

# ANALISIS ESTATICO Y DINAMICO DE COJINETES DE AIRE MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS

CARLOS GARCIA SUAREZ\*  
*Department of Mechanical Engineering  
University of California, Berkeley*

## RESUMEN

Este artículo presenta una formulación de Bunov-Galerkin para el análisis, mediante Elementos Finitos, de problemas estáticos y dinámicos de lubricación gaseosa. Para la parte espacial del problema se emplean las habituales funciones  $C^0$ , mientras que la integración en el tiempo se realiza con un par de predicción-corrección basado en el método de Newmark, algoritmo éste bien conocido en el contexto del análisis dinámico de estructuras. Se realiza un breve análisis del esquema resultante en su aplicación a ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. La discusión se ilustra con dos ejemplos motivados en la tecnología de cabezas voladoras para discos de almacenamiento magnético. La principal motivación de este trabajo es el desarrollo de un método numérico flexible, capaz de resolver los diversos problemas que se presentan en actuales y, predeciblemente, futuras aplicaciones de la lubricación mediante película de gas. El Método de los Elementos Finitos en combinación con el procedimiento de integración temporal presentado es una técnica ventajosa en este sentido.

## SUMMARY

This paper presents a Bunov-Galerkin Finite Element formulation for the analysis of static and dynamic gas lubrication problems. For the spatial part standard  $C^0$  functions are used whereas for time integration a predictor-implicit corrector pair based on the Newmark method of structural dynamics is used. A brief analysis of this algorithm as applied to first order ODEs is presented. Then two examples from the technology of flying heads for magnetic recording disk files are solved. The main motivation for this work is to provide a flexible numerical technique able to handle the quite diverse problems occurring in present and, predictably, future gas lubrication applications. The Finite Element method in conjunction with the time integration procedure presented here is an advantageous tool for this purpose.

## INTRODUCCION

Este trabajo discute una aplicación del Método de los Elementos Finitos (MEF), basada en una formulación de Bunov-Galerkin, al análisis estático y dinámico de problemas de lubricación gaseosa representados mediante la clásica ecuación de Reynolds. Esta ecuación describe, aproximadamente, el campo de presiones generado por el flujo de gas entre dos superficies próximas, que se hallan en movimiento relativo. Es una ecuación de tipo parabólico no lineal, su dominio espacial es una superficie bidimensional y posee una estructura similar a la de los típicos fenómenos de transporte mediante difusión-convección.

La resolución numérica de la ecuación de Reynolds se ha convertido en un punto crucial en varias aplicaciones de la tribología, tanto en el régimen incompresible como compresible<sup>1</sup>. La mayor parte de los estudios numéricos sobre el comportamiento

\* Visiting Scholar

Recibido: Diciembre 1984

de cojinetes de gas han utilizado esquemas de Diferencias Finitas<sup>2,3</sup>, mientras que el uso del MEF ha sido más limitado. La primera aplicación del MEF al caso estático empleó una técnica de variación de parámetros para linealizar las ecuaciones de campo<sup>4</sup>. Más adelante se utilizó el habitual método de Newton-Raphson, en combinación con un espacio aproximadamente basado en los conocidos polinomios de Hermite<sup>5</sup>. En gran medida, el interés despertado en la resolución numérica de la ecuación de Reynolds para flujo compresible es debido al análisis y diseño de cabezas voladoras para discos de almacenamiento magnético. Debido a los valores de los parámetros de diseño en los productos actuales, resulta habitual detectar en los perfiles de presiones gradientes muy pronunciados y transitorios a gran velocidad. El problema presenta las típicas características de los flujos dominados convectivamente. Motivados por esta situación, hemos presentado recientemente el uso de una formulación de Galerkin en combinación con una técnica de integración selectiva-reducida<sup>6</sup>, que permite mantener una buena precisión global evitando la resolución detallada de la capa límite. En esta última referencia se emplearon los habituales  $C^0$  cuadriláteros de Lagrange, lo que resulta ventajoso cuando el espesor de la película es discontinuo o varía bruscamente ya que entonces, la solución del problema carece de derivadas primeras continuas. El trabajo presente extiende el análisis al caso transitorio, pero sólo se considera el método de Bunov-Galerkin en su forma habitual, es decir, no se introduce ningún procedimiento de "upwind".

El resto de este trabajo puede esquematizarse como sigue. Primeramente presentamos la formulación débil de la ecuación de Reynolds y el procedimiento habitual utilizado para la resolución del caso estacionario. Básicamente éste consiste en la utilización de funciones de prueba  $C^0$  y el proceso iterativo de Newton-Raphson. En segundo lugar, discutimos el esquema de integración temporal en su aplicación a los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, que resultan de la formulación variacional, una vez que ha sido realizada la aproximación espacial. El principal algoritmo utilizado a este respecto es una par de predicción-corrección implícita basado en el bien conocido método de Newmark<sup>7</sup>, de nuevo en conexión con el procedimiento de Newton-Raphson. Este esquema es formalmente equivalente a una familia de métodos lineales de dos pasos (tres puntos) y da lugar a un grupo bastante amplio de algoritmos de integración de segundo orden, con distintas propiedades de estabilidad y precisión. Se incluye un breve análisis de esta familia de algoritmos en su aplicación a ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Finalmente, se presentan dos ejemplos originados en la tecnología de las cabezas voladoras para discos de almacenamiento magnético. Puesto que hemos restringido aquí nuestra atención al método de Bunov-Galerkin en su forma habitual, se hace necesario prestar cierta atención a la forma en que se realiza la discretización en la proximidad de las capas límite. De nuestra experiencia, concluimos que, normalmente, es suficiente situar tres o cuatro nodos dentro de la capa límite para asegurar resultados estables, tanto en el caso estático como en el dinámico. A este respecto sugerimos una estimación "ad hoc" para calcular el máximo tamaño admisible de los elementos en la susodicha área. Además, con el objetivo de comparar, incluimos en los ejemplos algunos resultados obtenidos con un simple método iterado de Euler. Nuestros resultados son también contrastados con una solución obtenida mediante Diferencias Finitas<sup>3</sup>.

La principal conclusión de este artículo es que, sin haber explotado todas las formulaciones posibles, el método de los Elementos Finitos es una técnica numérica flexible y poderosa para el análisis de cojinetes de gas. Además, el procedimiento de integración temporal utilizado es un algoritmo simple y adecuado no sólo para la presente, sino también para otras ecuaciones parabólicas no lineales. Finalmente mencionamos, que ha sido nuestra intención recoger aquí solamente la formulación básica y dar

una mera ilustración de las posibilidades del esquema. Esperamos presentar, en una próxima comunicación, una utilización más extensa de esta herramienta para discutir el comportamiento de un tipo de cabezas auto-soportadas para dispositivos de almacenamiento magnético.

