis, hacer una transición de un modelo no lineal --que lleva consigo el desarrollo de una zona de fractura-- a un modelo lineal cuando la zona de fractura tiene un tamaño despreciable frente a la longitud total de la grieta. Esta transición se facilita cuando se mantiene el uso de los elementos singulares en los algoritmos de remallado.

La segunda razón se basa en el uso de los factores de intensidad de tensiones en el modelo no lineal para determinar la dirección de propagación de la fisura. Teóricamente, los factores de intensidad de tensiones al final de la zona de fractura deberían ser nulos. Si los desplazamientos calculados en los elementos singulares indican que  $K_I$  y/o  $K_{II}$  son distintos de cero quiere decir que la fisura debería haberse propagado más allá del punto donde se encuentra actualmente el final de la zona de fractura. La dirección de propagación se calcula a partir de los criterios ya señalados y el incremento de longitud de la fisura es fijado por el usuario<sup>2</sup>.

En el caso de que los factores de intensidad de tensiones sean nominalmente cero para un nivel de cargas dado, se realizan nuevos análisis incrementando las cargas exteriores hasta que la capacidad resistente del material en la zona de fractura se agota completamente y aparecen valores distintos de cero para  $K_I$  y/o  $K_{II}$ . Entonces se propaga la fisura la longitud deseada. El algoritmo coloca automáticamente elementos de junta entre los labios de la discontinuidad creada y, al final de ésta, sitúa los elementos singulares. El proceso se repite hasta que se llega a la rotura final de la estructura.

## APLICACIONES

### Análisis Lineal: La Presa de Fontana

La presa de Fontana es una presa de gravedad de 720 m. de longitud y 146 m. de altura máxima, construida entre 1942 y 1944 en el río Little Tennessee (Carolina del Norte, EE.UU.). A finales de 1972 se detectó una grieta en una galería de servicio. Se inició la investigación de las causas de la fisuración y, por primera vez, se aplicó la teoría de la Mecánica de Fractura elástica y lineal a una gran estructura de hormigón (Fig. 14).

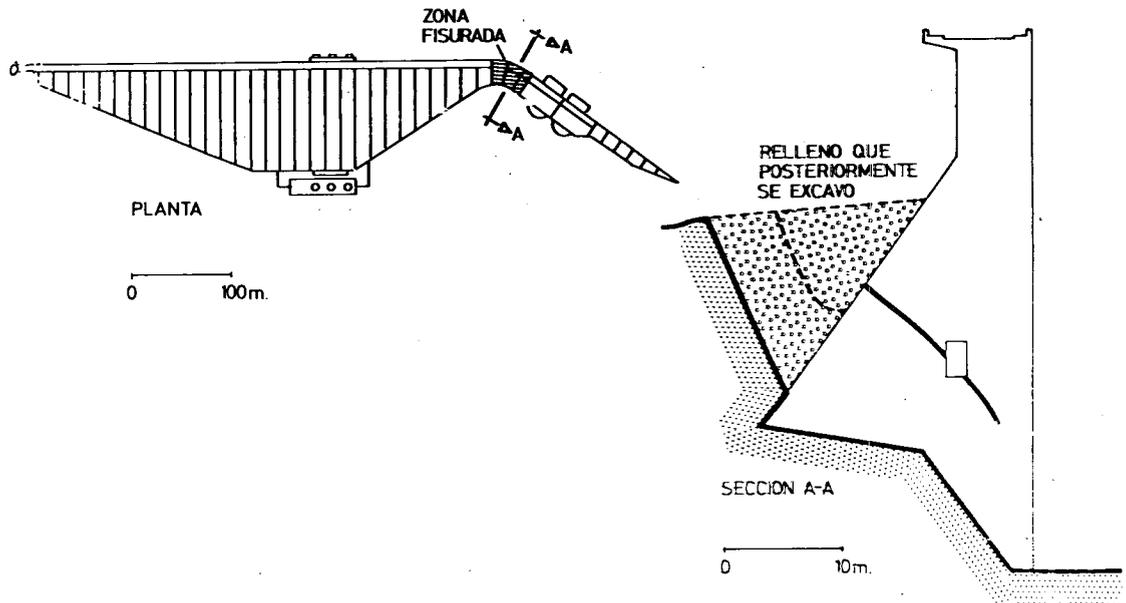


Figura 14. Presa de Fontana.

