

# APLICACION DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS AL ESTUDIO DE LA DISTORSION DE TABLEROS DE PUENTE DE SECCION LOSA ALIGERADA

ANGEL C. APARICIO

y

JUAN M. ESTRADERA

*E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
Universidad Politécnica de Cataluña*

## RESUMEN

El análisis de tableros de puente de sección tipo losa con aligeramientos circulares por métodos tales como emparrillado plano, teoría de la losa ortótropa, elementos finitos tipo placa, etc., tropieza con el inconveniente de que no existen métodos sencillos suficientemente aproximados para determinar las características mecánicas transversales, dato imprescindible para realizar dicho análisis.

En el presente trabajo se efectúa un estudio paramétrico de la distorsión de la sección transversal de este tipo de tableros mediante un programa de elementos finitos, supuesto en estado de deformación plana, para obtener una inercia y un área reducida de cortante transversales equivalentes.

Estas características mecánicas, resultado del estudio de una serie de diferentes geometrías de tableros, se recogen en fórmulas compactas de diseño.

## SUMMARY

The development of simple and accurate procedures to evaluate the transversal elastic bending and shear rigidities for concrete circular voided slab bridges is of most importance for the analysis of such structures by methods like plane grillage, orthotropic plate theory, finite plate bending elements etc.

In this work a parametric study about the shear distortion of the cross section of this kind of bridges has been carried out using two dimensional finite elements. Results for the flexural and shear stiffness are presented in a compact form for several geometric conditions of slab thickness, circular voids diameter and voids separation.

## INTRODUCCION

Dentro de las tres tipologías transversales de tableros de puentes más utilizadas (vigas, losas y sección cajón), las losas constituyen una solución apropiada para puentes de luces pequeñas y medias. Su campo de aplicación varía entre los 10 y los 45 metros de luz.

Los tableros losa compiten ventajosamente en numerosos aspectos con aquellos que están formados por vigas prefabricadas. Entre dichas ventajas, citaremos:

- Ventajas de tipo estructural: Mayor rigidez a torsión y a flexión. Mayor durabilidad y seguridad a causa de su hiperestatismo.
- Ventajas de tipo constructivo: Presentan gran facilidad para adaptarse a plantas difíciles, y un encofrado y hormigonado más sencillo que otras tipologías.

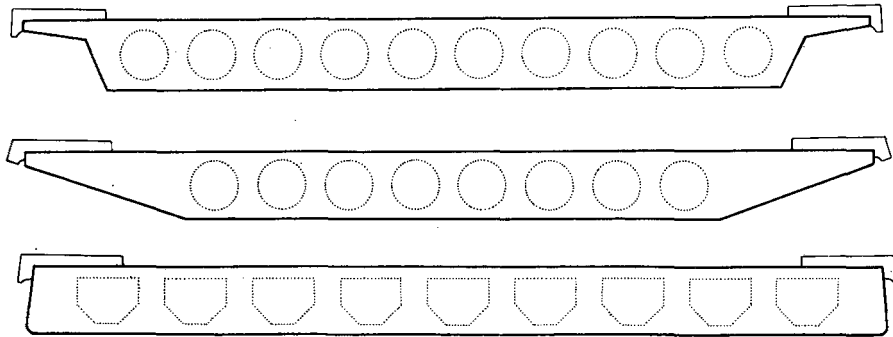
Recibido: Noviembre 1984

– Ventajas de otros tipos: Supresión de juntas de calzada, mayor libertad en la disposición de elementos de apoyo, y mejores cualidades estéticas.

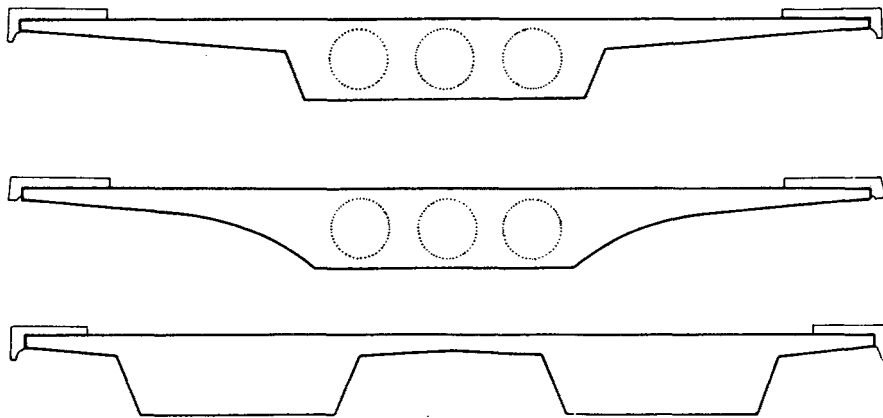
Pueden distinguirse dos tipologías fundamentales en los tableros losa: (Figura 1)

– Losas de inercia concentrada, cuando la rigidez a flexión del tablero se concentra en una zona reducida del mismo, y

– Losas de inercia distribuída, cuando la rigidez a flexión longitudinal se reparte uniformemente en la sección transversal.



a) Losas de inercia distribuida.



b) Losas de inercia concentrada.

Figura 1. Ejemplos de tableros de puente de sección losa.

En ambas tipologías puede plantearse la necesidad del aligeramiento de la sección. Los aligeramientos surgen a efectos de reducir, en lo posible, el peso propio de la losa, eliminando el material de las zonas en que contribuye menos a la resistencia del tablero. Se trata, por lo tanto, de dar a los aligeramientos una geometría que conserve, en la mayor medida, la inercia de la sección, con el objeto de aumentar el rendimiento de ésta.

Suele convenir, por criterios de orden económico y constructivo, aligerar aquellas losas –tanto de inercia concentrada como distribuída– que superen los 25 metros de luz, siempre que su canto sea constante. En losas de canto variable, la posibilidad de aligerar vendrá condicionada, en cada caso particular, por la tipología longitudinal del tablero.

Los aligeramientos suelen presentar formas cuadradas, rectangulares, o circulares (Figura 2). Deben redondearse o acartabonarse las esquinas que presenten fuertes ángulos, a efectos de facilitar el hormigonado.

Como materiales para la realización de los aligeramientos se emplean el táblex sobre cuadernas, el nervometal, el fibrocemento y el poliuretano. También se han empleado, en aligeramientos circulares, tubos hinchables de goma que pueden recuperarse una vez se ha producido el fraguado.

En el presente trabajo nos ceñiremos al estudio de secciones losa con aligeramientos circulares, por ser uno de los tipos utilizados con mayor frecuencia, y con un comportamiento menos estudiado hasta el presente.

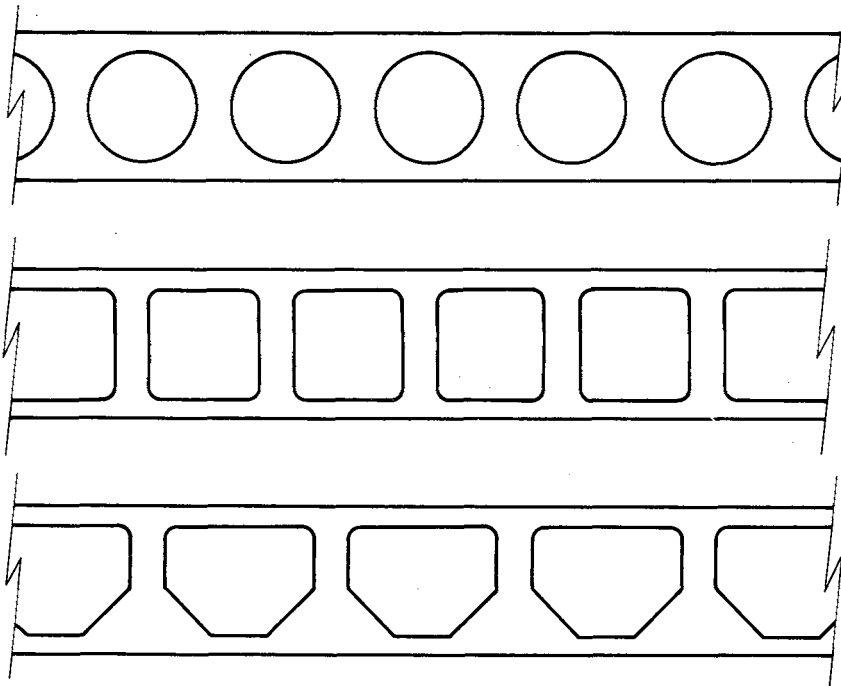


Figura 2. Diversos tipos de aligeramientos.