### FORMULACION DÉBIL DE LA ECUACION DE REYNOLDS

El campo de presiones generado por el flujo de gas entre dos superficies próximas en movimiento relativo, satisface aproximadamente la ecuación bidimensional de Reynolds<sup>8</sup>, que puede escribirse en forma adimensional como:

$$\nabla(\text{ph}^3 \nabla p - \Lambda \text{ph}) = \sigma \frac{\partial(\text{ph})}{\partial t} \quad (1)$$

donde  $p = p(x,t)$  es la presión adimensional (presión/presión de referencia  $p_0$ ),  $h$  representa el cociente del espesor de película y una separación de referencia  $h_0$  (normalmente la separación en el borde de salida) y se supone dato del problema,  $\Lambda = \partial \mu L v / p_0 h_0^2$  es el parámetro vectorial adimensional del cojinete;  $L$  es una longitud característica (p.e. la longitud del cojinete),  $\mu$  es la viscosidad dinámica,  $v$  es la velocidad relativa de las superficies del cojinete,  $\sigma = 12 \mu \tau L^2 / p_0 h_0^2$  es un segundo parámetro adimensional\* y finalmente,  $\tau$  es una frecuencia característica utilizada para adimensionalizar la escala de tiempos (puede tomarse igual a uno).

A lo largo de este trabajo  $\Omega$  representa un dominio en  $\mathbf{R}^2$  y  $\Gamma$  su contorno supuesto suave. Escalares y puntos se representan con los usuales caracteres romanos y los vectores en negrita. Se hace uso de la habitual notación del operador  $\nabla$  esto es,  $\nabla \mathbf{z}$  indica la divergencia del vector  $\mathbf{z}$  y  $\nabla z$  el gradiente del escalar  $z$ .

La expresión débil de la ecuación (1) se obtiene tras multiplicación por la función de ponderación  $w$  y aplicación de la fórmula de Gauss-Green

$$-\int_{\Gamma_q} (\text{ph}^3 \nabla p - \Lambda \text{ph}) \mathbf{n} w d\Gamma + \int_{\Omega} (\text{ph}^3 \nabla p - \Lambda \text{ph}) \nabla w d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \left( h \frac{\partial p}{\partial t} + p \frac{\partial h}{\partial t} \right) w d\Omega = 0 \quad (2)$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal al contorno  $\Gamma$ . Siguiendo la práctica habitual las funciones de ponderación  $w$  se eligen de forma que toman valor cero en la parte del contorno  $\Gamma_p$  donde se imponen las condiciones de contorno esenciales  $p = \bar{p}(x,t)$ , la otra parte del contorno es denominada  $\Gamma_q$ . Las funciones  $w$  y sus derivadas parciales se suponen de cuadrado integrable en el dominio  $\Omega$ . De acuerdo con la ecuación (2) la condición de contorno natural establece la prescripción de  $(\text{ph}^3 \nabla p - \Lambda \text{ph}) \mathbf{n}$  que, como puede demostrarse, es igual al flujo adimensional de masa  $q(x,t)$ . Nótese que para incorporar explícitamente esta condición de contorno en la formulación variacional del problema es necesario integrar por partes tanto el término difusivo como el convectivo de la ecuación.

En la versión de Elementos Finitos del método de Bunov-Galerkin la parte espacial de la solución aproximada a la ecuación (2) se busca en un espacio de splines polinómicos de pequeño soporte  $N_i(x)$  esto es,  $p(x,t) = \sum_i y_i(t) N_i(x)$ , o en notación directa,  $p = \mathbf{N}^t \mathbf{y}$  (el índice  $t$  se utiliza para indicar la traspuesta de una matriz o vector columna). Como es habitual un elemento  $N_i$  de la base el espacio aproximante toma

\* Los parámetros  $\Lambda$  y  $\sigma$  son denominados en la terminología inglesa como "bearing number" y "squeeze number" respectivamente.

valor unidad en solamente uno de los nodos y cero en los otros, de forma que el vector  $\mathbf{y}^t = [y_1, y_2, \dots, y_n]$  representa el valor de la función  $p(x,t)$  en los nodos. La igualdad (2) es satisfecha siendo  $w$  cualquier miembro de subespacio aproximante  $o$ , de forma equivalente, para todos los elementos de la base  $\mathbf{N}_i$ . Definiendo

$$\mathbf{K}(\mathbf{y},t) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{N} [\mathbf{N}^t \mathbf{y} h^3 \nabla \mathbf{N}^t \mathbf{y} - \Lambda h \mathbf{N}^t \mathbf{y}] d\Omega$$

$$\mathbf{M}(t) = \int_{\Omega} \sigma h \mathbf{N} \mathbf{N}^t d\Omega \quad , \quad \mathbf{F}(t) = - \int_{\Omega} \sigma \frac{\partial h}{\partial t} \mathbf{N} \mathbf{N}^t d\Omega \quad (3)$$

La ecuación (2) puede escribirse de forma más compacta como

$$\mathbf{K}(\mathbf{y},t) + \mathbf{M}(t) \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(t) \mathbf{y} \quad (4)$$

que representa un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en la función  $\mathbf{y}(t)$ .

### EL CASO ESTÁTICO

La solución correspondiente al régimen estacionario puede obtenerse resolviendo la eq. (4) con la condición de que el espesor de película sea independiente del tiempo  $\partial h / \partial t = 0$ , o directamente resolviendo el sistema no lineal de ecuaciones  $\mathbf{K}(\mathbf{y},0) = 0$ . Adoptamos el último procedimiento y utilizamos el bien conocido método de Newton-Rapson para reducir el problema a una secuencia de ecuaciones lineales

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{y}_n) \Delta \mathbf{y}_n = \mathbf{R}(\mathbf{y}_n) \quad , \quad \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \Delta \mathbf{y}_n \quad (5)$$

donde la matriz tangente  $\mathbf{K}_T$  y el residuo  $\mathbf{R}$  se definen como

$$\mathbf{R}(\mathbf{y}_n) = -\mathbf{K}(\mathbf{y}_n,0)$$

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{y}_n) = \left. \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{y},0)}{\partial \mathbf{y}} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_n} = \int_{\Omega} \mathbf{N} [\mathbf{N}^t h^3 \nabla \mathbf{N}^t \mathbf{y}_n + \mathbf{N}^t \mathbf{y}_n h^3 \nabla \mathbf{N}^t - \Lambda h \mathbf{N}^t] d\Omega \quad (6)$$