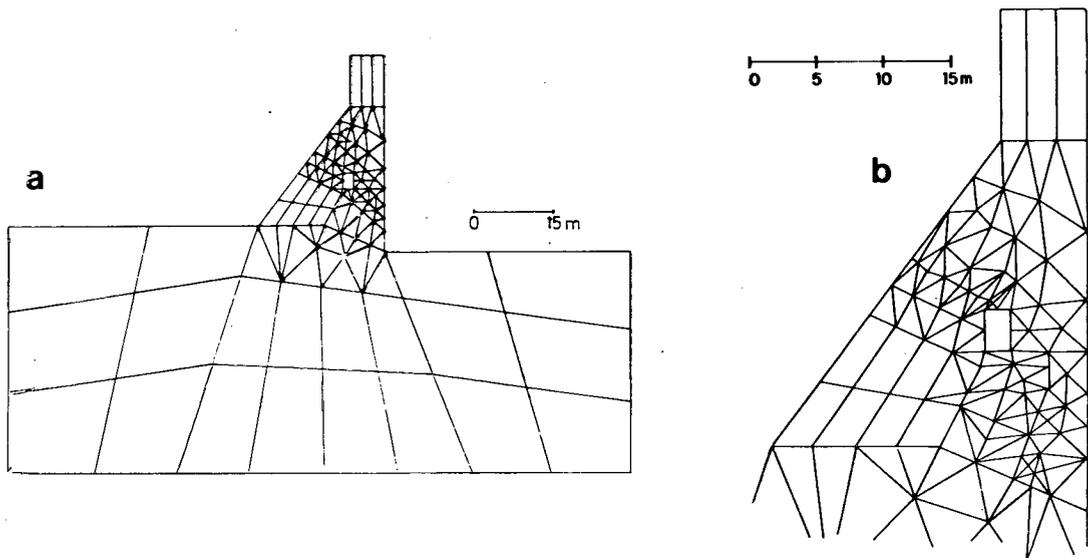


Figura 15. Mallas de elementos finitos de la presa de Fontana.  
a) Malla inicial. b) Malla final.

Los propietarios de la presa, después de unos primeros estudios, indicaron como causas del agrietamiento los efectos térmicos y la dilatación del hormigón por reacción entre los álcalis del cemento y la sílice activa de los áridos. Con base a estos datos se hizo un primer cálculo tridimensional de la presa en el que se tuvieron en cuenta como acciones el peso propio, el empuje hidrostático, la presión del relleno y los esfuerzos de origen térmico. Los resultados señalaron la preponderancia de los esfuerzos térmicos sobre las demás acciones en las épocas de verano cuando el embalse estaba casi vacío y era más probable la fisuración.

Partiendo de estos resultados se estudió una sección de la zona fisurada siguiendo el método descrito en este artículo, aunque menos automatizado: en cada paso el ángulo  $\theta$  se calculaba manualmente así como la reordenación de la red en cada paso de la propagación de la fisura (Fig. 15). La influencia del resto de la presa sobre la sección considerada se introdujo imponiendo como condiciones de contorno al problema bidimensional los desplazamientos anteriormente calculados y que, en cierto modo, reflejan el empuje sobre la región fisurada al dilatarse la presa. La influencia del hormigón expansivo se incorporó del mismo modo que antes, multiplicando los resultados del cálculo numérico por un factor de corrección. Se supuso que la grieta se había iniciado en el paramento de aguas arriba de la presa, donde aparecían las máximas tracciones. El valor de  $K_{IC}$  del hormigón, al no disponer de resultados experimentales, se determinó calculando los valores de  $K_I$  y  $K_{II}$  para diversas longitudes iniciales de la fisura y suponiendo que las únicas fisuras preexistentes a la iniciación podrían ser fisuras interiores entre el árido y el mortero. De este modo se obtuvo un valor de  $1.2 \text{ MPa}\sqrt{m}$ , que es bastante razonable para el hormigón a la vista de los resultados disponibles actualmente.

