

## PRECISION EN LA DISCRETIZACION DE PROBLEMAS UNIDIMENSIONALES DE PROPAGACION DE ONDAS

FRANCISCO MEDINA

y

FERNANDO ROSALES

*Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas*

*Universidad de Chile*

*Casilla 2777, Santiago*

### RESUMEN

Se presenta un estudio de la precisión del método de elementos finitos en discretizaciones que modelan problemas de propagación de ondas. Con discretizaciones de elementos finitos de tamaño constante se obtienen curvas de error de soluciones numéricas para problemas unidimensionales. En particular, se trata el caso de las reflexiones numéricas artificiales producidas al modelar problemas no acotados con elementos finitos e infinitos. Las curvas de error obtenidas proporcionan criterios para un diseño racional de mallas.

### SUMMARY

A study of the precision of the finite element method in discretizations modeling wave propagation problems is presented. With constant size finite element discretizations, error curves are obtained for numerical solutions to one-dimensional problems. In particular, the case of numerical reflections artificially produced is treated when modeling unbounded problems with finite and infinite elements. The error curves obtained yield criteria for rational mesh design.

### INTRODUCCION

El método de elementos finitos es una herramienta numérica usada extensamente en la modelación y solución de problemas transientes y de propagación de ondas. Aplicaciones prácticas del método se encuentran en diversas áreas, tales como la dinámica estructural, la hidrodinámica, la elastodinámica, los problemas de interacción, etc.

Al discretizar el dominio de definición del problema considerado es necesario tomar en cuenta el tipo de ondas que se desea se propague dentro del modelo numérico definido. El tamaño y refinamiento del modelo numérico es un problema importante de la discretización, ya que de aquéllos depende la precisión de la solución.

Anteriormente se estudió<sup>1</sup> la precisión del método de elementos finitos en la modelación de problemas no acotados de propagación unidimensional de ondas. También, se han estudiado las reflexiones numéricas entre elementos, que se producen artificial-

Recibido: Julio 1985

mente cuando se modifica el refinamiento de elementos unidimensionales, tanto abruptamente<sup>2, 3</sup> como gradualmente<sup>4</sup>.

En el presente trabajo se estudia la precisión del método de elementos finitos en el cálculo de las frecuencias naturales de una región finita libre de vibrar en una dirección. Luego, se estudia la precisión del método en el cálculo de los desplazamientos de un medio semi-infinito por el cual una onda armónica se propaga unidireccionalmente. Este medio se caracteriza por dos regiones: una región finita modelada con elementos finitos (región cercana, *rc*) y una región semi-infinita modelada con un elemento infinito (región lejana, *rl*). Finalmente, se presenta un estudio de las reflexiones numéricas artificiales que se producen en la interfase entre la *rc* y la *rl* (frontera exterior, *fe*).

### FORMULACION DEL PROBLEMA

Sin pérdida de generalidad, esta formulación se hace tomando como referencia los movimientos de un medio isotrópico que vibra debido a la acción de una onda elástica que viaja en una dirección. La ecuación de equilibrio del medio para vibraciones no amortiguadas es

$$u_{,xx}(x,t) - \frac{1}{c^2} \ddot{u}(x,t) = \frac{1}{\rho c^2} p(x,t) \quad (1)$$

donde  $u(x,t)$  y  $p(x,t)$  son respectivamente el desplazamiento y la sollicitación por unidad de longitud sobre el punto  $x$  en el tiempo  $t$ ;  $c$  es la velocidad de propagación de la onda y  $\rho$  es la densidad de masa por unidad de longitud.

Al discretizar el medio mediante elementos, los desplazamientos  $u^e$  correspondientes al elemento  $e$  se aproximan por

$$u^e(x,t) = \mathbf{N}^e(x) \mathbf{u}^e(t) \quad (2)$$

donde  $\mathbf{N}^e(x)$  contiene a las funciones de forma supuestas en el punto  $x$  para el elemento  $e$  y  $\mathbf{u}^e$  contiene los desplazamientos nodales. Al introducir Ec. (2) en Ec. (1) y aplicar métodos conocidos de minimización de errores,<sup>5</sup> la ecuación de equilibrio para cada elemento queda

$$\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{u}}^e(t) + \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e(t) = \mathbf{p}^e(t) \quad (3)$$

donde la matriz de masa consistente  $\mathbf{M}^e$ , la matriz de rigidez  $\mathbf{K}^e$  y el vector de sollicitaciones  $\mathbf{p}^e(t)$  están definidos como

$$\mathbf{M}^e = \int_{l^e} [\mathbf{N}^e]^T \frac{1}{(c^e)^2} [\mathbf{N}^e] dx \quad (4)$$

$$\mathbf{K}^e = \int_{l^e} [d\mathbf{N}^e/dx]^T [d\mathbf{N}^e/dx] dx \quad (5)$$

y

$$\mathbf{p}^e(t) = \int_{l^e} [\mathbf{N}^e]^T \frac{1}{\rho^e (c^e)^2} p(x,t) dx \quad (6)$$

respectivamente. La matriz de masa consistente tiene un perfil similar a la matriz de rigidez. Este hecho hace que a menudo se utilice una matriz de masa concentrada, la cual es diagonal, con lo cual el número de operaciones necesario para obtener la solución de Ec.(3) disminuye. Una manera aceptada de concentrar la masa es suponer que el elemento  $j$ -ésimo de la diagonal de  $\mathbf{M}^e$  es

$$\mathbf{M}_j^e = \int_{I^e} N_j^e \frac{1}{(c^e)^2} dx \quad (7)$$

Si el medio presenta un comportamiento lineal, la solución de Ec.(3) puede obtenerse en dos pasos. En el primer paso, se obtiene la respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia para solicitaciones armónicas del tipo  $e^{i\omega t}$ . En el segundo paso, se obtiene la respuesta en el dominio del tiempo mediante una síntesis de Fourier sobre el rango de frecuencias presente en la excitación. Luego, suponiendo una variación armónica en el tiempo  $e^{i\omega t}$  para las solicitaciones y las respuestas, Ec.(3) queda

$$[-\omega^2 \mathbf{M}^e + \mathbf{K}^e] \mathbf{u}^e(\omega) = \mathbf{p}^e(\omega) \quad (8)$$

tal que

$$\mathbf{u}^e(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}^e(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (9)$$