Los habituales procedimientos del FEM pueden emplearse para resolver esta ecuación. Por ejemplo, Rodhe y Oh<sup>5</sup> utilizaron los polinomios de Hermite como base de su aproximación y en el presente trabajo empleamos los cuadriláteros Lagrangianos de cuatro nodos<sup>9</sup>. Sin embargo, como ya se ha mencionado, aparece una dificultad cuando el parámetro del cojinete  $\Lambda$  aumenta y la ecuación (1) queda dominada por las derivadas espaciales de primer orden. Entonces la solución desarrolla una capa límite de espesor  $O(1/|\Lambda|)^{10}$ . La malla de elementos debe ser lo suficientemente fina para recoger los bruscos cambios que típicamente se presentan en estas estructuras y, de no ser así se aparecen oscilaciones indeseables en la solución numérica que pueden hacer que ésta resulte totalmente inaprovechable. En el primero de los ejemplos que se considera más tarde, señalamos un criterio 'ad hoc' (basado en la bien conocida condición sobre el número de Peclet para problemas de transporte) para estimar el tamaño máximo de los elementos que deben situarse en la capa límite. Generalmente basta con colocar tres o cuatro nodos de los cuadriláteros bilineales dentro de la capa límite para asegurar estabilidad, tanto en el caso dinámico como estático, aunque la situación transitoria es un poco más exigente en cuanto a discretización se refiere. Este tipo de fenómeno, frecuente en el análisis de flujos dominados convectivamente,

ha conducido a las denominadas formulaciones 'upwind'<sup>11,13</sup>, que pretenden evitar la resolución detallada de la capa límite a la vez que se preserva una buena precisión en el resto del dominio. Estas técnicas, habitualmente empleadas para la resolución de la ecuación de Navier-Stokes, las ecuaciones lineales de transporte y más recientemente algunos problemas hiperbólicos<sup>14</sup>, han sido utilizadas recientemente, en una de sus versiones más simples<sup>12</sup>, en el contexto de la ecuación de Reynolds<sup>6</sup>.

### EL CASO DINÁMICO

En el caso dinámico el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de primer orden (4) debe resolverse. Para mantener la sencillez de notación es conveniente escribir dicha ecuación matricial en la forma canónica

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \quad (7)$$

donde  $\mathbf{f}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{M}^{-1}(t)[\mathbf{F}(t)\mathbf{y} - \mathbf{K}(\mathbf{y}, t)]$ . La condición inicial se obtiene imponiendo  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$ , habiéndose obtenido  $\mathbf{y}_0$  de la solución estática.

Por varias razones todos los métodos descritos a continuación son implícitos. En primer lugar, como ya se ha mencionado, una malla fina tiene que emplearse en la capa límite. Esto implica que cabe esperar modos propios altos que impondrían una severa restricción en el tamaño del intervalo de tiempo a utilizar con cualquier esquema explícito de integración. En segundo lugar, la ecuación (7) es no lineal y sus coeficientes dependen del tiempo. Esto significa que la matriz de coeficientes tiene que recalcularse, en cualquier caso, al menos cada pocos pasos, haciendo caros los esquemas explícitos.

#### El método de Newmark para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

Uno de los procedimientos más comúnmente empleados para la integración de las ecuaciones de segundo orden de la dinámica de estructuras, lo constituye el bien conocido método de Newmark<sup>7</sup>. Básicamente éste consiste en una familia de algoritmos implícitos de segundo orden parametrizada por dos escalares. Aquí utilizamos las relaciones asociadas con este procedimiento para obtener un algoritmo con vista a la resolución de las ecuaciones de primer orden (7). Más adelante se verá que el esquema es equivalente a un habitual procedimiento lineal implícito de dos pasos (tres puntos), como ha sido señalado ya por Zienkiewicz<sup>15</sup> con referencia a las ecuaciones de la dinámica estructural. A este respecto señalamos que este algoritmo ha sido utilizado sólo ocasionalmente para ecuaciones diferenciales de primer orden y no en la forma general discutida aquí<sup>9</sup>. Sin embargo el procedimiento resulta bastante útil ya que su precisión y la disipación numérica pueden ajustarse fácilmente modificando los valores de los dos parámetros mencionados.

Los pasos que constituyen el esquema son como sigue.

- 1) Predicción.— Supónganse conocidas en un instante  $t_n$  las cantidades  $\mathbf{y}_n, \dot{\mathbf{y}}_n$  y una aproximación a  $\ddot{\mathbf{y}}_n$  (más adelante se explica cómo calcular  $\ddot{\mathbf{y}}_n$  a partir de  $\mathbf{y}_n$  e  $\dot{\mathbf{y}}_n$ ). Los superíndices se refieren al instante de tiempo en que las variables o funciones son evaluadas. Una predicción de segundo orden de  $\mathbf{y}_{n+1}$  e  $\dot{\mathbf{y}}_{n+1}$  representada por  $\mathbf{y}_{n+1}^o$  e  $\dot{\mathbf{y}}_{n+1}^o$  se calcula como:

$$\mathbf{y}_{n+1}^o = \mathbf{y}_n + \dot{\mathbf{y}}_n \Delta t + \ddot{\mathbf{y}}_n \frac{\Delta t^2}{2}, \quad \dot{\mathbf{y}}_{n+1}^o = \dot{\mathbf{y}}_n + \ddot{\mathbf{y}}_n \Delta t \quad (8)$$

donde  $\Delta t$  es el tamaño del intervalo de tiempo.

2) Corrección.— Las bien conocidas ecuaciones de Newmark<sup>7</sup> pueden escribirse como:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}}_{n+1} &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n) - \frac{\gamma - \beta}{\beta} \dot{\mathbf{y}}_n + \Delta t \frac{2\beta - \gamma}{2\beta} \ddot{\mathbf{y}}_n \\ \ddot{\mathbf{y}}_{n+1} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{y}}_n - \frac{1 - 2\beta}{2\beta} \ddot{\mathbf{y}}_n\end{aligned}\quad (9)$$

donde  $\gamma$  y  $\beta$  son dos parámetros constantes a determinar. El paso de corrección consiste de la ecuación

$$\mathbf{M}_{n+1} \dot{\mathbf{y}}_{n+1} + \mathbf{K}(\mathbf{y}_{n+1}, t_{n+1}) - \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{y}_{n+1} = 0 \quad (10)$$

junto con la ecuación (9)<sub>1</sub>.

Debido a que la ec. (10) es no-lineal en  $\mathbf{y}_{n+1}$  hacemos uso, una vez más, del método iterativo de Newton-Rapson. La versión linearizada del corrector es

$$\begin{aligned}[\mathbf{M}_{n+1} \frac{\gamma}{\beta \Delta t} + \mathbf{K}_T(\mathbf{y}_{n+1}^i, t_{n+1}) - \mathbf{F}_{n+1}] \Delta \mathbf{y}_{n+1}^i &= \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{y}_{n+1}^i - \mathbf{M}_{n+1} \dot{\mathbf{y}}_{n+1}^i - \mathbf{K}(\mathbf{y}_{n+1}^i, t_{n+1}) \\ \mathbf{y}_{n+1}^{i+1} &= \mathbf{y}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{y}_{n+1}^i, \quad \dot{\mathbf{y}}_{n+1}^{i+1} = \dot{\mathbf{y}}_{n+1}^i + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta \mathbf{y}_{n+1}^i\end{aligned}\quad (11)$$

donde  $\mathbf{K}_t$  es la matriz tangente definida en la ec. (6). Este segundo paso es repetido un número fijo de veces o hasta que el residuo, esto es el miembro derecho de la ec. (11)<sub>1</sub>, sea más pequeño que una cierta cota. Generalmente, hemos adoptado el criterio habitual de detener el proceso iterativo, dentro de cada intervalo de tiempo, cuando el último residuo calculado es más pequeño que una cierta fracción del computado al comienzo del intervalo (es normalmente recomendable combinar esta regla con un límite superior al número total de iteraciones por intervalo de tiempo, corrientemente dos o tres iteraciones son suficientes).