A continuación se realizó el estudio de la propagación de la fisura, contrastando en cada paso los tres criterios comentados. Como puede observarse en la tabla 1 los tres son prácticamente equivalentes.

TABLA 1. COMPARACION DE LAS PREDICCIONES DE  $\theta_0$

Incremento de la Fisura		Angulo $\theta_0$ (en grados)		
Posición (fig. 20)	$\Delta a$ (cm)	$G(\theta)_{max}$	$S(\theta)_{min}$	$\sigma(\theta)_{max}$
1	99	-8	-8	-8
2	91	+9	+9	+9
3	91	-11	-11	-11
4	91	+12	+12	+12
5	91	-12	-12	-12
6	91	+20	+18	+20
7	91	-28	-25	-29
8	91	+2	+2	+2
9	97	+12	+12	+12
10	91	-28	-25	-32
11	91	+35	+29	+37
12	183	-18	-18	-18
13	152	+30	+24	+32
14	152	-30	-25	-31
15	152	+9	+9	+9

Por motivos económicos, la propagación se hizo sólo utilizando el criterio de  $G(\theta)_{max}$ . Como puede verse en la Figura 16, los resultados del cálculo se aproximan con bastante precisión a la trayectoria seguida por la fisura. Un examen más detallado de este estudio puede encontrarse en otros lugares<sup>13, 24</sup>.