Los métodos de análisis más comunmente utilizados para el cálculo de tensiones y esfuerzos en tableros de puentes están basados, hoy por hoy, en la Teoría de la Elasticidad. Sobre este marco se han desarrollado métodos como la teoría de la losa ortótropa, lámina plegada, emparrillado, elementos finitos, etc. Un resumen de la aplicabilidad de los diferentes métodos de cálculo a distintos tipos de puentes, ha sido realizado por Cusens y Pama<sup>4</sup>. Estos autores señalan el gran campo de aplicación del método de los elementos finitos en el análisis de distintas tipologías de tableros, cualquiera que sea su tipología en planta y disposición de apoyos. También señalan la facilidad del método del emparrillado para modelizar todo tipo de tableros, si bien estiman muy limitada su aplicabilidad a aquellos que están formados por losas aligeradas.

Por otra parte, Hambly<sup>5</sup> y otros autores<sup>6,7</sup> han señalado la versatilidad del método del emparrillado plano y su aplicabilidad a este tipo de estructuras, siempre que la formulación incluya la deformabilidad por esfuerzo cortante.

Dada la gran facilidad en la introducción de los datos del problema y en la interpretación de resultados, el método del emparrillado se usará aquí cuando se precise la obtención de esfuerzos en algún caso concreto.

Para poder realizar la modelización del tablero por el método del emparrillado, losa ortótropa, elementos finitos tipo placa, o cualquier otro método que trabaje reduciendo a esfuerzos la distribución de tensiones a lo largo del espesor, se precisa obtener los valores de la inercia, área reducida de cortante, y módulo de torsión, tanto en sentido longitudinal como transversal.

En dirección longitudinal, los parámetros mencionados son fácilmente deducibles a base de consideraciones geométricas y de Resistencia de Materiales. Por el contrario, en sentido transversal, y concretamente si la sección es de tipo losa con aligeramientos circulares, la asignación no es ni mucho menos evidente y, en el caso del área reducida de cortante, no existe un método simple lo suficientemente aproximado.

Por lo que respecta a la inercia en sentido transversal, es comúnmente aceptado el criterio de Rowe<sup>9</sup>, que ha sido señalado por West<sup>10</sup>. Consiste en sustituir el aligeramiento circular por uno cuadrado de igual área, y tomar como inercia transversal la de la figura geométrica formada por las dos cabezas que aparecen al seccionar longitudinalmente el aligeramiento equivalente (ver Figura 3).

Recientemente, Jaeger y Bakht<sup>7</sup>, han publicado una fórmula aproximada, debida a Elliott, para el cálculo de la inercia transversal. Sin embargo, en ningún momento se menciona el método empleado para la obtención de dicha fórmula, remitiendo para su justificación a referencias difícilmente accesibles.

Resulta, por lo tanto, de gran importancia contrastar con un método de suficiente aproximación (tal como lo es el método de los elementos finitos), los resultados que se obtienen de la aplicación de los métodos mencionados anteriormente.

En lo referente al cálculo de la rigidez frente a la deformación por esfuerzo cortante transversal, la mayoría de los autores dan como válida la analogía de la viga Vierendeel, consistente en modelizar la sección aligerada por una serie de barras equivalentes (Figura 4). El principal problema de este método reside en cómo se asignan las características mecánicas a dichas barras. Generalmente, se reduce el problema a una geometría de cantos constantes, que conduce a resultados demasiado distantes de la realidad, como veremos más tarde.

Análogamente al caso de la inercia transversal, se precisa un análisis por elementos finitos para evaluar, lo más exactamente posible, la rigidez frente a la distorsión por esfuerzo cortante transversal.

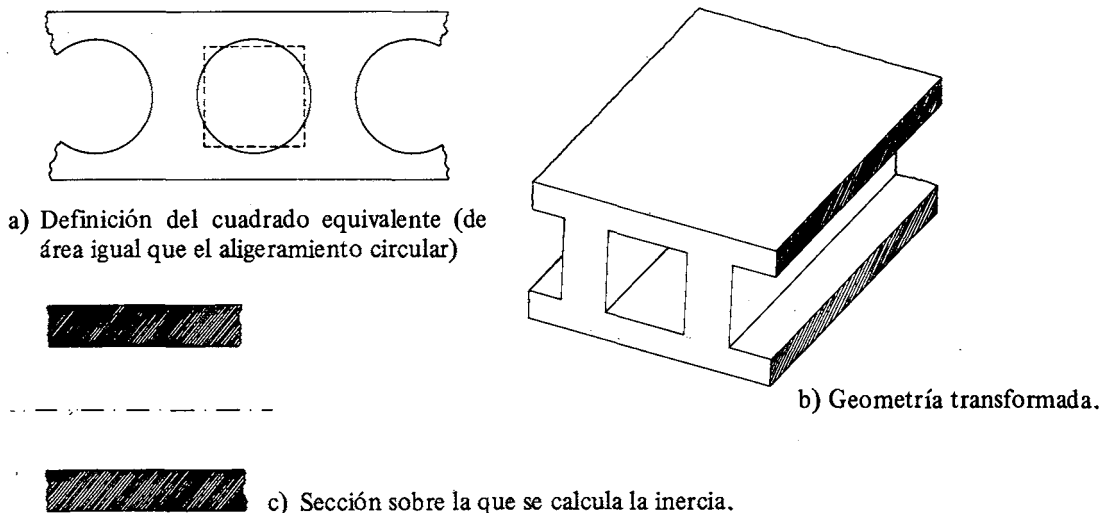


Figura 3. Método de Rowe para la determinación de la inercia transversal.

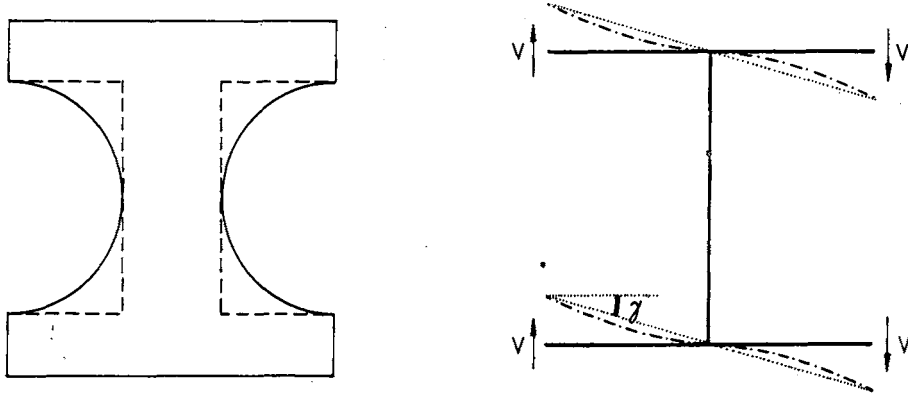


Figura 4. Esquema para el cálculo de la rigidez transversal frente al esfuerzo cortante, por la analogía de la viga Vierendeel.

Es de señalar que existe una notable discrepancia acerca del límite a partir del cual debe tenerse en cuenta el efecto de la deformación por esfuerzo cortante. Así, mientras West<sup>10</sup> señala que la distorsión puede despreciarse siempre y cuando el área aligerada no supere el 60% de la sección total, Beckett<sup>3</sup> rebaja dicho límite al 50%, lo que viene a representar una relación entre el diámetro del aligeramiento y el canto total de 0,75. Por su parte, Juan J. Arenas<sup>1</sup> toma como 0,7 el valor máximo de dicha relación para el cual puede despreciarse el efecto de la deformación por cortante.

Por lo tanto, es preciso evaluar la influencia que la distorsión de la sección transversal, debida a la existencia de aligeramientos, tiene en el reparto transversal de la flexión longitudinal del tablero. Ello se efectuará calculando casos representativos de este tipo de puentes, tanto incluyendo como despreciando el efecto de la distorsión.