3) Una aproximación de segundo orden a  $\dot{\mathbf{y}}_{n+1}$  se obtiene mediante la ec. (9) o de forma equivalente

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_{n+1}^o) \quad (12)$$

donde  $\mathbf{y}_{n+1}$  es el último valor calculado en el paso 2.

Tras este último paso la variable tiempo se incrementa en  $\Delta t$ . Nótese que este tipo de implementación permite fácilmente modificar el tamaño del intervalo de tiempo. El algoritmo prosigue volviendo al paso uno.

En los ejemplos que se presentan más abajo, el análisis dinámico se realiza siempre tras el cálculo de la solución estática y se utilizan los valores de  $\dot{\mathbf{y}}_0 = \ddot{\mathbf{y}}_0 = 0$  para iniciar el caso dinámico.

Para examinar las propiedades del algoritmo presentado escribimos éste en la habitual forma de los métodos multipaso. Sustituyendo la ecuación (9)<sub>1</sub> en el miembro izquierdo de la ec. (7) a la vez que  $\ddot{\mathbf{y}}_n$  se expresa en función de  $\dot{\mathbf{y}}_n, \mathbf{y}_n$ , e  $\dot{\mathbf{y}}_{n-1}$  mediante eliminación de  $\ddot{\mathbf{y}}_{n-1}$  de las ecuaciones (9) (escritas entre los instantes  $t_n$  y  $t_{n-1}$ ) se obtiene

$$\alpha_0 \mathbf{y}_{n+1} + \alpha_1 \mathbf{y}_n + \alpha_2 \mathbf{y}_{n-1} + \Delta t (\beta_0 \dot{\mathbf{y}}_{n+1} + \beta_1 \dot{\mathbf{y}}_n + \beta_2 \dot{\mathbf{y}}_{n-1}) = 0 \quad (13)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -1, & \alpha_1 &= \frac{2\gamma-1}{\gamma}, & \alpha_2 &= \frac{1-\gamma}{\gamma} \\ \beta_0 &= \frac{\beta}{\gamma}, & \beta_1 &= \frac{1}{\gamma}(1/2+\gamma-2\beta), & \beta_2 &= \frac{1}{\gamma}(1/2+\beta-\gamma) \end{aligned} \quad (14)$$

Nótese sin embargo que la eliminación de  $\ddot{\mathbf{y}}_{n-1}$  es solamente posible si  $2\beta \neq \gamma$ . Para el caso en que  $2\beta - \gamma = 0$  se observa de la ecuación (9) que el método se reduce a la aproximación de Crank-Nicholson,

$$\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n = \frac{\Delta t}{2} (\dot{\mathbf{y}}_n + \dot{\mathbf{y}}_{n+1}) \quad (15)$$

Las propiedades de convergencia y estabilidad del método pueden, en una primera fase, ser estudiadas con la ayuda de la teoría de los métodos lineales multipaso. En particular, es posible comprobar que el algoritmo es consistente de segundo orden y que tiene un intervalo de estabilidad real ilimitado para

$$2\beta \geq \gamma \geq 1/2 \quad (16)$$

Esta condición aseguraría la estabilidad numérica del algoritmo si los autovalores de  $\mathbf{f}$  en la ec. (7) fuesen reales y negativos. Además en este caso el teorema de equivalencia de Lax<sup>16</sup> aseguraría la convergencia. Sin embargo, dado que la matriz  $\mathbf{K}_t$ , definida por la ec. (6), es asimétrica, sus autovalores pueden ser complejos y la conclusión precedente debe adoptarse con precaución. A pesar de ello, los experimentos numéricos realizados hasta ahora parecen indicar que los límites (16) pueden emplearse con confianza.

Mayor conocimiento sobre las propiedades de estabilidad puede obtenerse calculando las raíces del polinomio característico asociado con la ec. (13), obtenido al aplicar esta última expresión a la ecuación escalar de prueba  $\dot{x} = \lambda x$ <sup>17</sup>. Dado que el método considera dos intervalos consecutivos de tiempo, dos raíces distintas pueden en general esperarse. El módulo de éstas es una medida del factor de amplificación involucrado en el proceso de integración. Como es bien sabido un método estable debe presentar ambas raíces menores que uno. Además, es también deseable, y de hecho esta propiedad figura como parte de algunas otras definiciones de estabilidad, que las raíces evolucionen como el verdadero factor de amplificación  $e^{\lambda \Delta t}$ , tendiendo a cero según el producto  $\lambda \Delta t$  tiende a menos infinito. Esto aseguraría que los modos altos son rápidamente disipados, dejando solamente la significativa respuesta asociada a los modos bajos. En la Figura 1 el módulo de las raíces asociadas con el método de Newmark ha sido representado para varios valores de  $\gamma$  y  $\beta$  (en la figura indicados como G y B respectivamente). En el gráfico correspondiente a  $\gamma = 0.5$  el factor de amplificación de la aproximación de Crank-Nicholson ( $2\beta = \gamma$ ) ha sido también dibujado. Para cada caso una de las raíces es representada mediante línea continua y otra con trazo discontinuo, cuando ambas son complejas conjugadas no es posible hacer la distinción y solamente puede observarse la línea continua.

Métodos del mismo orden de consistencia pueden ser comparados mediante los valores correspondientes de la constante de error. Esta constante es simplemente el primer coeficiente no nulo del desarrollo en serie de Taylor que se emplea para

determinar el orden de consistencia<sup>17</sup>. Puede comprobarse que este coeficiente se escribe en términos de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  como<sup>18</sup>:

$$C = \frac{1}{12} [g(2\beta - \gamma) + 1]$$

Este valor junto con las propiedades de estabilidad ilustradas en la Fig. 1 sirven para efectuar una primera evaluación de un esquema dado. Nótese que el mínimo valor de la constante de error se obtiene con el método de Crank-Nicholson:  $C=1/12$ . De hecho, Dahlquist<sup>19</sup> ha demostrado que la constante de error más pequeña que puede obtenerse con cualquier método de segundo orden, que sea incondicionalmente estable, corresponde al método de Crank-Nicholson. Es bien sabido que el precio por este resultado óptimo es una relativamente pobre evolución de las raíces correspondientes (Fig. 1), lo que causa un amortiguamiento demasiado lento y de carácter oscilatorio de los modos altos.