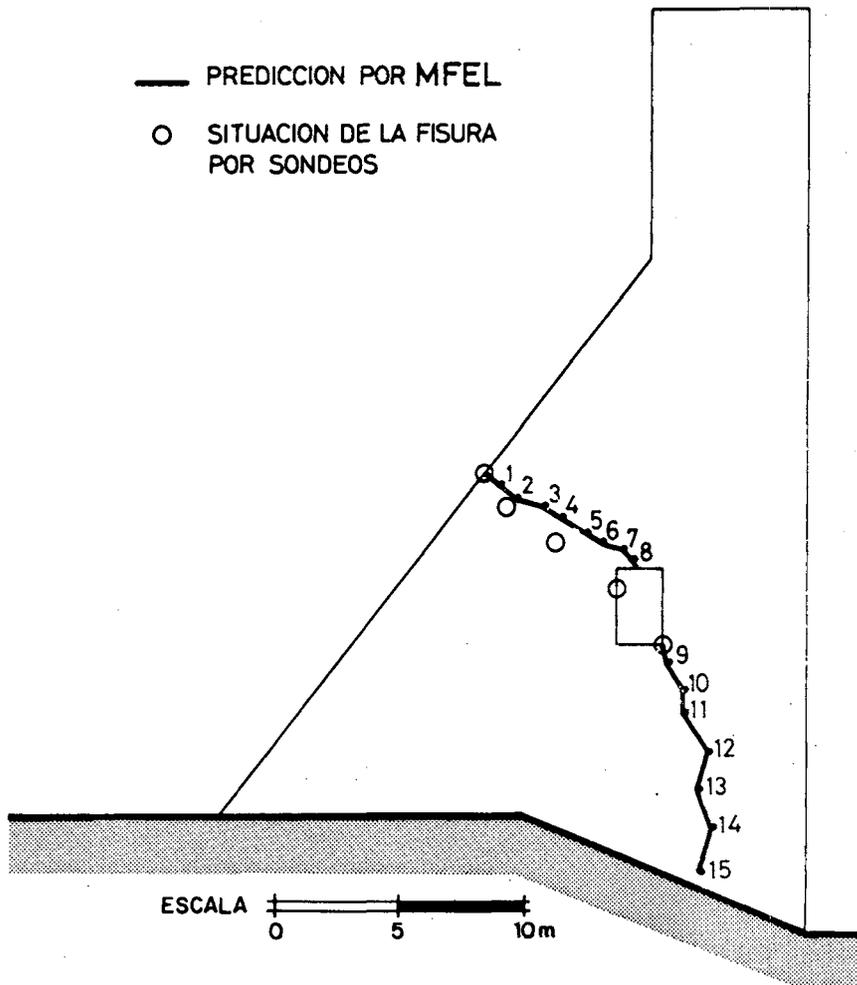


Figura 16. Propagación de la fisura. Comparación entre los resultados teóricos y los sondeos.

#### Análisis no Lineal: Ensayo de Adherencia

Se han realizado muchos ensayos para estudiar la adherencia entre un cilindro de hormigón que rodea una barra de acero de armar a la que se somete a tracción. Mediante el uso de FEFAP se realizó un estudio no lineal de los resultados experimentales

obtenidos por Broms y Raab<sup>25</sup> (figura 17). El análisis se realizó suponiendo que existía simetría axial por lo que no se pudieron modelizar las fisuras longitudinales que algunas veces aparecen en estos ensayos. Las características de la malla de elementos finitos utilizada pueden encontrarse en las referencias<sup>26</sup>. La progresiva fisuración experimentada por el hormigón al incrementarse la carga puede observarse en las figuras 18a y 18b. Esas grietas se denominan "fisuras secundarias". Las fisuras secundarias siempre se inician en el acero y se propagan radialmente hacia el exterior. Cuando se empieza a cargar la barra de acero, la primera fisura secundaria se forma con cargas muy bajas en las proximidades del lugar en que el acero sale fuera del hormigón, como puede verse en la figura 18a. Cada una de las fisuras secundarias se comienza a propagar en los rebordes de la barra corrugada. Este comportamiento pudo observarse en los resultados experimentales (figura 19). Cuando se aumenta la carga las fisuras secundarias se propagan y, a la vez, se van creando otras nuevas en los rebordes de las barras a lo largo del cilindro de hormigón. Para la carga correspondiente a la figura 18b se agota la capacidad resistente del hormigón y aparece una fisura principal que divide en dos el hormigón. Cuando esta fisura primaria se abre lo suficiente, vuelven a aparecer fisuras secundarias en respuesta a la nueva superficie libre creada por la fisura principal. Estas fisuras secundarias al propagarse se dirigen hacia la fisura principal más próxima (figura 19). Este comportamiento se repite secuencialmente a lo largo de la probeta comenzando por ambos extremos produciéndose la rotura cuando se ha desarrollado en todo el cilindro. Los resultados del análisis no lineal realizado con FEFAP (figura 18b) se aproximan a los resultados experimentales de la figura 19, indicando la capacidad del modelo utilizado para representar situaciones en las que el comportamiento no lineal es dominante.