Además, existe una expresión similar entre  $\mathbf{p}^e(t)$  y  $\mathbf{p}^e(\omega)$ . Ecuación (8) puede simplemente escribirse

$$\mathbf{K}^{*e}(\omega) \mathbf{u}^e(\omega) = \mathbf{p}^e(\omega) \quad (10)$$

donde

$$\mathbf{K}^{*e}(\omega) = \mathbf{K}^e(\omega) - \omega^2 \mathbf{M}^e(\omega) \quad (11)$$

se define como la matriz de rigidez dinámica de elemento  $e$ .

Después del ensamble y en ausencia de solicitaciones, Ec. (8) queda

$$[-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}] \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (12)$$

Esta ecuación se cumple para los  $n$  pares de valores y vectores propios del sistema definidos por las frecuencias ( $\omega_n$ ) y las formas naturales de vibrar.

## MATRICES CARACTERISTICAS DE LOS ELEMENTOS

Las matrices características de los elementos están determinadas por la geometría y las funciones de forma. En esta sección se describe brevemente la geometría de los elementos usados, las correspondientes funciones de forma y las matrices características.

### Elementos Finitos

En Fig. 1a se muestra una familia de elementos finitos isoparamétricos unidimen-

sionales. Para éstos, la función de forma  $N_j(\xi)$ , para cada nudo  $j$ , en términos de la coordenada paramétrica  $\xi$  es igual al polinomio de Lagrange  $L_j(\xi)$  para el nudo  $j$ . Para un elemento isoparamétrico, la función de forma es igual a la función de interpolación usada para mapear el elemento desde las coordenadas globales  $x$  a las coordenadas paramétricas  $\xi$  (función de mapeo). Luego,

$$x = M_j(\xi)x_j = N_j(\xi)x_j \equiv L_j(\xi)x_j \tag{13}$$

( $-1 \leq \xi \leq 1$ ), donde  $x_j$  es la coordenada global correspondiente al nudo  $j$ . Al reemplazar Ec.(13) en Ecs.(4), (5) y (7) se pueden obtener las matrices características de los elementos en forma exacta. Sin embargo, para este estudio las matrices características se calculan en forma numérica mediante fórmulas de cuadratura de Gauss-Legendre.

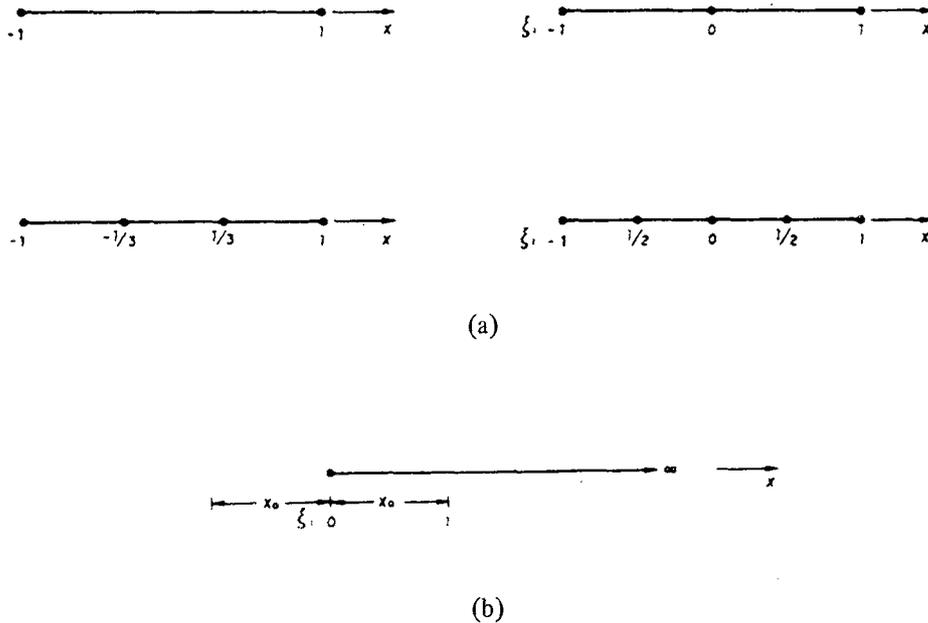


Figura 1.— Elementos paramétricos usados en la discretización numérica. (a) Familia de elementos finitos isoparamétricos. (b) Elemento infinito paramétrico.

### Elemento Infinito

En Fig. 1b se muestra un elemento infinito unidimensional de un nudo. Para éste, la función de mapeo es

$$M(\xi) = 1 + \xi \tag{14}$$

( $0 \leq \xi < \infty$ ). La función de forma es

$$N(\xi, k) = e^{-(\gamma + ikx_0)\xi} \tag{15}$$

donde  $\gamma$  es una constante positiva ( $\gamma > 0$ ),  $x_0$  es la coordenada de nudo del elemento, y  $k$  es el número de onda, definido como

$$k = \omega/c \tag{16}$$

Al reemplazar Ecs. (14), a (16) en Ecs. (4), (5) y (7), y luego en Ec.(11), ésta queda

$$K^*(k) = \frac{i}{2} k \left(1 - i \frac{\gamma}{kx_0}\right) \left[1 + \frac{2-m^b}{\left(1 - i \frac{\gamma}{kx_0}\right)^2}\right] \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} i \frac{3-m^b}{2} k \tag{17}$$

tal que el parámetro  $m^b$  es igual a 1 si la masa es consistente, o igual a 0 si la masa es concentrada.