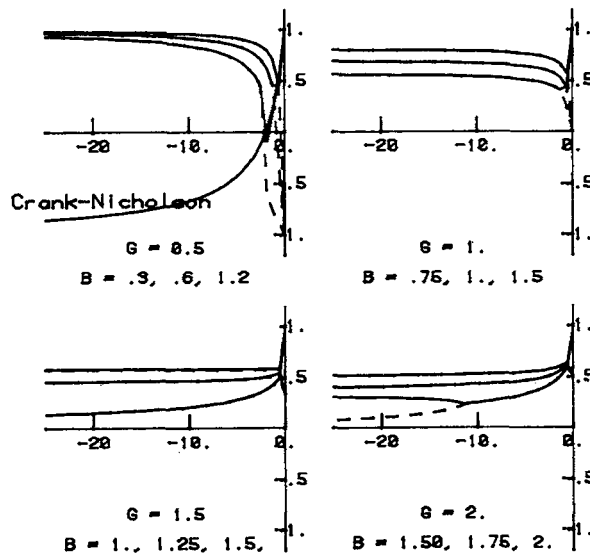


Figura 1.— Módulo de las raíces del polinomio característico asociado al método de Newmark para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

La familia  $\gamma=1.5$  resulta un método particularmente atractivo. Para  $\beta=0.8$  la constante de error es solamente  $1.6/12$ . y el dibujo (para  $G=1.5$ ) de la Figura 1 indica cómo, para pequeños valores de  $\beta$  (p.e.  $B=1.$ ), el factor de amplificación converge rápidamente hacia cero. Los valores  $\beta=0.8$  y  $\gamma=1.5$  han sido sugeridos por Zienkiewicz<sup>9</sup> al deducir el esquema dado por las ecuaciones (13) y (14) como una aplicación del M.E.F. en la dirección del tiempo. De hecho el valor de estos parámetros se corresponde con una ponderación "consistente" de tipo Galerkin.

Debe indicarse que todos los cálculos presentados aquí han sido realizados empleando una matriz de masa consistente, tal y como se indica en la ecuación (3), dado que algunos experimentos realizados con una matriz condensada por cuadratura dieron lugar a resultados muy pobres.

### Método iterado de Euler.

Con el propósito de comparar en los ejemplos que siguen se ha empleado también una versión iterada del método de Euler de diferencias atrasadas. Es bien conocido



que este algoritmo es extremadamente estable pero posee sólo una precisión de primer orden. El esquema utilizado consiste de una predicción de primer orden

$$\mathbf{y}_{n+1}^0 = 2\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_{n-1} \quad (17)$$

seguida sólo de una pasada por el corrector

$$\int_{\Omega} \frac{\sigma}{\Delta t} h_{n+1} \mathbf{N}\mathbf{N}^t \Delta \mathbf{y}_n d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \left. \frac{\partial h}{\partial t} \right|_{t_{n+1}} \mathbf{N}\mathbf{N}^t \Delta \mathbf{y}_n d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{N} [ \mathbf{N}^t \mathbf{y}_{n+1}^0 h^3 \nabla \mathbf{N}^t \Delta \mathbf{y}_n - \Lambda h_{n+1} \mathbf{N}^t \Delta \mathbf{y}_n ] d\Omega = \mathbf{f}_{n+1} \quad (18)$$

donde

$$\mathbf{f}_{n+1} = \int_{\Omega} \frac{\sigma}{\Delta t} \left. \frac{\partial h}{\partial t} \right|_{t_{n+1}} \mathbf{N}\mathbf{N}^t \mathbf{y}_n d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{N} [ \mathbf{N}^t \mathbf{y}_{n+1}^0 h^3 \nabla \mathbf{N}^t \mathbf{y}_n - \Lambda \mathbf{N}^t \mathbf{y}_n ] - \int_{\Gamma_q} \bar{q} \mathbf{N} d\Gamma \quad (19)$$

Antes de realizar la siguiente predicción del valor de  $\mathbf{y}$  debe ser actualizado, esto es  $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \Delta \mathbf{y}_n$ .

## EJEMPLOS

Los ejemplos que siguen están motivados en el análisis de cabezas volantes para discos de almacenamiento magnético. Una situación dinámica típica incluye un patín (cabeza) plano o formado por dos planos\* volando, a una altura que varía entre  $1\mu\text{m}$  y  $4\mu\text{m}$ , sobre el disco, que gira alrededor de su eje a unas 3.600 r.p.m. En todos los casos el patín se considera fijo en el espacio y las irregularidades en la superficie del disco se simulan mediante crestas o indentaciones. Estas y cualquier otra variación del espesor de película es simplemente recogida mediante una función  $h = h(x,t)$  apropiada. El cambio en el espesor de película produce una perturbación en el perfil estático de presiones. Esta respuesta transitoria es el objeto del análisis.

### Ejemplo 1.

Se consideran un cojinete de anchura infinita con un patín plano y una cresta de perfil senoidal. En la Figura 2 se presenta un esquema de la geometría cuya definición exacta es como sigue: el cociente entre el máximo y el mínimo espesor de película es 4., la altura de la cresta es el 20% del mínimo espesor de película (en el borde de salida) y la longitud de la cresta es el 30% de la proyección horizontal del patín. Los cálculos se han realizado con un parámetro de cojinete  $\Lambda=400$ . y un parámetro  $\sigma=100$ . Inicialmente la cresta se sitúa desde  $-0.3$  a  $0.0$ . La velocidad adimensional de la cresta ha sido independientemente fijada a 10. esto es, se requieren  $13 \times 10^{-2}$  unidades de tiempo para cruzar completamente la superficie del cojinete.

Para establecer las dimensiones apropiadas de los elementos que deben situarse en el borde de salida de cara a evitar la aparición de oscilaciones numéricas indeseables,

\* La denominación inglesa correspondiente es "tapper-flat slider".

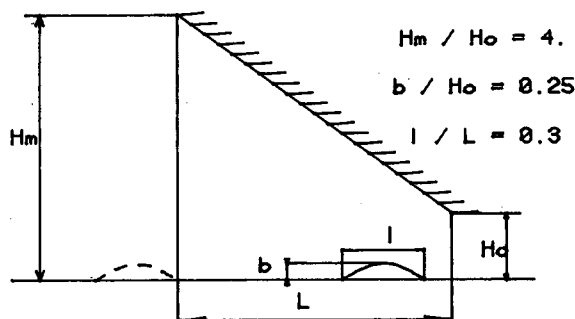


Figura 2.— Patín plano unidimensional con una cresta senoidal en la superficie del disco.

comparamos la ecuación de Reynolds con la ecuación lineal de fenómenos de transporte. En el caso unidimensional ésta puede escribirse como

$$k \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} - u \frac{d\vartheta}{dx} = 0,$$

donde  $k$  es la difusividad,  $u$  la velocidad de flujo y  $\vartheta$  una cierta propiedad que es transportada (p.e. temperatura). La condición habitual para la estabilidad sobre una malla uniforme con elementos de tamaño  $\Delta$  es  $\Delta \ll 2k/u$ . Por analogía sugerimos tomar en el caso de la ecuación de Reynolds  $2\text{ph}^2/|\Lambda|$ . Hacemos notar sin embargo que en la práctica se utilizan, generalmente, mallas no uniformes y que nosotros hemos obtenido buenos resultados imponiendo la condición mencionada sólo en la zona próxima al borde de salida. En este caso haciendo la aproximación  $\text{ph} \approx 1$ , puede emplearse la siguiente estimación  $\Delta \ll 2/|\Lambda|$ . En el ejemplo presente ésta da  $\Delta \ll 0.005$ . Los cálculos mostrados a continuación han sido realizados con  $\Delta = 0.00375$ , que está un poco por debajo del límite para tener un cierto margen de seguridad en el cálculo dinámico. Como regla práctica mencionamos también que 4 o 5 de estos pequeños elementos bastan normalmente para cubrir toda la capa límite y por lo tanto para asegurar la estabilidad.