#### INFLUENCIA DE LA DISTORSION DE LA SECCION TRANSVERSAL EN LA DISTRIBUCION DE TENSIONES LONGITUDINALES

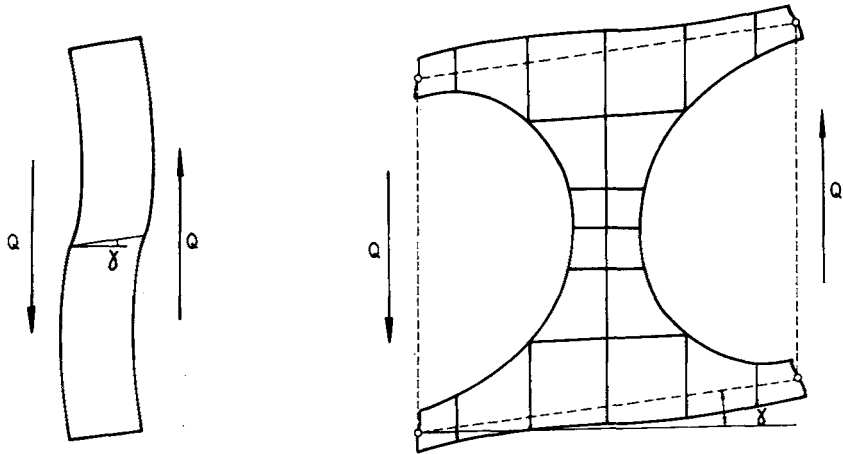
La deformación por esfuerzo cortante, tal como se define en Resistencia de Materiales, viene caracterizada por el ángulo  $\gamma$  que se distorsiona la sección de la pieza respecto de la fibra media, cuando actúa un esfuerzo cortante  $Q$ . La relación entre dichos valores suele expresarse

$$\gamma = \frac{Q}{G A'} \tag{1}$$

donde  $G$  es el módulo de cizalladura, y  $A'$  la denominada área reducida de cortante.

En general, el valor de  $\gamma$  no es deducible a primera vista, debido al efecto del alabeo de la sección, que hace que la deformación angular sea distinta en cada fibra de la rebanada. El valor de  $\gamma$  se toma como una media de dichas deformaciones angulares, realizada, generalmente, por métodos energéticos<sup>8</sup>.

En el caso de la sección transversal de un tablero de sección losa con aligeramientos circulares, la situación es semejante. La unidad de análisis, análoga a la rebanada en el caso anterior, es el nervio. Cuando sobre uno de dichos nervios actúa una pareja de esfuerzos cortantes, se produce una deformación angular, que es lo que llamamos distorsión (Figura 5). Se podrá, por lo tanto, asignar un área reducida de cortante transversal  $A'$ , mediante la ec. (1), para obtener una medida de dicho efecto.



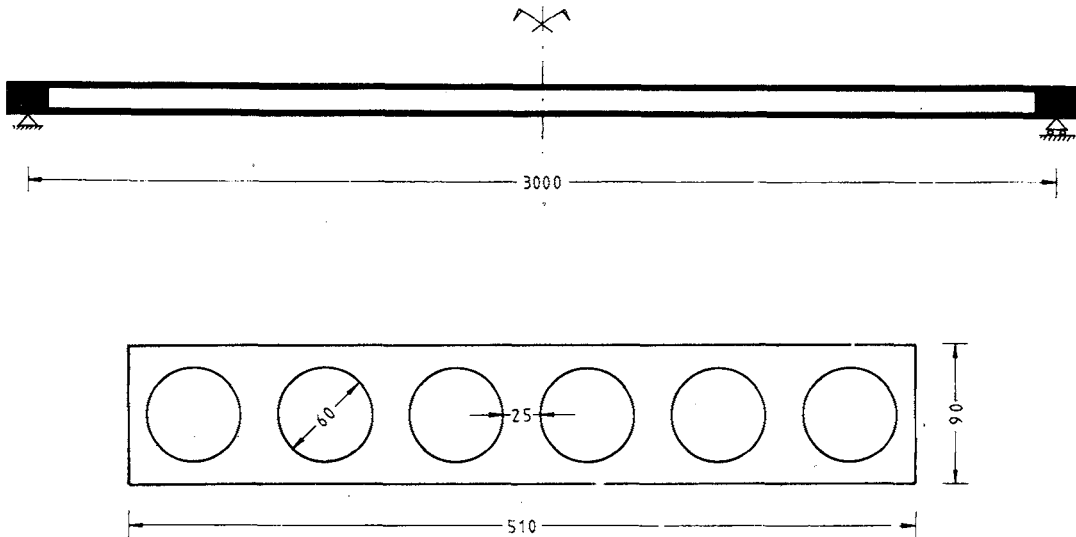
a) Sobre la rebanada simple.

b) Sobre un nervio de la losa aligerada.

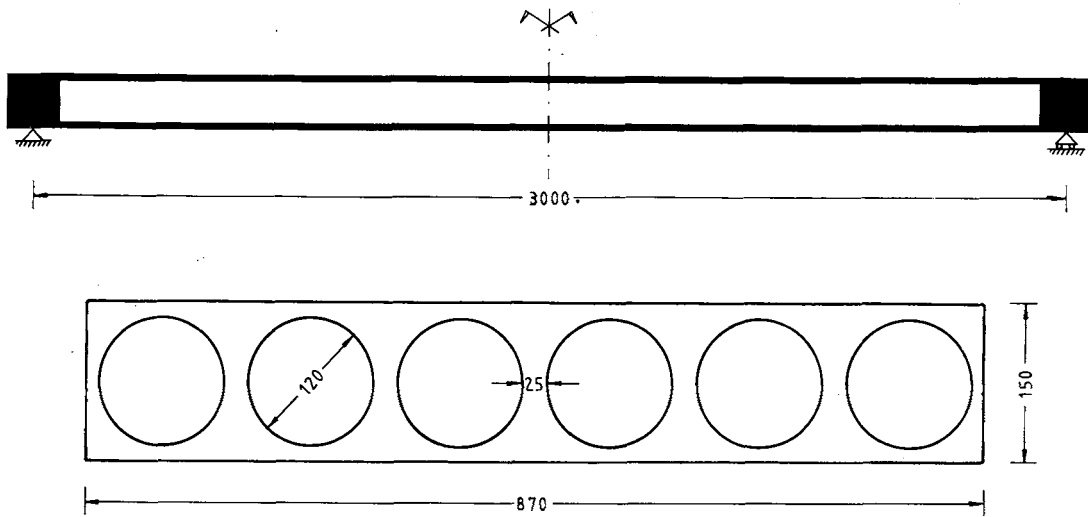
Figura 5. Definición de la deformación por esfuerzo cortante.

La sección que separa los distintos nervios no se mantiene plana durante la deformación por cortante, sino que se produce lo que podríamos llamar, por analogía con la rebanada, un “alabeo” de las secciones extremas. Dicho alabeo deberá tenerse en cuenta en el cálculo de la rigidez frente a la distorsión transversal.

Con objeto de ilustrar la importancia de la distorsión en la distribución de tensiones longitudinales, resolveremos dos casos de características reales, despreciando primero la deformación por cortante transversal, e incluyendo, posteriormente, su efecto. Estos dos casos vienen a representar los límites extremos de máxima y mínima área reducida que pueden obtenerse en los tableros losa aligerada, de acuerdo con los criterios económicos y de diseño más aceptados. (Ver Figura 6).



a) Tablero 1.



b) Tablero 2.

Figura 6. Geometría de los tableros usados para evidenciar la importancia de la distorsión (cotas expresadas en cm).

El cálculo de esfuerzos se realiza por el método del emparrillado plano, habiéndose determinado, para cada tablero, las características mecánicas objeto del estudio, mediante un análisis previo de la sección transversal por elementos finitos.

El primer caso consiste en un tablero de 30 m. de luz, biapoyado, de 90 cm. de canto y 510 cm. de anchura, la cual corresponde a 6 aligeramientos de 60 cm. de diámetro, separados a una distancia de 25 cm. (anchura mínima de almas). Las características mecánicas transversales, inercia y área reducida, se han deducido a partir de un análisis previo por elementos finitos, como ya hemos indicado, y el resto de ellas por métodos geométricos y de resistencia de materiales. Sus valores se recogen en la Tabla 1.

Tablero 1	Longitudinal	Transversal
Inercia	53200 cm <sup>4</sup> /cm	49700 cm <sup>4</sup> /cm
Area reducida	27,0 cm <sup>2</sup> /cm	10,2 cm <sup>2</sup> /cm
Rigidez a torsión	156500 cm <sup>4</sup> /cm	157000 cm <sup>4</sup> /cm

Tabla 1. Características mecánicas asignadas al primer tablero de los analizados por el método del emparrillado plano.

La geometría que se ha dado al modelo del emparrillado puede verse en la Figura 7.

El tablero se halla sometido a una carga excéntrica en el centro del vano de 60 Tn.

Sobre la sección central se han obtenido las tensiones normales en las fibras extremas del tablero. Se observa (Figura 8), que, en el caso de incluir la deformación por esfuerzo cortante, dichas tensiones alcanzan un aumento de hasta un 7% con respecto a las obtenidas sin incluir la distorsión. La máxima variación se produce en la zona situada bajo la carga.