### MALLA FINITA

Se considera una región finita con un extremo fijo, como se muestra en Fig. 2a, la cual puede vibrar libremente en forma axial. En Fig. 2b se muestra la discretización mediante elementos finitos. Con esta discretización se calculan las frecuencias naturales de vibrar para modelos numéricos en los cuales se varía el número de elementos usados. En cada modelo se usan elementos finitos de tamaño constante  $h$ , de dos, de tres, de cuatro, y de cinco nudos. Es decir, la aproximación usada en la  $rc$  es respectivamente de primer orden, de segundo orden, de tercer orden, y de cuarto orden.

El error en el cálculo de las frecuencias naturales se define como

$$\epsilon_n^m = \left| \frac{\omega_n - \omega_n^m}{\omega_n} \right| \tag{18}$$

donde  $\omega_n$  y  $\omega_n^m$  son respectivamente el valor exacto y el valor numérico calculado de la  $n$ -ésima frecuencia natural de vibrar. El parámetro  $m$  es igual a 1 si la masa es consistente, o igual a 0 si la masa es concentrada.

En la solución numérica se observó que el error sólo depende del número de elementos por longitud de onda, es decir, el error es independiente de la frecuencia natural a la cual el modelo vibra. Al número de elementos por longitud de onda se le llama razón de discretización, definida por  $\lambda/h$  (donde  $\lambda$  es la longitud de onda). En Fig. 2c se muestran los errores obtenidos en la solución numérica, donde se observa lo siguiente:

1.  $\epsilon^1$  y  $\epsilon^0$  convergen y tienden monótonicamente a cero cuando la razón de discretización aumenta.
2.  $\epsilon^1$  y  $\epsilon^0$  aumentan cuando la razón de discretización disminuye, existiendo un valor mínimo de esta razón para el cual  $\epsilon^1$  y  $\epsilon^0$  se hacen muy grandes, aún para elementos de orden alto. Existe una razón de discretización mínima posible,  $(\lambda/h)_{\min}$ , que depende del número  $N$  y el orden  $l$  de los elementos empleados en la discretización.  
 $(\lambda/h)_{\min} = 2/(l-2/N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 2/l.$

3.  $\epsilon^1$  disminuye cuando el orden de los elementos aumenta. Por otra parte,  $\epsilon^0$  disminuye cuando el orden de los elementos aumenta, sólo para razones de discretización  $\lambda/h > 1.75$ .

También se consideró una región finita con ambos extremos fijos. Siguiendo el mismo procedimiento descrito anteriormente, se observó que los errores numéricos obtenidos eran idénticos a aquéllos obtenidos para el caso de una región finita con un solo extremo fijo.

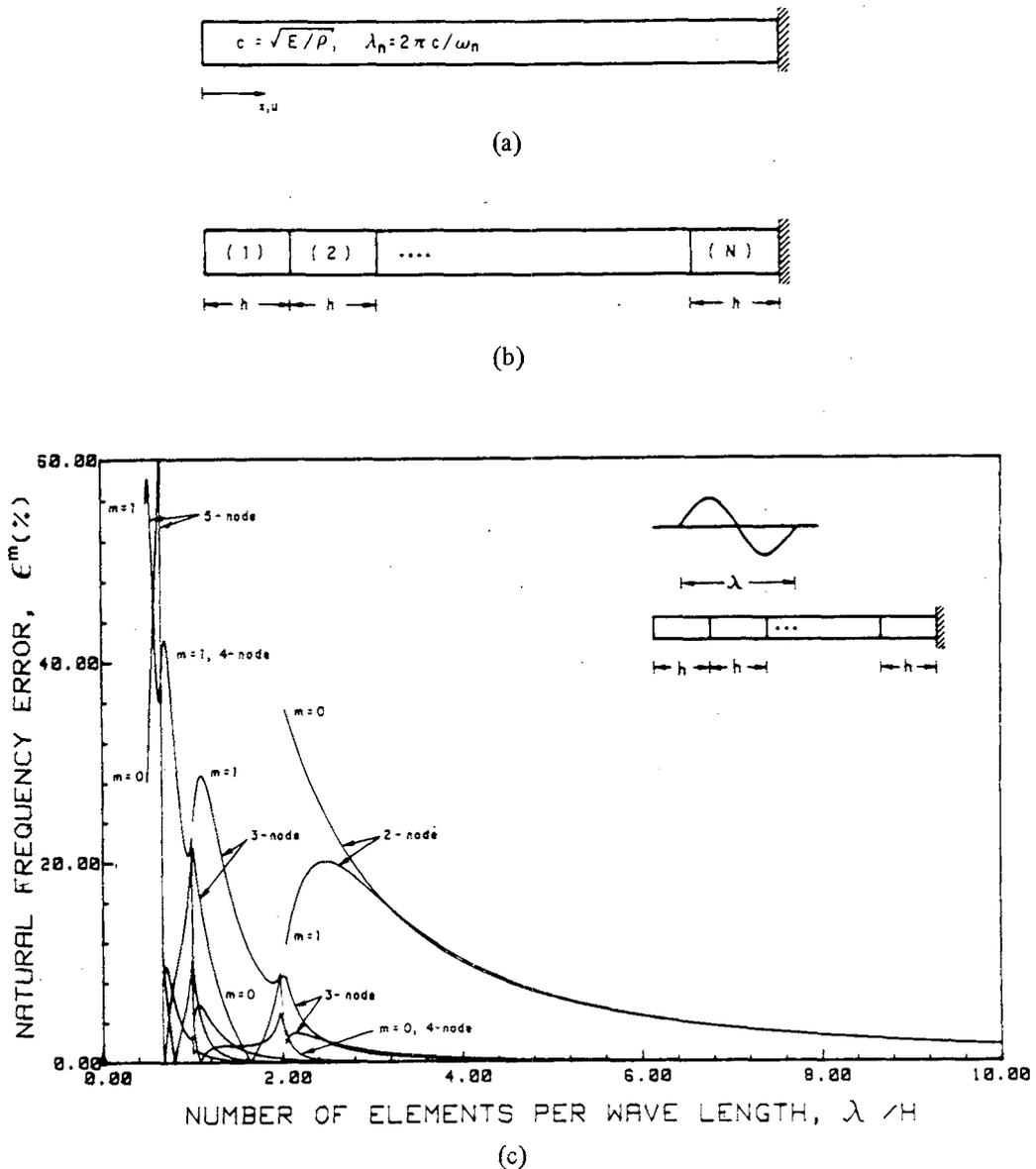


Figura 2.— Barra elástica finita.  
 (a) Geometría. (b) Discretización mediante elementos finitos.  
 (c) Error en el cálculo de las frecuencias naturales de vibrar.