En la Figura 3 los perfiles de presiones han sido dibujados para distintos instantes de tiempo. Aparece un máximo en el pico de presiones alrededor de  $t=0.110$ , cuando la cresta se sitúa desde  $x=0.8$  a  $x=1.1$ .

El objetivo principal de este ejemplo es comprobar las propiedades de convergencia del esquema de integración temporal. En la Tabla 1, se comparan los perfiles de presiones en el instante  $t=0.11$ , para varios tamaños del intervalo de tiempo, en términos de error cuadrático medio dado por

$$e = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{i=1}^N [p(x_i) - y_i]^2 \right\}^{1/2}$$

donde  $N$  es el número total de nodos,  $p(x_i)$  el valor de referencia para la presión en el nodo  $i$  e  $y_i$  el valor calculado de la presión en ese nodo. El valor de referencia se ha obtenido por el método de extrapolación de Richardson.

De la observación de los resultados recogidos en la Tabla 1 pueden señalarse los siguientes puntos. En primer lugar, se consigue, efectivamente, la esperada tasa de convergencia cuadrática del algoritmo de Newmark. En segundo lugar, según se va disminuyendo el tamaño del intervalo de tiempo el algoritmo con  $\beta=0.25$ ,  $\gamma=0.5$  muestra un comportamiento progresivamente mejor, a pesar del más pobre coeficiente de amortiguamiento predicho, que aquél con  $\beta=0.8$ ,  $\gamma=1.5$ . Sólo para intervalos

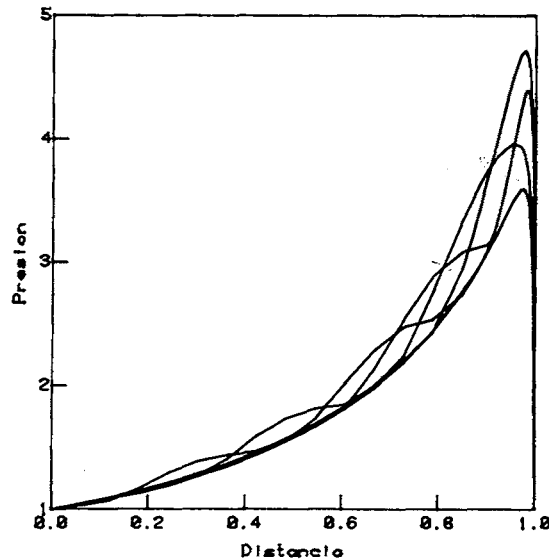


Figura 3.— Perfiles de presiones para el ejemplo de la Figura 2.

de tiempo relativamente grandes,  $\Delta t=0.02$ , ambos métodos dan una precisión similar. Esto puede ser debido a que el mayor amortiguamiento numérico del segundo rápidamente se deshace de los modos altos asociados con el gran  $\Delta t$ . En relación con esta observación señalamos también que recientemente ha sido probado que el método de Crank-Nicholson en combinación con el método de los Elementos Finitos (es decir nuestro esquema con  $2\beta=\alpha$ ) se comporta mucho mejor que su equivalente en Diferencias Finitas en el contexto de problemas de transporte<sup>20</sup>. Probablemente esta conclusión resulte también aplicable al caso presente explicando los buenos resultados observados en la práctica.

$\Delta t$	Newmark				Euler atrasado	
	$\gamma=2\beta$		$\gamma=1.5 \quad \beta=.8$		e	e/ $\Delta t$
	e	e/ $\Delta t^2$	e	e/ $\Delta t^2$		
0.02000	0.056	140.	0.056	140.	0.083	4.15
0.01000	0.017	170.	0.018	180.	0.043	4.34
0.00500	0.0047	188.	0.0062	248.	0.023	4.76
0.00250	0.0013	208.	0.0018	288.	0.011	4.52
0.00125	0.00034	217.	0.00051	326.	0.0058	4.21

Tabla 1

Hacemos notar que, en general, mallas que dan resultados estables en el caso estático pueden resultar, dependiendo del tipo de excitación considerado, inadecuadas para el análisis dinámico. En particular, la capa límite en el borde de salida se hace ligeramente más estrecha y su pendiente aumenta según el pico de presiones se desplaza hacia la derecha.

### Ejemplo 2.

Finalmente, consideramos un patín bidimensional de tipo Winchester cuya geometría ha sido delineada en la Fig. 4. Esta cabeza ha sido usada extensamente durante

varios años en diversos dispositivos de almacenamiento magnético. Su definición exacta para este ejemplo es como sigue: la superficie del cojinete es  $1.0 \times 0.10$  y el espesor de película es 15.0, 2.0 y 1.00 en las líneas  $x=0.0$ ,  $0.10$  y  $1.0$  respectivamente. Los parámetros adimensionales del cojinete son  $\Lambda=400.0$  y  $\sigma=1.692 \times 10^4$ .

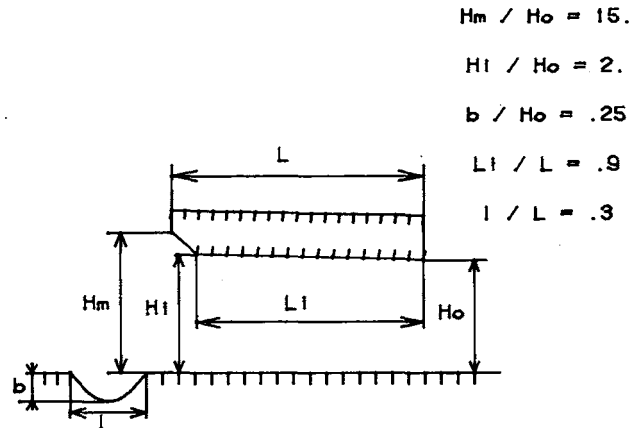


Figura 4.— Vista lateral de una cabeza tipo Winchester y un defecto senoidal en la superficie del disco.