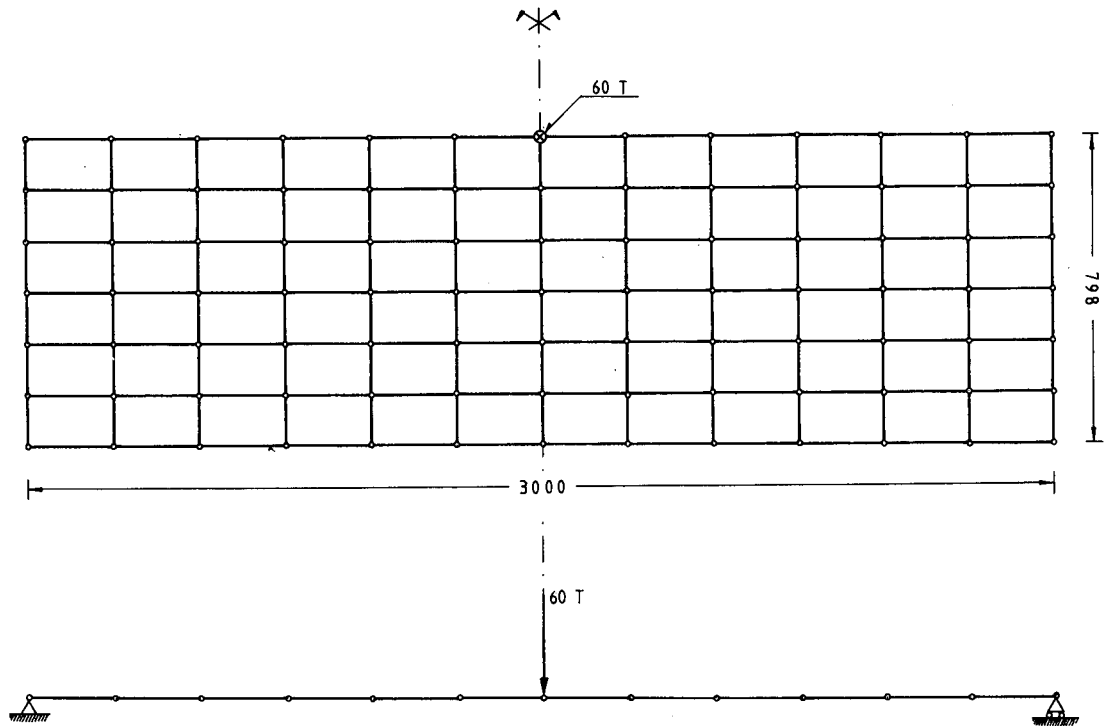
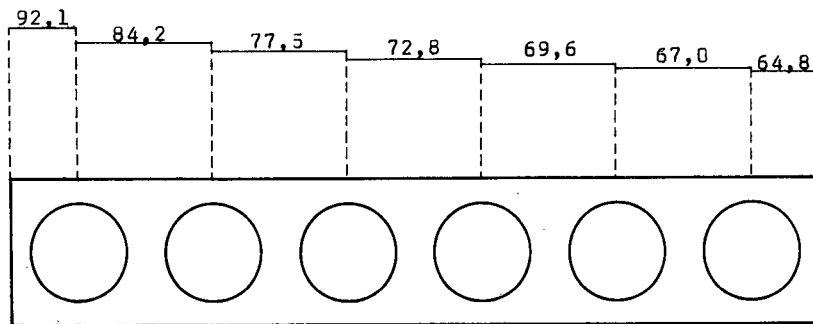
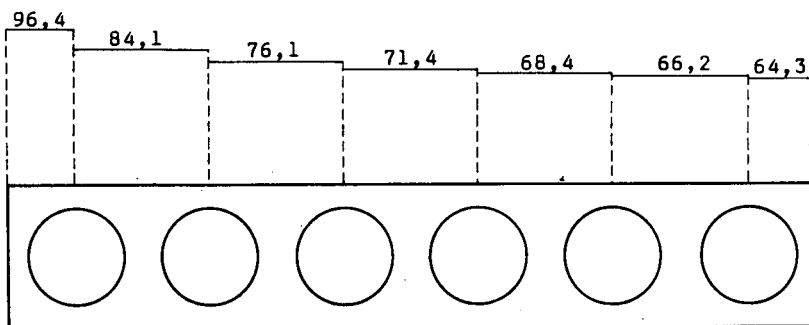


Figura 7. Modelo del tablero 2, para su análisis por el método del emparrillado. Carga excéntrica de 60 T en el centro del vano (cotas en cm).



a) Tablero 1, sin deformación de cortante transversal.



b) Tablero 1, con deformación de cortante.

Figura 8. Comparación de las tensiones longitudinales (en Kg/cm<sup>2</sup>) en el centro del vano.



El segundo caso analizado es un tablero análogo al anterior, con 150 cm. de canto, lo que viene a constituir el límite superior de aplicabilidad de los puentes losa aligerados. Se han tomado igualmente un total de 6 aligeramientos, con una separación entre los mismos de 25 cm., y con un diámetro de 120 cm. Las características mecánicas a partir de las cuales se calculan las de las barras equivalentes del emparrillado se recogen en la Tabla 2.

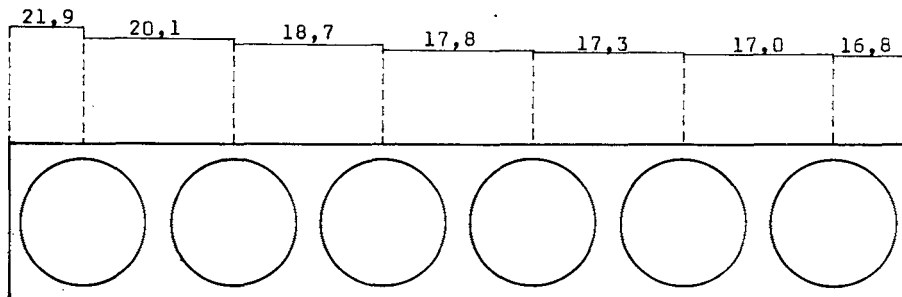
Tablero 2	Longitudinal	Transversal
Inercia	211100 cm <sup>4</sup> /cm	169600 cm <sup>4</sup> /cm
Area reducida	44,3 cm <sup>2</sup> /cm	5,8 cm <sup>2</sup> /cm
Rigidez a torsión	636200 cm <sup>4</sup> /cm	543700 cm <sup>4</sup> /cm

Tabla 2. Características mecánicas del segundo tablero, para su análisis por el método del emparrillado.

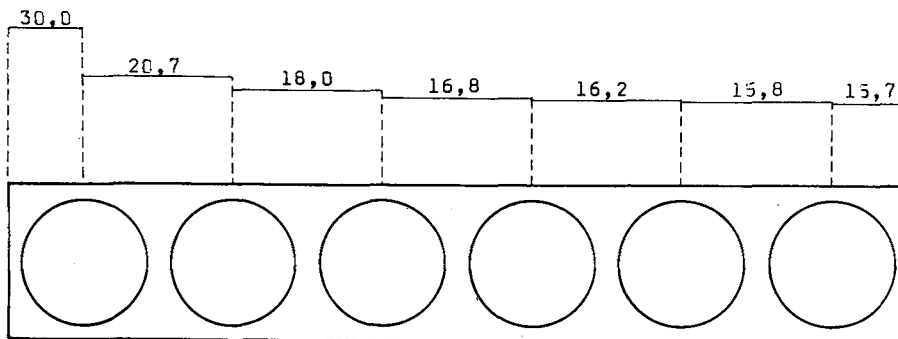
La carga también es idéntica a la del caso anterior.

Las tensiones normales, caso de incluir la deformación por esfuerzo cortante, presentan (Figura 9), un aumento bajo la zona de la carga de hasta un 37%.

En la Tabla 3 se comparan las características de los dos tableros analizados



a) Tablero 2, sin deformación de cortante transversal.



b) Tablero 2, con deformación de cortante.

Figura 9. Comparación de las tensiones longitudinales (en Kg/cm<sup>2</sup>) en el centro del vano.

	Tablero 1	Tablero 2
Area aligerada	37%	52%
Relación $\sigma_p/\sigma_m$	1,23	1,19
Relación $\sigma'_p/\sigma_m$	1,29	1,63
$\Delta\sigma_p/\sigma_p$	7%	37%

$\sigma_p$  = Tensión normal máxima, sin deformación por cortante

$\sigma'_p$  = idem. con deformación por cortante

$\sigma_m$  = Tensión normal media (fibra superior)

$\Delta\sigma_p = \sigma'_p - \sigma_p$

Tabla 3. Comparación entre los resultados más significativos del análisis de los tableros 1 y 2.