MALLA INFINITA: DEPLAZAMIENTOS EN LA REGION CERCANA

Se considera una región infinita, como se muestra en Fig. 3a la cual puede vibrar libremente en forma axial. En Fig. 3b se muestra la discretización de la  $rc$  mediante elementos finitos y la  $rl$  mediante un solo elemento infinito. Con esta discretización se calculan los desplazamientos en la  $rc$  debido a una sollicitación axial, armónica, localizada en el extremo libre. Los desplazamientos en la  $rc$  se calculan para modelos numéricos que usan elementos finitos de primer a cuarto orden.

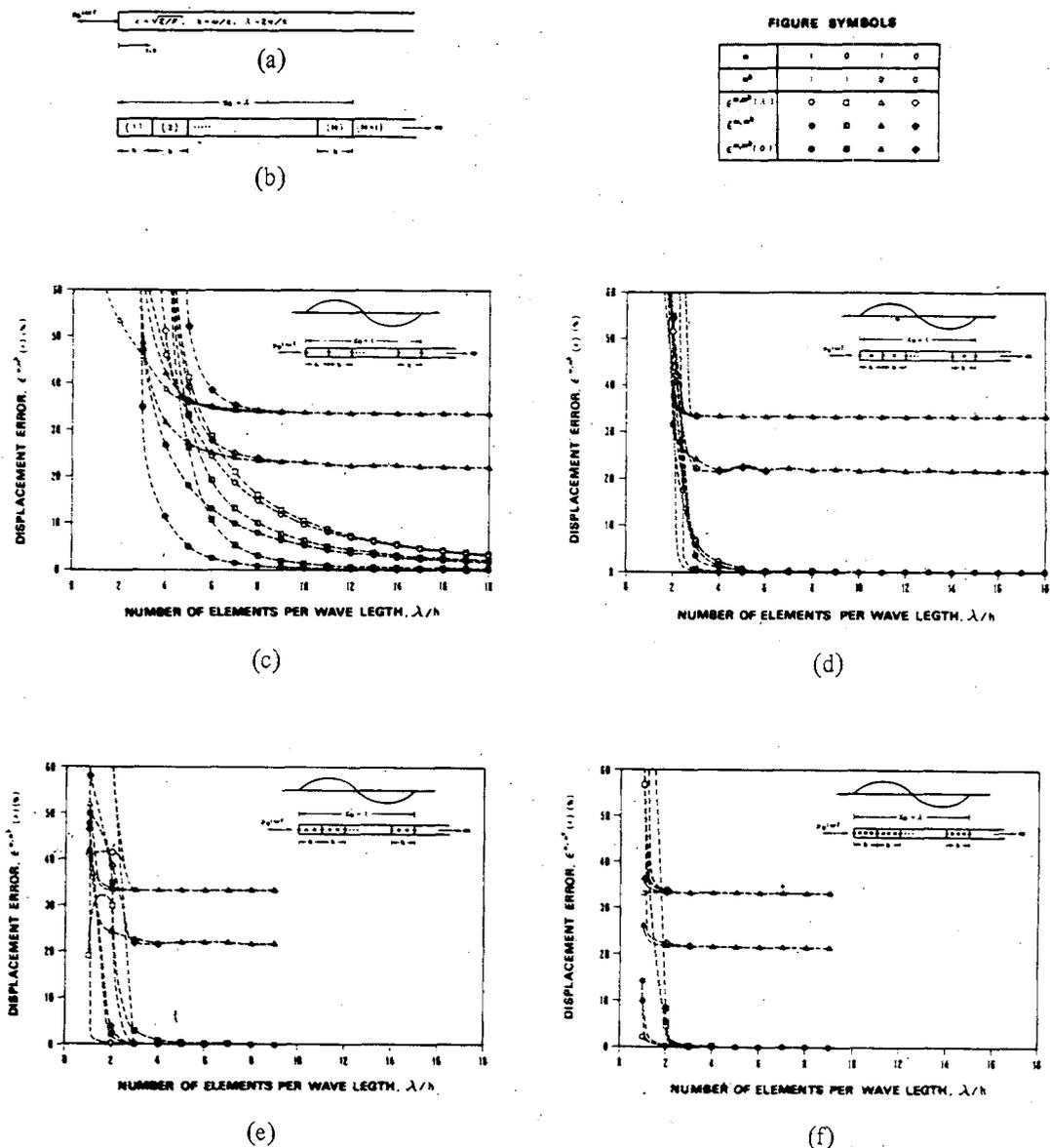


Figura 3. -- Error de desplazamientos en la región cercana de una barra elástica semi-infinita cargada axialmente. (a) Geometría. (b) Discretización mediante elementos finitos e infinito. (c) Elementos finitos de primer orden. (d) Elementos finitos de segundo orden. (e) Elementos finitos de tercer orden. (f) Elementos finitos de cuarto orden.