La excitación considerada en este ejemplo es un defecto en la superficie del disco, modelado como una indentación de forma senoidal. La longitud del defecto es 30 la del cojinete, su profundidad 20% del espesor de película en el borde de salida y su anchura es idéntica a la del patín  $0.10$ . La velocidad adimensional es igual a  $4.92 \times 10^{-02}$ . En su posición inicial el defecto se sitúa en las abscisas  $x=-0.3$  y  $x=0.0$ , justo a la entrada del cojinete. Por simetría sólo se considera la mitad del cojinete.

En la Fig. 5 se muestra la malla empleada. No se ha hecho ningún intento de optimizar ésta ya que los resultados se muestran con un mero propósito ilustrativo. Señalamos que es aconsejable situar una línea de nodos a lo largo de la recta  $x=0.1$ , donde el primer plano del patín se intersecta con el segundo: de esta forma el carácter abrupto de la solución es perfectamente capturado con los elementos  $C^0$ . El refinamiento de la malla en esa área es introducido fundamentalmente para obtener un cálculo

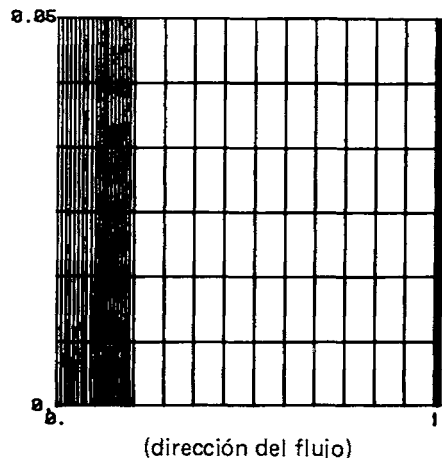


Figura 5.— Malla para la cabeza Winchester de la Figura 4 (por simetría sólo se considera la mitad del patín, la zona oscura en el borde de salida contiene  $4 \times 6$  elementos).

preciso del pico de presiones y no es realmente un requerimiento para la estabilidad numérica. Para el borde de salida puede emplearse la estimación del ejemplo anterior y sólomente cuatro elementos han sido situados a lo largo de la dirección de flujo para cubrir toda la capa límite.

El cálculo ha sido realizado con  $\beta=0.8$  y  $\gamma=1.5$  y un incremento de tiempo de 1.00 (aproximadamente 1./25. del tiempo necesario para que el defecto cruce totalmente el cojinete).

En la Figura 6a se han representado las isobaras y en la Figura 6b una vista lateral del perfil de presiones, en este último caso las diversas líneas representan las presiones a lo largo de las rectas horizontales en la malla de la Figura 5.

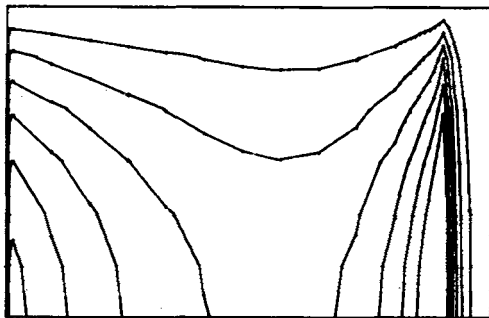


Figura 6a.— Perfil estático de presiones para el ejemplo núm. 2 (isóbaras).

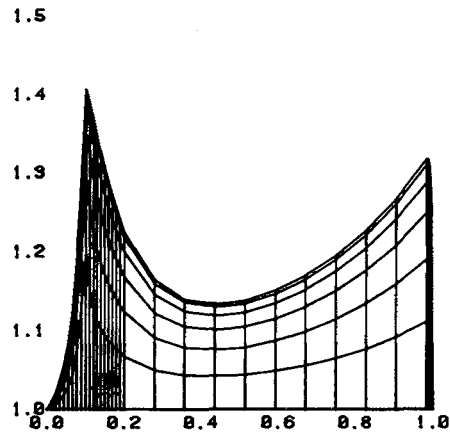
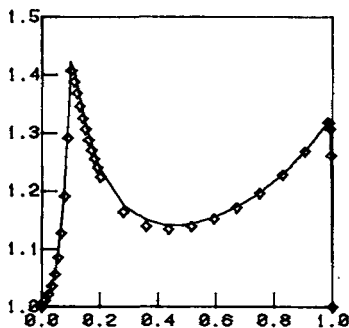
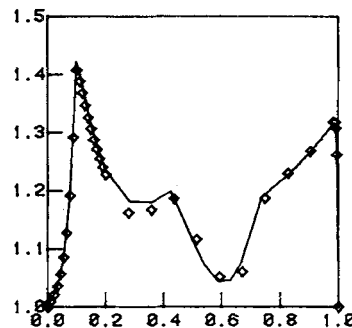


Figura 6b.— Vista lateral del perfil estático de presiones para el ejemplo núm. 2 (presión a lo largo de las líneas horizontales de la Figura 5).

Los resultados de este ejemplo se han comparado, tanto en el caso dinámico como estático, con los obtenidos mediante un algoritmo de Diferencias Finitas<sup>3,25</sup>. La solución por Diferencias Finitas ha sido calculada con una malla no uniforme de 50x20 puntos (sin haberse considerado la condición de simetría), puede tomarse por lo tanto como un resultado de referencia ya que nuestra malla es ligeramente más grosera. En la Figura 7 se muestra una comparación en términos del perfil de presiones a lo largo de la línea central del cojinete en los instantes  $t=0.0$  y  $t=15.0$ . Como cabía esperar se observa una muy buena correlación entre ambas soluciones.



Perfil estático de presiones a lo largo del eje del patín.



Presión a lo largo del eje del patín en el instante  $t = 15$ .

Figura 7.— Comparación entre una solución obtenida con Diferencias Finitas (trazo continuo) y el presente esquema (rombos).

En la Figura 8 se recoge una representación tridimensional de la presión para los instantes  $t=5.0$ ,  $10.0$ ,  $15.0$  y  $20.0$ . La escala adimensional de tiempos empleada se obtiene multiplicando el tiempo real por la frecuencia  $\tau=10^5 \text{ s}^{-1}$ .

Nótese que incluso con el moderado tamaño de defecto considerado en este ejemplo se produce una seria perturbación en el perfil de presiones. Para defectos de mayor profundidad es necesario refinar la malla a lo largo de toda la superficie del cojinete. Tal vez en estos casos una formulación alternativa como elementos móviles o algún tipo de "upwind" resulte preferible, aunque es posible que en tales situaciones algunas de las hipótesis implícitas en la ecuación de Reynolds dejen de ser razonablemente satisfechas.