Dada la importante variación de las tensiones que resulta de incluir o no la deformación por esfuerzo cortante, la cual no es despreciable ni aún en el caso de su mínima influencia, queda demostrada, de forma patente, la conveniencia de incluir siempre dicho efecto en el análisis de este tipo de tableros.

Queda asimismo reafirmada la necesidad de cuantificar el área reducida por métodos más precisos que los utilizados hasta la fecha, basados en analogías de resistencia de materiales, y que no pueden reproducir satisfactoriamente la distorsión de la sección.

## ESTUDIO PARAMETRICO

### Extensión desde el punto de vista del diseño

Tras las consideraciones de tipo estructural en favor de la inclusión de la distorsión en el cálculo de la losa, y dada la imposibilidad de hallar métodos simples para encontrar, en cada caso particular, sus características mecánicas, se plantea la necesidad de un estudio paramétrico, resolviendo directamente una serie de casos que sean frecuentemente utilizados en la práctica, o suficientemente cercanos a ellos como para poder interpolar o hacer pequeñas extrapolaciones.

A tal fin se ha considerado oportuno establecer dos series de geometrías:

— La primera corresponde a almas (que aquí se toman como la separación mínima entre aligeramientos) de un espesor  $a = 25$  cm., aptas para alojar tendones de pretensado potentes, con vainas de diámetro  $\phi \approx 8$  cm. (Figura 10.a)

— La segunda, con almas de espesor  $a = 36$  cm., que permiten dar cabida a parejas de tendones de pretensado con vainas de 7 cm. (Figura 10.b)

En ambas series se dan a las cabezas superior e inferior un espesor mínimo constructivo de valor  $e = 15$  cm.

La variación del canto se hace de 10 en 10 cm., comenzando con un canto de 90 cm., por debajo del cual ya no resulta rentable el aligeramiento de la losa; y llegando a un máximo de 150 cm. de canto, que correspondería al límite máximo de aplicabilidad de este tipo de tableros.

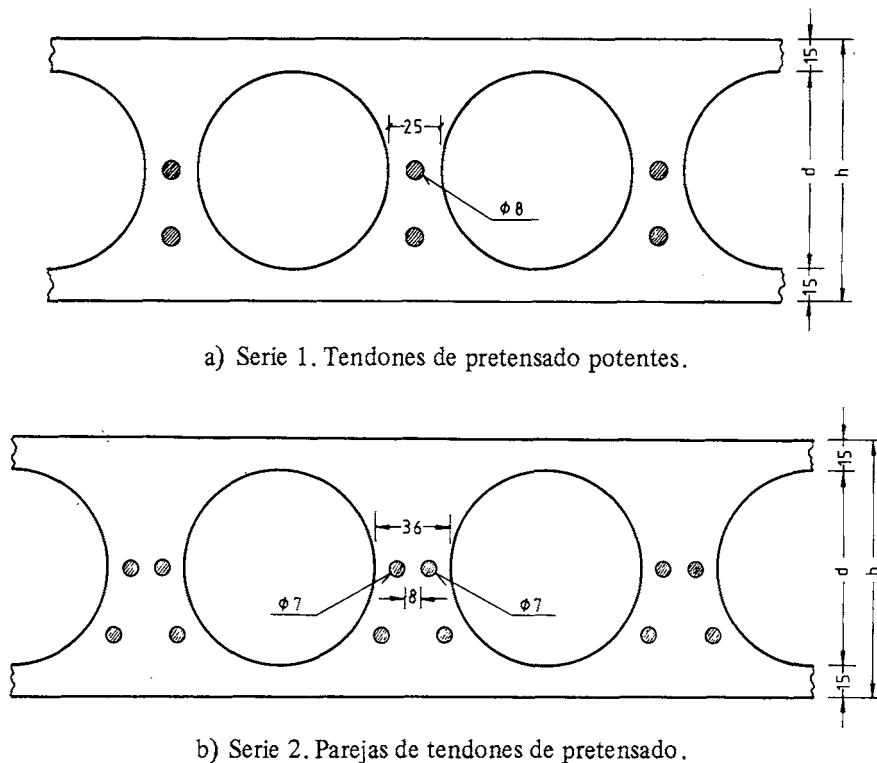


Figura 10. Las dos series de geometrías establecidas para realizar el estudio paramétrico.

### Planteamiento del comportamiento transversal en deformación plana

En el presente trabajo se analizan únicamente la inercia y el área reducida de cortante, dejando la rigidez a torsión para un estudio posterior. Los dos parámetros considerados pueden evaluarse suponiendo que el tablero se halla sometido a un estado de deformación plana. Esto resulta natural si pensamos que una rebanada de dicho tablero estará coartada, frente a movimientos en sentido longitudinal del puente, por el resto de la estructura.

El principal problema que se presenta en el proceso de cálculo de las características transversales en los puentes losa con aligeramientos circulares, realizado por métodos aproximados (método de Rowe para la inercia, analogía de la vida Vierendeel para el área reducida), es el hecho de que no se tiene en cuenta la verdadera geometría de la losa. Esta se sustituye por otra geometría equivalente que, de modo intuitivo, pueda corresponderse de forma aproximada a la real; pero resulta claro que, si no se comparan dichos métodos simplificados con otros de mayor precisión, ignoraremos la verdadera capacidad de aproximación que poseen a la resolución del problema.

Con el fin de efectuar tales verificaciones, se plantea la necesidad de utilizar un método que aproxime, en la mayor medida posible, la verdadera geometría de la losa. A tal fin empleamos el método de los elementos finitos.

Otro problema fundamental es que el método utilizado sea capaz de reproducir con la mayor exactitud la verdadera distribución de tensiones que se produce en el interior del cuerpo. En un análisis por elementos finitos esto se consigue, o bien aumentando el número de elementos en que se divide la geometría en cuestión, o bien aumentando el grado de los polinomios de interpolación y, por lo tanto, variando el tipo de elemento de que se trate.

Resulta claro que, si queremos modelizar una pieza sometida a un esfuerzo cortante mediante una malla que incluya un único elemento a lo largo del espesor, una aproximación lineal a la distribución de tensiones tangenciales no será suficiente. Con más razón deberemos cuidar este aspecto si nuestro estudio se centra particularmente en la deformación producida por el esfuerzo cortante.

Por ello tomaremos un tipo de elemento que permita una aproximación de segundo grado a la distribución interior de tensiones, utilizándose el elemento plano de doce nodos en el contorno. (Figura 11)

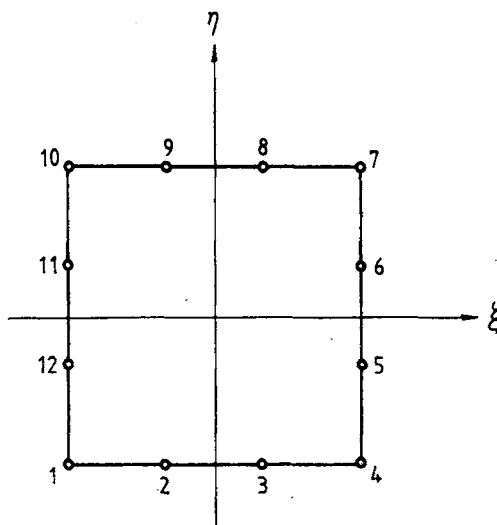


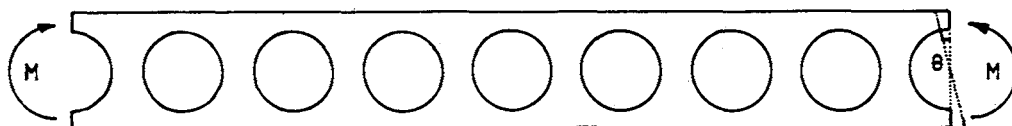
Figura 11. Elemento Finito empleado en el análisis.