El tamaño de la  $rc$  es igual a un largo de longitud de onda como se muestra en Fig. 3a. El error en el cálculo de los desplazamientos se define como

$$\epsilon^{m,m^b}(x_j) = \left| \frac{u(x_j) - u_j^{m,m^b}}{u(0)} \right| \quad (19)$$

donde  $u(x_j)$  y  $u_j^{m,m^b}$  son respectivamente los valores de los desplazamientos exacto y numérico calculado para el nudo  $j$  de coordenada  $x_j$ . Los parámetros  $m$  y  $m^b$  se refieren a la masa de la  $rc$  y la  $rl$ , en forma respectiva. En la solución numérica se observó que el error depende del número de longitudes de onda discretizadas por la  $rc$ . En este trabajo se presentan los resultados correspondientes a la discretización de un largo de longitud de onda. En Figs. 3c-f se muestran los errores obtenidos en la solución numérica sobre el extremo libre ( $x=0$ ), sobre la  $fe$  ( $x=\lambda$ ), y el error promedio en la  $rc$  ( $\bar{\epsilon}^{m,m^b}$ ), donde se observa lo siguiente:

1.  $\epsilon^{1,1}$  y  $\epsilon^{0,1}$  convergen y tienden monótonicamente a cero cuando la razón de discretización aumenta. Lo mismo ocurre para  $\bar{\epsilon}^{1,1}$  y  $\bar{\epsilon}^{0,1}$ .
2.  $\epsilon^{1,0}$  y  $\epsilon^{0,0}$  convergen y tienden a 33.3% cuando la razón de discretización aumenta. Por otra parte,  $\bar{\epsilon}^{1,0}$  y  $\bar{\epsilon}^{0,0}$  convergen y tienden a 21.3% cuando la razón de discretización aumenta.
3.  $\epsilon^{m,m^b}$  y  $\bar{\epsilon}^{m,m^b}$  aumentan cuando la razón de discretización disminuye, existiendo un valor mínimo de esta razón para el cual  $\epsilon^{m,m^b}$  y  $\bar{\epsilon}^{m,m^b}$  se hacen muy grandes, aún para elementos de orden alto.
4.  $\epsilon^{m,1}$  y  $\bar{\epsilon}^{m,1}$  disminuyen cuando el orden de los elementos aumenta.
5. Se verifica la siguiente relación entre los errores:  $\epsilon^{1,m^b} < \epsilon^{0,m^b}$  y  $\bar{\epsilon}^{1,m^b} < \bar{\epsilon}^{0,m^b}$ .
6. Para los elementos de primer orden se verifica que  $\epsilon^{1,1}(0) < \bar{\epsilon}^{1,1} < \epsilon^{1,1}(\lambda)$  cuando  $\lambda/h > 2.9$  y que  $\epsilon^{0,1}(0) < \bar{\epsilon}^{0,1} < \epsilon^{0,1}(\lambda)$  cuando  $\lambda/h > 4.2$ . Para los elementos de segundo orden se verifica que  $\epsilon^{1,1}(0) < \bar{\epsilon}^{1,1} < \epsilon^{1,1}(\lambda)$  cuando  $\lambda/h > 2.1$  y que  $\epsilon^{0,1}(0) < \bar{\epsilon}^{0,1} < \epsilon^{0,1}(\lambda)$  cuando  $\lambda/h > 2.4$ .

#### MALLA INFINITA: REFLEXIONES ARTIFICIALES SOBRE LA FRONTERA EXTERIOR

La  $fe$  está definida como interfase entre la malla de elementos finitos y la malla de elementos infinitos. Estos últimos han sido desarrollados para reemplazar a la  $rl$  y transmitir las ondas que provienen de la  $rc$ . Sin embargo, debido al procedimiento numérico, la  $fe$  actúa como pantalla y refleja parte de las ondas que inciden sobre la misma. Esto se debe principalmente a la discontinuidad producida por el cambio de aproximación en la discretización. Debido a la complejidad del álgebra, sólo se presentan los casos para discretizaciones de la  $rc$  con elementos finitos de primer y segundo orden.

#### Elementos de primer orden

Siguiendo a Bažant y Celep,<sup>3</sup> la ecuación de equilibrio para el elemento finito

contiguo a la *fe* de la discretización que se muestra en Fig. 4a, es

$$\left[ \frac{k^2 h}{6} \begin{bmatrix} 3-m & m \\ m & 3-m \end{bmatrix} + \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} u_{-1} \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{-1} \\ p_0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Luego,

$$p_0 h = \alpha_0 u_0 + \alpha_{-1} u_{-1} \quad (21)$$

donde

$$\alpha_0 = 1 - \frac{3-m}{6} \eta^2 \quad (22)$$

$$\alpha_{-1} = -1 - \frac{m}{6} \eta^2$$

tal que

$$\eta = kh = \frac{2\pi}{\lambda/h} \quad (23)$$

La ecuación de equilibrio para el elemento infinito, de Ecs. (10), (17) y (23), es

$$p_0^b h = i \frac{3-m^b}{2} \eta u_0^b \equiv i \eta^b u_0^b \quad (24)$$

Por otra parte, los desplazamientos producidos por la onda que incide sobre la *fe*, propagándose en el elemento finito contiguo a ésta, están expresados por

$$u(x, \omega t) = \left( A e^{-ik(x-x_0)} + B e^{ik(x-x_0)} \right) e^{i\omega t} \quad (25)$$

Los desplazamientos producidos por la onda que se refracta debido a la *fe*, propagándose en el elemento infinito, se expresan

$$u(x, \omega t) = C e^{-ik(x-x_0)} e^{i\omega t} \quad (26)$$

Cabe notar que  $|A|$ ,  $|B|$  y  $|C|$  son las amplitudes de las ondas incidente, reflejada y refractada, respectivamente.