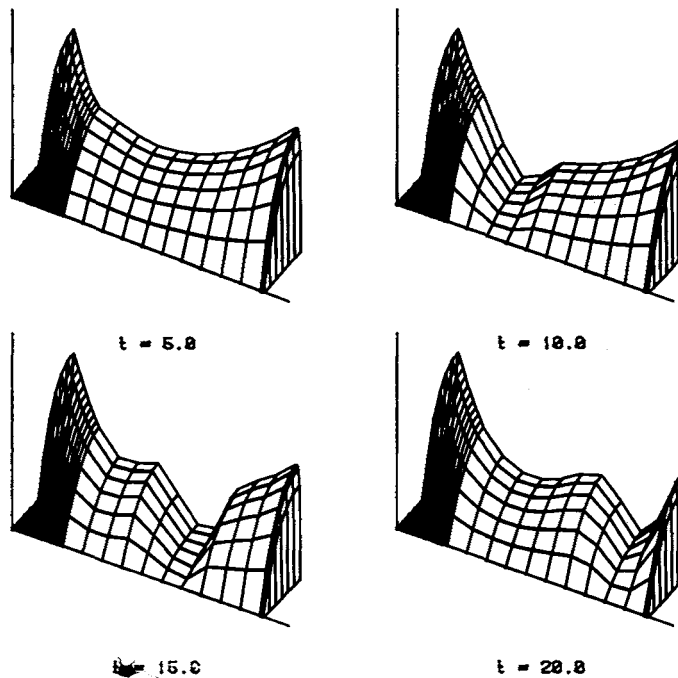


Figura 8.— Representación tridimensional de presiones para el ejemplo núm. 2 en los instantes  $t = 5.0$ ,  $15.0$ ,  $20.0$ .

## CONCLUSIONES

Se ha presentado la aplicación de una formulación de Elementos Finitos, basada en el método de Bunov-Galerkin y un algoritmo de integración temporal desarrollado a partir del método de Newmark, procedimiento éste bien conocido en su aplicación a la dinámica de estructuras, al análisis estático y dinámico de cojinetes de gas. El esquema estudiado presenta la inherente flexibilidad del método de los Elementos Finitos y su respuesta lo hace muy adecuado para el tratamiento de problemas prácticos.

Los puntos más relevantes de la discusión precedente pueden resumirse como sigue. Los simples cuadriláteros  $C^0$ , en combinación con discretizaciones diseñadas juiciosamente, son suficientes para asegurar la estabilidad de la solución numérica aún en el caso de valores altos del parámetro de cojinete ( $|\Lambda|$ ). En este sentido, se ha sugerido una regla "ad hoc" para seleccionar automáticamente el tamaño de los elementos que deben situarse en el borde de salida. Para el caso dinámico el algoritmo de predic-

ción-corrección empleado presenta la esperada tasa de convergencia cuadrática y unas buenas propiedades de estabilidad, suponiendo que se calcule la matriz de amortiguamiento de forma consistente.

Se han incluido, en la discusión que precede, un breve análisis del algoritmo para la integración en el tiempo en su aplicación a ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Los resultados de éste y los obtenidos en su aplicación práctica animan a un análisis más profundo del esquema y a utilizarlo para el tratamiento de la ecuación de Reynolds y de otras ecuaciones parabólicas no lineales.

### AGRADECIMIENTOS

El autor quiere sinceramente agradecer la financiación de esta investigación por una beca Fulbright/MEC. También desea expresar su reconocimiento a los Profesores D. B. Bogy y F. E. Talke por su ayuda en la definición de este proyecto y por las muchas discusiones y fructíferas sugerencias a lo largo del desarrollo de este trabajo.

### REFERENCIAS

1. S. M. Rodhe. "Computational techniques in the analysis and design of fluid film bearings", *Tribology* (Chapt. 6) Ed. Srezi, A.Z., (1981).
2. V. Castelli y J. Pirvics. "Review of numerical methods in gas bearing film analysis", *Trans. ASME Jour. Lubr. Tech.* 90 No. 4, 777-792, (1968).
3. J. W. White y A. Nigam. "A factorial implicit scheme for the numerical solution of the Reynolds equation at very low spacing", *Trans. ASME Jour. Lubr. Tech.* 102, 80-85, (1980).
4. M. M. Reddi y T. Y. Chu. "Finite Element solution of the steady state compressible lubrication problem", *Trans. ASME.*, 92 Series F, 495-501, (1970).
5. S. M. Rodhe y K. P. Oh. "Higher order Finite Element method for the solution of compressible porous bearing problems", *Int. Jour. Num. Meth. Engng.* 9, 903-912, (1975).
6. C. García-Suárez, D. Bogy y F. E. Talke. "Use of an upwind Finite Element scheme for air bearing calculation", en *Tribology and Mechanics of Magnetic Storage Systems*, ASME/ASLE Lubrication Conf. San Diego, ASLE Special Publication SP-16, 90-96, (1984).
7. P. Newmark. "A method for computation of structural dynamics", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, 85 EM3, 67-94, (1959).
8. W. A. Gross. *Gas Film Lubrication*, Wiley New York, (1962).
9. O. C. Zienkiewicz. *The Finite Element Method*, 3rd. Edition, McGraw-Hill London, (1977).
10. J. A. Schmitt y R. C. DiPrima. "Asymptotic methods for a general finite width gas slider bearing", *Trans. ASME Jour. Lubr. Tech.* 100, 254-260, (1978).
11. J. C. Heinrich, P. S. Huyakorn, O. C. Zienkiewicz y A. R. Mitchell. "An upwind Finite Element scheme for the two dimensional convective transport equation", *Int. Jour. Num. Meth. Engng.* 11., 131-143, (1977).
12. T. J. R. Hughes. "A simple scheme for developing 'upwind' Finite Elements", *Int. Jour. Num. Meth. Engng.* 12, 1359-1365, (1978).
13. T. J. R. Hughes y A. Brooks. "A multi-dimensional upwind scheme with no crosswind diffusion", en *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*, Ed. Hughes, T. J. R., AMD-Vol. 34, ASME New York, (1979).
14. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Special volume on Optimal Finite Element Methods for Fluid Dynamics and Non-symmetric operator problems, 32 1-3, (1984).
15. O. C. Zienkiewicz. "A new look at Newmark, Houbolt and other time stepping formulae. A weighted residual approach", *Univ. of Wales, Swansea Civil Engn. Report C/R/273/76*, (1976).
16. P. Henrici. *Discrete variable methods in ordinary differential equation*, John Wiley and Sons, New York, (1962).

17. C. W. Gear. *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1971).
18. C. García-Suárez. "Static and Dynamic Analyses of Gas Bearings Using Finite Elements", The Center for Magnetic Recording Research, University of California, San Diego, Tech. Rept. # 6, Dec., (1984).
19. C. Dahlquist. 1968, "A special stability problem for linear multistep methods", *BIT* 3, 27-43, (1963).
20. J. Donea, J. Giullani y H. Laval. "Time-accurate solution of advection-diffusion problems by Finite Elements", *Comp. Meth. Appl. Meth. Engng.* 45, 123-145, (1984).
21. D. K. Miu. "Dynamics of Gas-lubricated Slider Bearings in Magnetic Recording Disk Files: Theory and Experiments", Ph. D. Thesis, University of California, Berkeley, Mayo (1985).