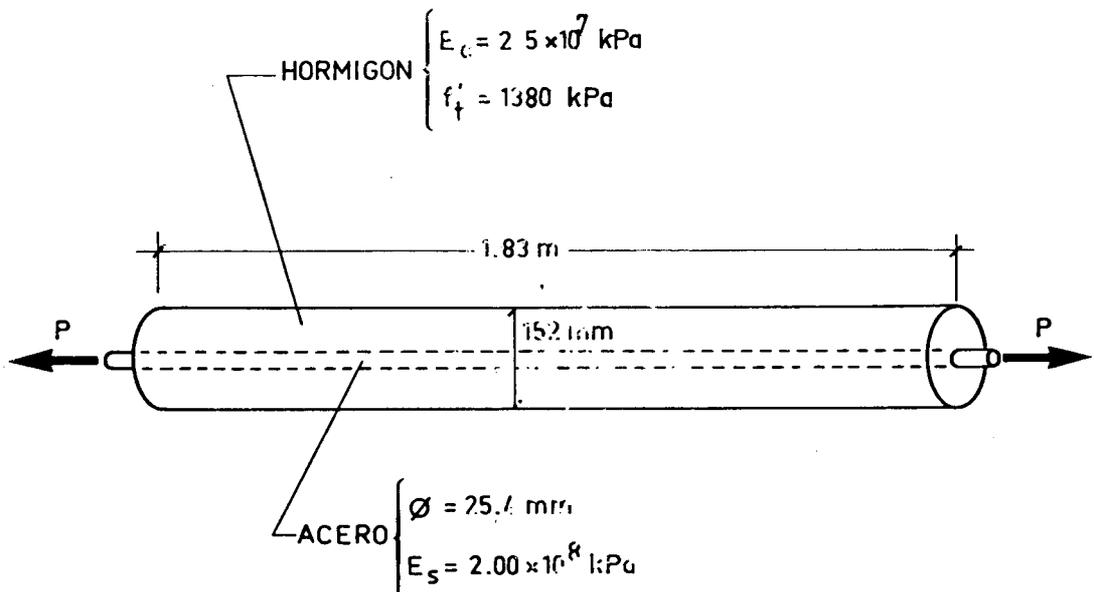


Figura 17. Ensayo de adherencia. Geometría y propiedades de los materiales.

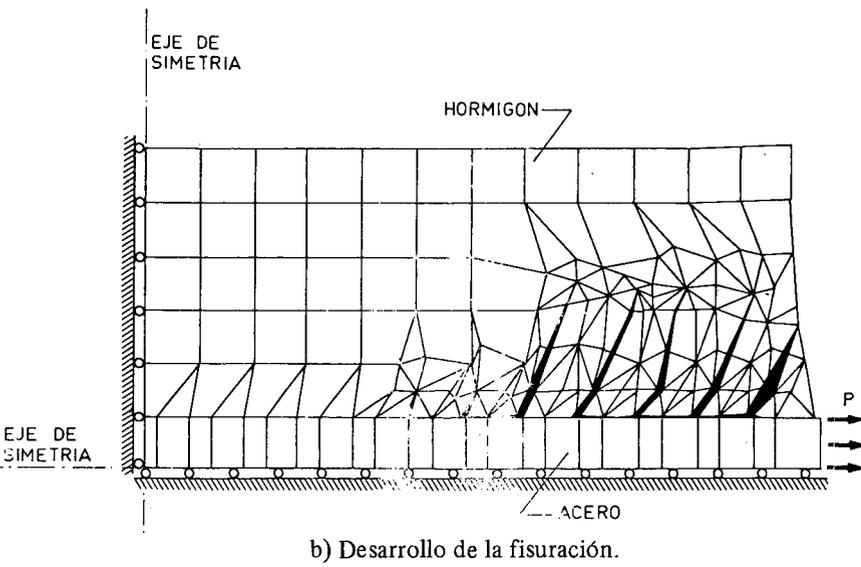
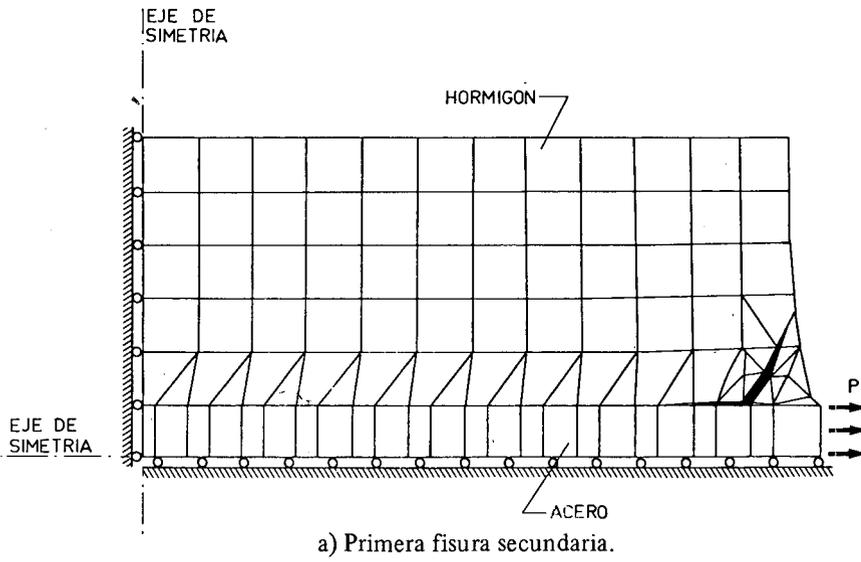