Aplicando equilibrio de fuerzas y compatibilidad de desplazamientos sobre la *fe*, al tomar valores absolutos, se tiene

$$|C/A|^{m,m^b} = \frac{2|\mu_2|}{\sqrt{\mu_1^2 + (\eta^b + \mu_2)^2}} \quad (27)$$

$$|B/A|^{m,m^b} = \sqrt{\frac{\mu_1^2 + (\eta^b + \mu_2)^2}{\mu_1^2 + (\eta^b - \mu_2)^2}}$$

tal que

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \alpha_0 + \alpha_1 \cos \eta \\ \mu_2 &= \alpha_1 \sin \eta\end{aligned}\quad (28)$$

Las razones  $|C/A|^{m,m^b}$  y  $|B/A|^{m,m^b}$  representan, respectivamente, los factores de amplificación de las ondas refractada y reflejada con respecto a la onda incidente. Interesa también obtener el valor medio del flujo de energía que pasa a través de la *fe*,

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \text{Re}\{p(\omega t)\} \text{Re}\{\dot{u}(\omega t)\} dt \quad (29)$$

( $\omega T = 2\pi$ ), para las ondas incidente, reflejada y refractada. Después de introducir Ecs. (21), (24) a (26) en Ec. (29) e integrar, se tiene

$$\begin{aligned}\langle hP_A \rangle &= \frac{1}{2} \omega \mu_2 |A|^2 \\ \langle hP_B \rangle &= -\frac{1}{2} \omega \mu_2 |B|^2 \\ \langle hP_C \rangle &= \frac{1}{2} \omega \eta^b |C|^2\end{aligned}\quad (30)$$

Al introducir Ecs. (27) en las anteriores es fácil deducir que el flujo medio total de energía en el nudo situado sobre la *fe* se anula, es decir,

$$\langle P_A \rangle + \langle P_B \rangle + \langle P_C \rangle = 0 \quad (31)$$

Las razones de flujo son

$$\begin{aligned}\left\{ \frac{\langle P_C \rangle}{\langle P_A \rangle} \right\}^{m,m^b} &= \frac{\eta^b}{\mu_2} |C/A|^2 \\ \left\{ \frac{\langle P_B \rangle}{\langle P_A \rangle} \right\}^{m,m^b} &= -|B/A|^2\end{aligned}\quad (32)$$

que respectivamente representan la fracción de energía de la onda incidente que la *fe* refracta y refleja.

### Elementos de segundo orden

La ecuación de equilibrio para el elemento finito contiguo a la *fe*, de la discretización que se muestra en Fig. 4b, es

$$\left[ -\frac{k^2 h}{30} \begin{bmatrix} 5-m & 2m & -m \\ 2m & 20-4m & 2m \\ -m & 2m & 5-m \end{bmatrix} + \frac{1}{3h} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} u_{-1} \\ u_{-1/2} \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{-1} \\ p_{-1/2} \\ p_0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

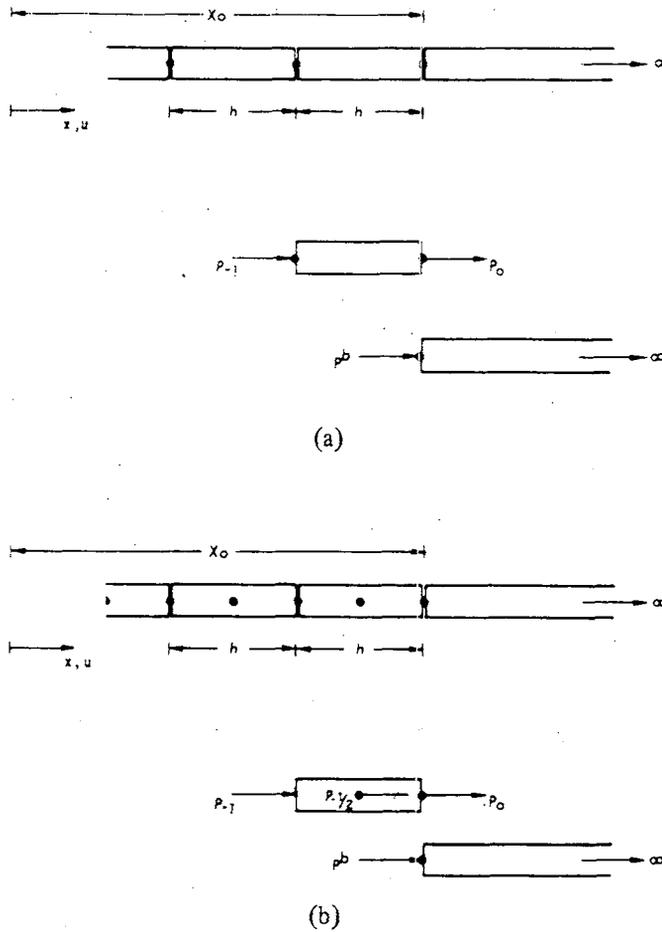


Figura 4.— Modelos para evaluar las reflexiones numéricas artificiales producidas por la frontera exterior. (a) Geometría para el caso de elementos finitos de primer orden. (b) Geometría para el caso de elementos finitos de segundo orden.

Al no existir fuerzas externas actuando sobre el nudo interno y al condensar éste fuera de la ecuación de equilibrio, es posible obtener una ecuación idéntica a Ec.(21), tal que

$$\alpha_0 = \frac{240 - 2(55 - 3m)\eta^2 + (5 - 2m)\eta^4}{6(40 - (5 - m)\eta^2)} \tag{34}$$

$$\alpha_{-1} = \frac{240 + 2(5 + 3m)\eta^2 + m\eta^4}{6(40 - (5 - m)\eta^2)}$$

El análisis continúa en forma similar al hecho anteriormente para elementos de primer orden y se tiene que las razones de amplitud y las razones de flujo de energía están respectivamente dadas por Ecs.(27) y (32).

## Resultados numéricos

Las ondas provenientes de la *rc* no deben ser reflejadas por la *fe*. Luego, la energía y la amplitud de las ondas reflejadas deben ser nulas, es decir,  $\{\langle P_B \rangle / \langle P_A \rangle\}_{m, m^b}$  y  $|B/A|_{m, m^b}$  deben anularse. Lo anterior es equivalente a decir que la energía y la amplitud de la onda incidente se conservan en la refractada, es decir,  $\{\langle P_C \rangle / \langle P_A \rangle\}_{m, m^b} = 1$  y  $|C/A|_{m, m^b} = 1$ . Esto ocurre sólo para valores altos de la razón de discretización, cuando la masa de la *rl* se discretiza en forma consistente ( $m^b = 1$ ), como se muestra en las Figs. 5a-d, donde se han dibujado las razones de amplitud y flujo de energía como función de la razón de discretización. La causa de esta reflexión numérica para valores bajos de la razón de discretización se debe a la diferente aproximación en los desplazamientos que existen a un lado y otro de la *fe*.