### Determinación de la inercia transversal equivalente

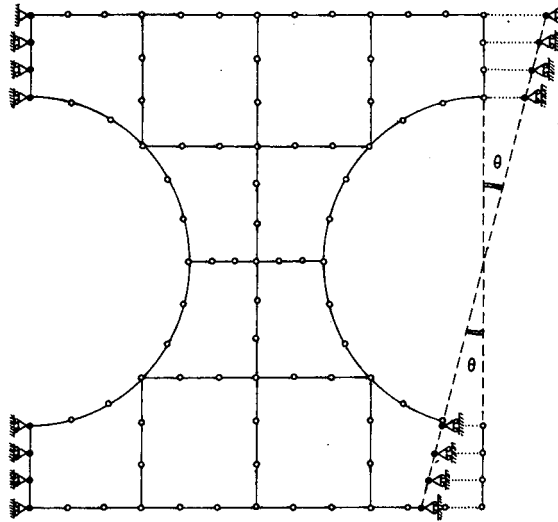
La rigidez frente a la flexión transversal  $D_y$  de una barra, viene dada como el cociente entre el momento  $M$  que le aplicamos, y la curvatura  $\chi$  resultante de dicha actuación.

$$D_y = \frac{M}{\chi} \quad (2)$$

Por razones prácticas, es preferible imponer una curvatura a la sección, girando un ángulo  $\theta$  uno de los extremos de la pieza, y obtener como resultado el momento de las correspondientes reacciones (Figura 12). Por otra parte, las consideraciones de simetría indican que al imponer un giro a la sección extrema, las secciones que separan los distintos nervios se mantendrán, asimismo, planas. Por todo ello, bastará analizar uno sólo de estos nervios, sometido a un giro en una de sus secciones, para obtener la rigidez incógnita.



- a) Planteamiento general para obtener la rigidez, aplicando un giro  $\theta$ , y obteniendo los momentos reacción  $M$ .



b) Discretización y condiciones de contorno empleadas en dicho análisis.

Figura 12. Determinación de la inercia transversal equivalente

Acudimos, por lo tanto, a imponer las siguientes condiciones de contorno:

– Movimiento impedido en sentido horizontal en todos los nodos de una de las caras, y libre en el vertical a excepción de uno de ellos (para evitar la singularidad de la matriz de rigidez).

– Movimiento impuesto de giro en sentido horizontal en la sección opuesta, y libertad de desplazamiento en sentido vertical.

Resuelto el problema, se calcula el momento flector a partir de las reacciones en cada uno de los nodos, con lo que la inercia resulta

$$I = \frac{M}{E \chi} \quad (3)$$

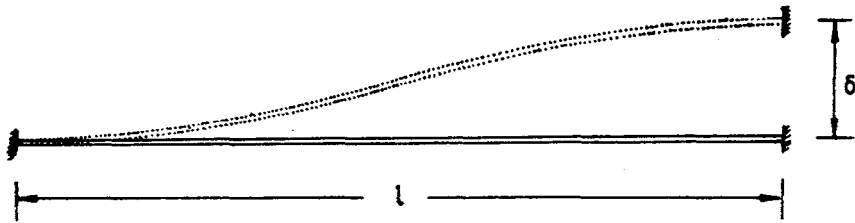
### Determinación del área reducida de cortante transversal

En principio, se trata de aplicar un desplazamiento vertical  $\delta$  a uno de los extremos de una sección, para obtener las correspondientes reacciones, esfuerzo cortante  $Q$  y momento flector  $M$ . (Figura 13). Por simple cálculo de Resistencia de Materiales se establece que dicho desplazamiento es

$$\delta = \frac{ML^2}{6EI} + \frac{QL}{GA'} \quad (4)$$

donde todos los valores son conocidos a excepción de la incógnita área reducida. Como inercia transversal equivalente, se toma la calculada de forma previa en el estudio por elementos finitos según se explicó en el apartado anterior.

Las condiciones de contorno que se imponen en este caso son de empotramiento perfecto en las secciones extremas, con un desplazamiento vertical unitario en una de ellas.



- a) Planteamiento aplicando un desplazamiento vertical  $\delta$  y obteniendo las reacciones cortante  $Q$  y flector  $M$ .

### Elección del tamaño de malla

Así como el cálculo de la inercia transversal precisa del análisis de un único nervio para obtener el valor requerido, el método de determinación del área reducida de cortante, realizado a partir de los corrimientos que experimentan los extremos de la sección transversal, presenta el inconveniente de que es necesaria una anchura muy grande de la sección para obtener resultados cuya aproximación sea lo suficientemente buena. Al empotrar la sección en sus extremos, se impide el alabeo libre de éstos. De ello resulta que la rigidez frente al cortante, aparente ser mayor cuanto menor sea el número de nervios utilizado en el cálculo. Se precisa un elevado número de nervios para obtener resultados aproximados.

Por las razones expuestas anteriormente, y porque el cálculo de secciones con tan elevado número de elementos requiere un elevado tiempo de ordenador, aquí se ha empleado un método simplificado de análisis, considerando un tramo de tres nervios en el que se elimina el efecto de impedir el alabeo de los extremos definiendo como deformación de cortante la del paralelogramo que pasa por los puntos medios de las cabezas del nervio central (ver Figura 5). Despreciando el efecto de la flexión de dicho nervio, el área reducida se calcula entonces simplemente por la ec. (1).

$$x = \frac{Q}{G A'}$$

Este procedimiento de cálculo resulta de exactitud apreciable dentro del rango de geometrías en el que nos movemos, y concuerda satisfactoriamente con los resultados que se obtienen del análisis de secciones con mayor número de nervios.

En la Tabla 4 se comparan los resultados obtenidos con distintas anchuras de secciones, y con el método del paralelogramo. Se ha tomado para esta comprobación la sección con canto de 90 cm., aligeramiento de 60 cm. de diámetro, y alma de 25 cm.

El área reducida se obtiene por la fórmula general (4).

$$\delta = \frac{M L^2}{6EI} + \frac{Q L}{G A'}$$

que es la que se aplica en los tres primeros casos. En el último se emplea la distorsión del paralelogramo.

Se ha efectuado asimismo un cálculo paralelo del área reducida a partir de la energía elástica acumulada. La expresión de dicha energía, para la barra equivalente sometida a unos cortantes y a los momentos de equilibrio correspondientes, es:

$$\mathcal{E} = \frac{M^2 L}{6EI} + \frac{Q^2 L}{G A'}$$

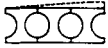



Método	A' (cm <sup>2</sup> /cm)	Esquema
Fórmula general, 3 nervios	12,27	
Fórmula general, 6 nervios	11,15	
Fórmula general, 10 nervios	11,03	
Método paralelogramo, 3 nervios	10,24	

Tabla 4. Comparación entre los valores obtenidos para el área reducida de cortante, a partir del análisis de una sección con distinto número de nervios, según el método de los desplazamientos y del paralelogramo.

La deducción de A' se ha efectuado sobre los mismos esquemas del caso anterior, tando incluyendo como despreciando la energía acumulada en los nervios extremos. Algunos de los resultados obtenidos se resumen en la Tabla 5.







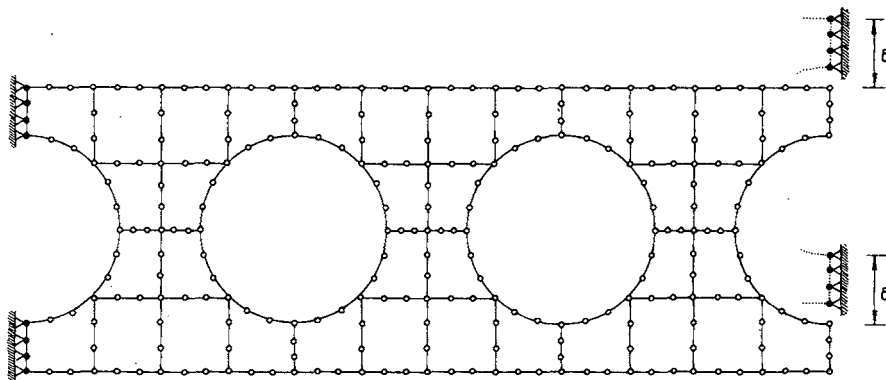
Método	A' (cm <sup>2</sup> /cm)	Esquema
3 nervios. & total	12,28	
3 nervios. & nervio central	10,24	
6 nervios. & total	11,15	
6 nervios. & 2 nrvs. centrs.	10,22	
10 nervios. & total	10,98	
10 nervios. & 2 nrvs. centrs.	10,17	

Tabla 5. Comparación entre los valores obtenidos para el área reducida de cortante, para la misma sección de la tabla 4, obtenidos por el método de la energía elástica. Se analizan distintos números de nervios, tanto contabilizando la energía total como sólo la de los nervios centrales.



b) Discretización y condiciones de contorno empleadas.

Figura 13. Determinación del área reducida de cortante transversal equivalente.