Figura 18. Resultados de análisis.



Figura 19. Resultados experimentales del ensayo de adherencia.

## MODELOS DE PROPAGACION DE FISURAS: EL FUTURO

El rápido desarrollo de la capacidad de cálculo de los miniordenadores y de las técnicas de diseño gráfico asistido por ordenador ha permitido la aparición de códigos para la propagación discreta de fisuras con unas posibilidades que hace apenas una década parecían imposibles de conseguir. La pregunta que se impone plantear es: ¿Cuáles deben ser las líneas de trabajo en los próximos años en la modelización de la propagación discreta de fisuras?

Parece evidente que el objetivo es conseguir elaborar códigos que permitan la propagación de fisuras en tres dimensiones. Para estas situaciones hace falta aún realizar un fuerte trabajo experimental que permita conocer, en un estado multiaxial de tensiones, cuáles son los criterios de fractura a utilizar en el hormigón y cuáles son las ecuaciones constitutivas del hormigón microfisurado.

Desde el punto de vista del cálculo, los constantes avances en la velocidad de cálculo y capacidad de almacenamiento de los miniordenadores permiten analizar hoy en día problemas tridimensionales de decenas de miles de grados de libertad en pocos minutos. Hasta ahora, el principal problema para realizar estos estudios tridimensionales era el gran esfuerzo humano que se había de realizar en la preparación de los datos y en el análisis de los resultados. Esta labor tediosa y muy proclive al error ha reducido la aplicación práctica de las capacidades de cálculo disponibles.

El constante aumento en el uso de los terminales gráficos de alta resolución y el desarrollo de sofisticados programas para el pre-proceso y el post-proceso de los resultados en tres dimensiones permiten eliminar gran parte del esfuerzo humano mientras que, simultáneamente, permiten que el usuario controle el programa en tiempo real. Durante el transcurso de un análisis para predecir el tamaño, la forma y la dirección de propagación de una fisura en una estructura tridimensional es necesario examinar y modificar la malla de cálculo muchas veces. Esto sólo puede hacerse en un medio ambiente donde la información se pueda examinar gráficamente y donde el usuario pueda interactivamente con los cálculos modificar todos los parámetros que crea necesarios en cada momento del análisis. Es por tanto necesario desarrollar los programas que automáticamente propaguen fisuras en tres dimensiones y que introduzcan los cambios topológicos en la malla para la necesaria precisión en los cálculos. Es de esperar que dentro de pocos años existirán estos programas con la misma versatilidad de los existentes hoy en día para dos dimensiones.

## REFERENCIAS

1. S. Mindess, "The cracking and fracture of concrete: An annotated bibliography 1928-1980", *Material Research Series, Report, 2*, The University of British Columbia, Vancouver, (1981).
2. A. R. Ingraffea y V. Sauoma, "Numerical modeling of discrete crack propagation in reinforced and plain concrete", *Fracture Mechanics of Concrete*, Sih, Di Tommaso, Eds., 141-170, (1985).
3. M. Elices, "La influencia del tamaño en la fragilidad de un elemento estructural", *Tecnología Dos Mil*, 1, 36-46, (1985).
4. A. Carpinteri, "Scale effects in fracture of plain and reinforced concrete structures", *Fracture Mechanics of Concrete*, Sih, Di Tommaso, Eds., 95-140, (1985).
5. A. R. Ingraffea y W. H. Gerstle, "Non-linear fracture models for discrete crack propagation", *Proceedings NATO Workshop*, Northwestern University, (1985).
6. V. Sauoma, *Interactive finite element analysis of concrete: A fracture mechanics approach*, Ph. D. Thesis, Cornell University, (1981).
7. M. Elices, *Mecánica de la fractura aplicada a sólidos elásticos bidimensionales*, Universidad Politécnica de Madrid, (1986).