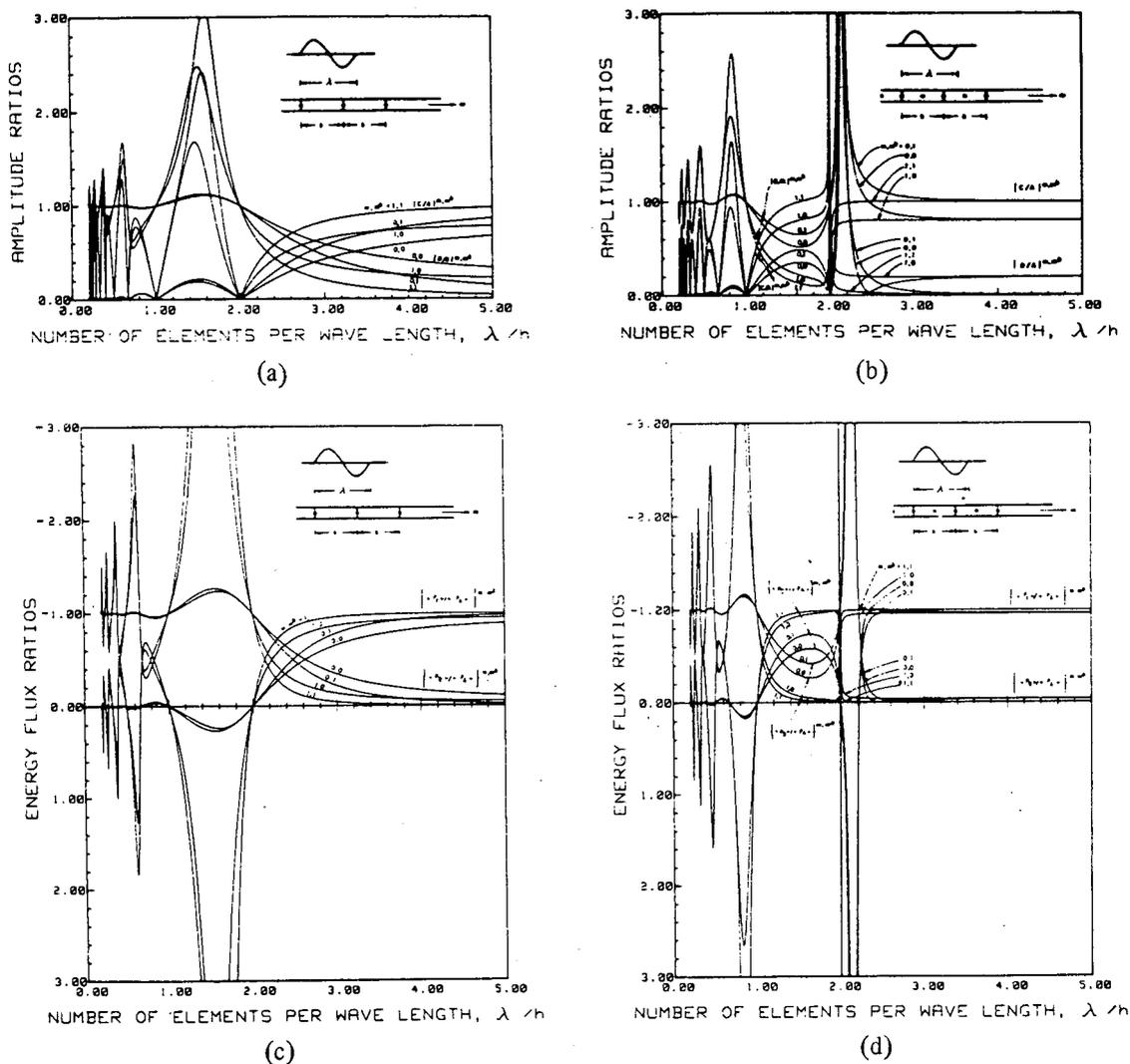


Figura 5.— Evaluación de las reflexiones numéricas artificiales producidas por la frontera exterior mediante razones de amplitudes y flujo medio de energía entre la onda reflejada e incidente y entre la onda refractada e incidente. (a) Razón de amplitudes para modelos con elementos finitos de primer orden. (b) Razón de amplitudes para modelos con elementos finitos de segundo orden. (c) Razón de flujo medio de energía para modelos con elementos finitos de primer orden. (d) Razón de flujo medio de energía para modelos con elementos finitos de segundo orden.

En Fig. 5a y 5b se muestran las razones de amplitud obtenidas por medio de Ec.(27) para los casos en que se usa elementos de primer y segundo orden, respectivamente. En Figs. 5a y 5b se observa lo siguiente:

1.  $|B/A|^{m,m^b}$  tiende a  $|1-m^b|/|5-m^b|$  y  $|C/A|^{m,m^b}$  tiende a  $4/|5-m^b|$  cuando la razón de discretización aumenta.
2.  $|B/A|^{m,m^b}$  tiende a la unidad cuando la razón de discretización tiende a cero, y  $|C/A|^{m,m^b}$  se anula para razones de discretización iguales a  $2/n(n=1,2,\dots)$ .
3. En general, para razones de discretización  $\lambda/h > 2$  se cumple que  $||B/A|^{0,m^b} - |1-m^b|/|5-m^b|| > ||B/A|^{1,m^b} - |1-m^b|/|5-m^b|| > 0$  y que  $||C/A|^{0,m^b} - 4/|5-m^b|| > ||C/A|^{1,m^b} - 4/|5-m^b|| > 0$ . Para el caso de elementos de segundo orden, la primera relación no se cumple en la vecindad de  $\lambda/h=2.34$ , para modelos de  $rl$  con masa concentrada. La segunda relación no se cumple en la vecindad de  $\lambda/h=2.07$  para cualquier modelo de  $rl$ .