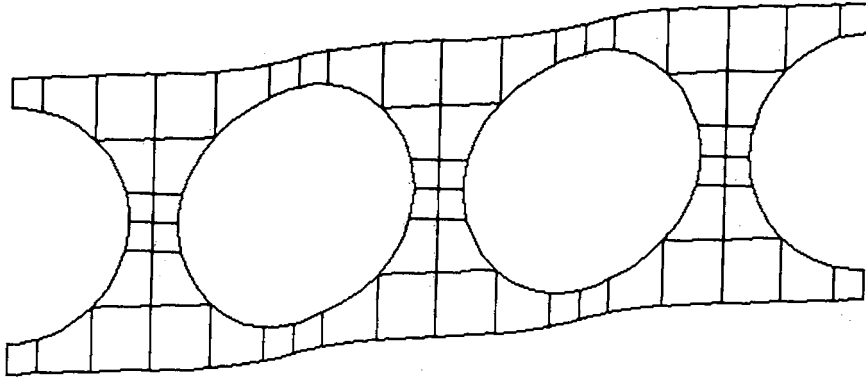


Figura 14. Dibujo de la deformada de una de las mallas analizadas, obtenido por hardcopy.

Como se aprecia, los resultados obtenidos despreciando el efecto de los extremos se acercan notablemente entre sí, por lo cual tomaremos la distorsión del paralelogramo que pasa por los puntos medios de las cabezas como el método definitivo para el cálculo del área reducida, tomando, como malla básica, la formada por sólo tres nervios (Figura 13.b). Paralelamente, se ha calculado el área reducida de cortante por el método de la energía elástica de deformación acumulada en el nervio central, obteniéndose, en todos los casos, una concordancia de valores satisfactoria.

A título de ejemplo, se recoge, en la Figura 14, la deformada de un trozo de sección transversal sometida a un desplazamiento vertical impuesto, deformada que pone de manifiesto la distorsionabilidad transversal de este tipo de tableros.

## RESULTADOS

### Resumen de resultados

En las Tablas 6 y 7 se recogen los valores de la inercia y del área reducida transversales que se han obtenido para las dos series de losas establecidas. También se representan dichos valores en la Figura 15.

Se ha efectuado un ajuste por mínimos cuadrados del tipo  $y = A + Bx^m$  para la inercia, y del tipo  $y = Cx^n$  para el área reducida. Sus expresiones finales son

$$I = 2,226 h^{2,25} - 5815 \quad (6a) \quad \text{para } a = 25 \text{ cm.}$$

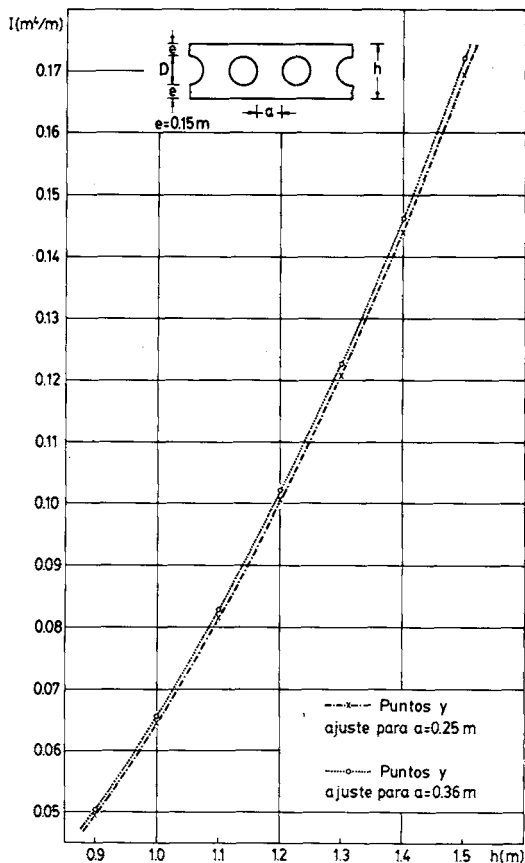
$$I = 2,263 h^{2,25} - 5974 \quad (6b) \quad \text{para } a = 36 \text{ cm.}$$

$$A' = 1152 h^{-1,05} \quad (7a) \quad \text{para } a = 25 \text{ cm.}$$

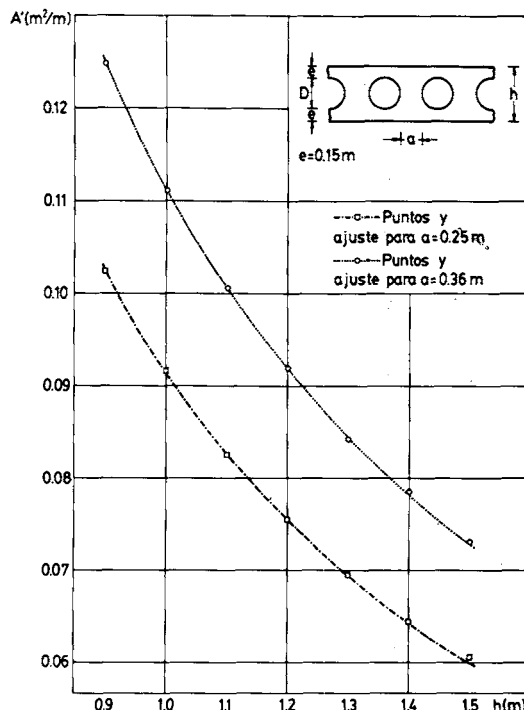
$$A' = 1402 h^{-1,05} \quad (7b) \quad \text{para } a = 36 \text{ cm.}$$

Los valores del canto  $h$  deben ser introducidos en cm., con lo que la inercia  $I$  vendrá dada en  $\text{cm}^4/\text{cm}$ , y el área reducida  $A'$  lo será en  $\text{cm}^2/\text{cm}$ .





a) Inercias transversales equivalentes.



b) Areas reducidas de cortante transversales.

Figura 15. Resultados obtenidos del análisis de las dos series empleadas en el estudio paramétrico.

Serie 1 Almas de 25 cm.

e = 15 cm a = 25 cm

h (cm)	d (cm)	I (cm <sup>4</sup> /cm)	A' (cm <sup>2</sup> /cm)	d/h	a/h	I/(h <sup>3</sup> /12)	A'/h
90	60	49658	10,24	0,6667	0,2778	0,8174	0,1138
100	70	64511	9,16	0,7	0,25	0,7741	0,0916
110	80	81496	8,25	0,7273	0,2273	0,7374	0,0750
120	90	100655	7,54	0,75	0,2083	0,6990	0,0628
130	100	120760	6,91	0,7692	0,1923	0,6596	0,0532
140	110	144080	6,44	0,7857	0,1786	0,6301	0,0460
150	120	169619	6,04	0,8	0,1667	0,6031	0,0403

Tabla 6. Características geométricas y mecánicas obtenidas en el estudio de la serie de losas número 1 (almas de 25 cm).

Serie 2 Almas de 36 cm.

e = 15 cm a = 36 cm

h (cm)	d (cm)	I (cm <sup>4</sup> /cm)	A' (cm <sup>2</sup> /cm)	d/h	a/h	I/(h <sup>3</sup> /12)	A'/h
90	60	50446	12,48	0,6667	0,4	0,8304	0,1387
100	70	65532	11,11	0,7	0,36	0,7864	0,1111
110	80	82779	10,06	0,7273	0,3273	0,7463	0,0915
120	90	102233	9,19	0,75	0,3	0,7100	0,0766
130	100	122616	8,42	0,7692	0,2769	0,6679	0,0648
140	110	146825	7,85	0,7857	0,2571	0,6397	0,0561
150	120	172200	7,31	0,8	0,24	0,6123	0,0487

Tabla 7. Características geométricas y mecánicas obtenidas en el estudio de la serie de losas número 2 (almas de 36 cm).

Con el fin de facilitar la interpolación de los resultados anteriores, para obtener las características mecánicas de losas con geometrías distintas a las analizadas, se proporcionan seguidamente unas fórmulas al efecto.

La interpolación se ha realizado de forma adimensional, en función de los parámetros d/h (diámetro:canto), y a/h (alma mínima:canto). Se obtienen los valores adimensionales de la inercia I/(h<sup>3</sup>/12), y del área reducida A'/h.