8. F.H. Wittmann, Ed., *Fracture Toughness*, Proc. Int. Conf. Fracture Mechanics of Concrete, Session E, Lausanne, (1985).
9. G.C. Sih, "Strain-energy-density factor applied to mixed-mode crack problems", *Int. Journal Fracture*, **15**, 305-321, (1974).
10. G.C. Sih, "Methods of analysis and solutions of crack problems", *Mechanics of Fracture*, **1**, Noordhoff Int. Publ., XXI-XLV, (1973).
11. F. Erdogan y G.C. Sih, "On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear", *ASME, Journal Basic Engineering*, **85**, 519-527, (1963).
12. M.A. Hussain, S.L. Pu y J.H. Underwood, "Strain energy release rate for a crack under combined mode I and mode II", *ASTM STP* **560**, 2-28, (1974).
13. M. Elices, J. Llorca y A.R. Ingraffea, "Fractura del hormigón en régimen elástico y lineal. Un ejemplo: La presa de Fontana", *Informes de la Construcción*, **37**, 19-33, (1985).
14. M. Arrea y A.R. Ingraffea, *Mixed-mode crack propagation in mortar and concrete*, Report 81-13, Department Structural Engineering, Cornell University, (1982).
15. R.S. Barsoum, "On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **10**, 25-37, (1976).
16. C.E. Freese y D.M. Tracey, "The natural isoparametric triangle versus collapsed cuadrilateral for elastic crack analysis", *Int. Journal Fracture*, **12**, 767-770, (1976).
17. C.F. Shih, H.G. De Lorenzi y M.D. German, "Crack extension modeling with singular cuadratic isoparametric element", *Int. Journal Fracture*, **12**, 647-651, (1971).
18. A.R. Ingraffea y C. Manu, "Stress intensity factor computations in three dimensions with quarter-point crack tip elements", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **12**, 235-248, (1978).
19. R. Haber, M.S. Shepard, J.F. Abel, R.H. Gallagher y D.P. Greenberg, "A general two-dimensional finite element preprocessor utilizing discrete transfinite mappings", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **17**, 1015-1044, (1981).
20. W.J. Gordon y C.A. Hall, "Construction of curvilinear co-ordinate systems and applications to mesh generation", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **8**, 461-477, (1976).
21. N.E. Gibbs, W.J. Poole y P.K. Stockmeyer, "An algorithm for reducing bandwidth and profile of a sparse matrix", *SIAM, J. Num. Anal.*, **13**, 236-250, (1976).
22. J. Planas y M. Elices, "Fractura del hormigón en régimen no lineal. Intentos para medir la energía de fractura  $G_F$ ", *Informes de la Construcción*, **37**, 35-52, (1985).
23. R.E. Goodman, R.L. Taylor y T.L. Brekke, "A model for the mechanics of jointed rock", *J. Soil Mechanics, ASCE*, **94(5) (SM3)**, 637-659, (1968).
24. R.C. Sloan y T.J. Abraham, "TVA cuts deep slot in dam, ends cracking problems" *ASCE, J. Civil Engng.*, **48**, 66-70, (1978).
25. B. Broms y A. Raab, *The fundamental concepts of the cracking phenomenon in reinforced concrete beams*, Department of Structural Engineering, Report 310, Cornell University, (1961).
26. W. Gerstle, A.R. Ingraffea y P. Gergely, "Tensión stiffening: A fracture mechanics and interface element approach", *Proc. Int. Conf. on Bond in Concrete*, Paisley, 97-106, (1982).