En Figs. 5c y 5d se muestran las razones de flujo de energía obtenidas por medio de Ec. (32) para los casos en que se usa elementos de primer y segundo orden, respectivamente. En Fig. 5c y 5d se puede observar lo siguiente:

1.  $\{ \langle P_B \rangle / \langle P_A \rangle \}^{m,m^b}$  tiende a  $-(1-m^b)^2 / (5-m^b)^2$  y  $\{ \langle P_C \rangle / \langle P_A \rangle \}^{m,m^b}$  tiende a  $-8(3-m^b) / (5-m^b)^2$  cuando la razón de discretización aumenta.
2.  $\{ \langle P_B \rangle / \langle P_A \rangle \}^{m,m^b}$  tiende a  $-1$  cuando la razón de discretización tiende a cero, y  $\{ \langle P_C \rangle / \langle P_A \rangle \}^{m,m^b}$  se anula para razones de discretización iguales a  $2/n(n=1,2,\dots)$ .
3. En general, para razones de discretización  $\lambda/h > 2$  se cumple que

$$| \{ \langle P_B \rangle / \langle P_A \rangle \}^{0,m^b} + (1-m^b)^2 / (5-m^b)^2 | > | \{ \langle P_B \rangle / \langle P_A \rangle \}^{1,m^b} + (1-m^b)^2 / (5-m^b)^2 | > 0 \text{ y que}$$

$$| \{ \langle P_C \rangle / \langle P_A \rangle \}^{0,m^b} + 8(3-m^b) / (5-m^b)^2 | > | \{ \langle P_C \rangle / \langle P_A \rangle \}^{1,m^b} + 8(3-m^b) / (5-m^b)^2 | > 0. \text{ Para}$$

el caso de elementos de segundo orden, estas relaciones no se cumplen en la vecindad de  $\lambda/h=2.34$  para modelos de  $rl$  con masa concentrada.

### ANALISIS DE LOS RESULTADOS

Se han mostrado los errores numéricos obtenidos al usar el método de elementos finitos en la solución de problemas de propagación unidimensional de ondas a través de dos ejemplos: el cálculo de las frecuencias naturales de vibrar de una barra finita, y el cálculo de los desplazamientos de una barra semi-infinita producidos por una excitación armónica en su extremo. Además, se estudiaron los errores producidos por el efecto artificial de pantalla causado por una discretización de elementos finitos e infinitos que modelan una barra semi-infinita. Se ha comprobado numéricamente dos resultados obvios: a mayor número de elementos por longitud de onda, menor error; y a mayor orden en la aproximación numérica, menor error.

Por otra parte, se observa que el uso de masa concentrada en la  $rc$ , a diferencia de masa consistente, es importante sólo para razones de discretización bajas. Sin embargo, al usar masa concentrada en la  $rl$ , los errores son muy altos y no disminuyen aunque la razón de discretización aumente.

La diferencia en los resultados entre elementos de primer y segundo orden es importante. No ocurre lo mismo entre elementos de orden superior (segundo a cuarto orden).

Luego, se puede concluir que el uso de elementos de segundo orden lleva a una solución óptima desde el punto de vista de la precisión del modelo y del número total de grados de libertad del sistema.

Un análisis más preciso de los resultados indica que para obtener errores aceptables (menores que el 10%), la razón de discretización deberá ser mayor que 8 para elementos de primer orden y mayor que 3 para elementos de segundo orden. Para obtener errores pequeños (menores que el 5%), la razón de discretización deberá ser mayor que 11 para elementos de primer orden y mayor que 3 para elementos de segundo orden. Finalmente, para obtener errores despreciables (menores que el 1%), la razón de discretización deberá ser mayor que 23 para elementos de primer orden y mayor que 5 para elementos de segundo orden.

### CONCLUSIONES

Al discretizar un medio para analizar problemas transientes y de propagación de ondas es necesario prestar atención al tamaño de la discretización con respecto a la longitud de onda (de aquellas ondas que se desea incluir en la solución). El modelo numérico de elementos finitos (o diferencias finitas) deberá ser capaz de propagar numéricamente las ondas sin introducir resultados erróneos. Mediante dos ejemplos simples de propagación unidimensional de ondas, se determinó numéricamente que la razón de discretización  $\lambda/h$  deberá ser mayor o igual a 8 para elementos de primer orden y mayor o igual a 3 para elementos de segundo orden. Con estas razones mínimas de discretización se asegurará que los errores provenientes del modelo numérico sean aceptables (menores que el 10%). En el caso de elementos de segundo orden el error es menor que el 5%. Al concentrar la masa en el campo cercano el error aumenta, mientras que al concentrar la masa en el campo lejano los resultados son inaceptables.

### AGRADECIMIENTOS

Se agradecen los aportes de la Comisión de Investigación Científica y Tecnológica (CONY-CIT) y del Centro de Computación de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. Se agradece a la Compañía Minera La Disputada de Las Condes, al Departamento de Ciencias de la Computación de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, a la Empresa Nacional del Petróleo, y a Olympia (Chile), por la facilitación de equipos computacionales.

### REFERENCIAS

1. R.L. Kuhlemeyer and J. Lysmer, Finite Element Method Accuracy for Wave Propagation Problems, *proc. ASCE*, 99, SM5, 421-427, (1973).
2. Z. Bažant, Spurious Reflection of Elastic Waves in Nonuniform Finite Element Grids, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 16,91-100, (1978).
3. Z. Bažant and Z. Celep, Spurious Reflection of Elastic Waves in Nonuniform Meshes of Constant and Linear Strain Finite Elements, *Comp. & Struct.*, 15,451-459, (1982).
4. Z. Celep and Z. Bažant, Spurious Reflection of Elastic Waves due to Gradually Changing Finite Element Size, *Int. J. num. Meth. Engng.*, 19,631-646, (1983).
5. O.C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*, 3rd ed., McGraw-Hill, (1978).