Se ha realizado un ajuste lineal en a/h de acuerdo con las dos series establecidas, en la forma:

$$I = \frac{h^3}{12} (\alpha \frac{a}{h} + \beta) \quad (8)$$

$$A' = h (\alpha' \frac{a}{h} + \beta') \quad (9)$$

Posteriormente se realiza un ajuste por mínimos cuadrados de los coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta'$ , del tipo  $y = A(1 - Bx^n)$ . El resultado final es:

$$\alpha = 0,175 \left[ 1 - 0,198 \left( \frac{d}{h} \right)^{-1,7} \right] \quad (10.a)$$

$$\beta = 0,981 \left[ 1 - 0,995 \left( \frac{d}{h} \right)^4 \right] \quad (10.b)$$

$$\alpha' = 0,626 \left[ 1 - 1,015 \left( \frac{d}{h} \right) \right] \quad (11.a)$$

$$\beta' = -0,055 \left[ 1 - 0,838 \left( \frac{d}{h} \right)^{-2,2} \right] \quad (11.b)$$

### Comparación con otros métodos

En lo que a la inercia transversal respecta, el método de Rowe ha sido el más común-

mente utilizado. El lado del cuadrado que tiene igual área que el aligeramiento (cuadrado equivalente) es

$$L = \frac{\sqrt{\pi}}{2} d$$

de donde la inercia, según este método, es:

$$I = \frac{1}{12} h^3 - \frac{1}{12} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} d \right)^3 \tag{12}$$

$$\frac{I}{h^3/12} = 1 - \frac{\sqrt{\pi^3}}{8} \left( \frac{d}{h} \right)^3$$

Por otro lado, la fórmula de Elliott<sup>7</sup> para el cálculo de la inercia tiene la siguiente expresión:

$$\frac{I}{h^3/12} = 1 - 0,95 \left( \frac{d}{h} \right)^4$$

Estos métodos no son capaces de distinguir las distintas separaciones entre aligeramientos.

En la Figura 16 se aprecia cómo ambas fórmulas, en especial la de Elliott, presentan

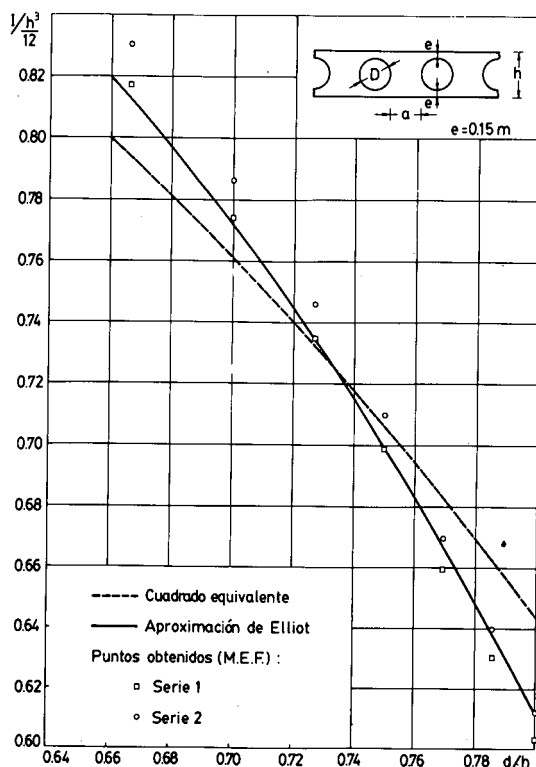
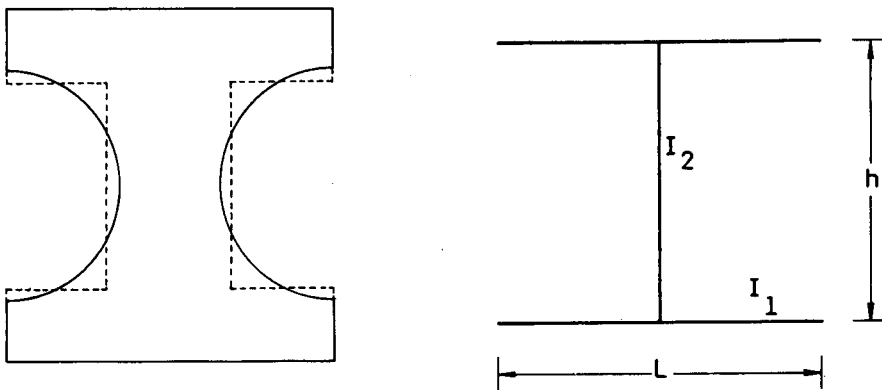


Figura 16. Comparación de las inercias transversales obtenidas por Elementos Finitos, con los métodos de Rowe y Elliott.

una buena aproximación a los puntos determinados por elementos finitos.

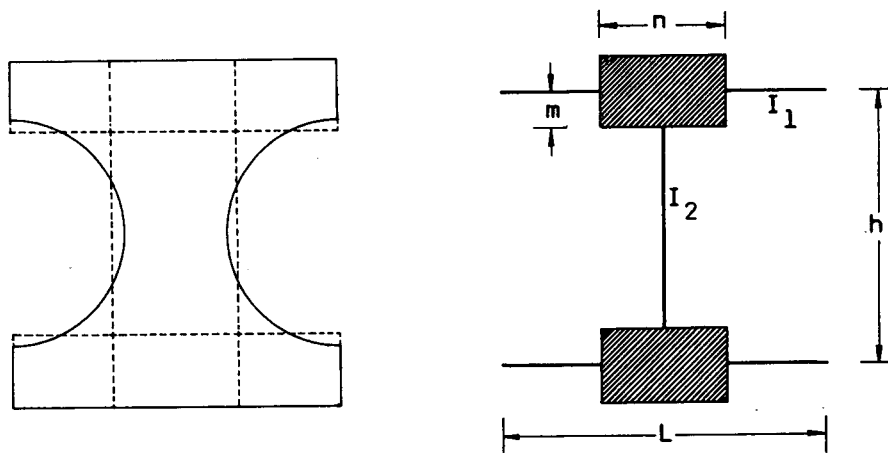
Para el cálculo del área reducida de cortante se ha venido empleando de modo general la analogía de la viga Vierendeel (Figura 17.a). Para pasar a una geometría de cantos constantes se suele sustituir el aligeramiento por el cuadrado equivalente. Del análisis de la deformación del nervio, se obtiene que el área reducida tiene la forma

$$A' = \frac{48}{(1-\nu) \cdot \left( \frac{L^2}{I_1} + \frac{2Lh}{I_2} \right)}$$



a) Analogía de la viga Vierendeel.

Se han intentado mejorar los valores proporcionados por esta fórmula con respecto a los obtenidos por elementos finitos, incluyendo nudos gruesos rígidos, de acuerdo con la Figura 17.b.

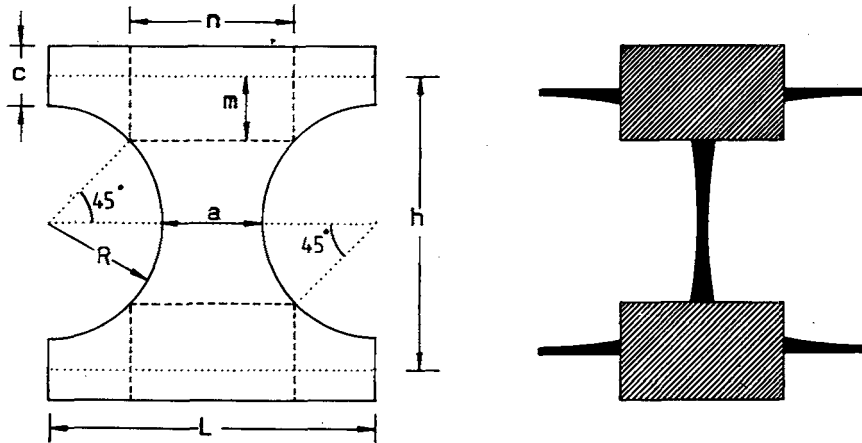


b) Idem., incluyendo nudos rígidos de tamaño finito.

El área reducida tiene la expresión

$$A' = \frac{48}{(1-\nu) \cdot \left( \frac{(L-n)^3}{I_1} + \frac{2L(h-2m)^3}{I_2 h^2} \right)}$$

Finalmente se ha efectuado una aproximación mediante la analogía de la viga Vierendeel con nudos de tamaño finito, con barras de canto variable con su verdadera geometría, y con deformación de cortante (Figura 17.c).



c) Analogía de la viga Vierendeel con nudos de tamaño finito, y con las barras equivalentes tomadas con su verdadera geometría.

Figura 17. Métodos aproximados para el cálculo del área reducida de cortante transversal.

Se deduce que el área reducida es:

$$A' = \frac{1}{(1-\nu) \left( \frac{6\alpha}{L} + \frac{3}{B} \beta \frac{L(h-2m)^2}{h^2 R^2} \right) + \frac{\eta}{kL} + \frac{L\lambda}{kh^2} + \frac{n}{4k \left( \frac{c}{2} + m \right) L}$$

pudiéndose tomar  $k \approx \frac{2}{3}$ . Los parámetros  $\alpha$  y  $\eta$  son funciones de  $c/R$ , y  $\beta$  y  $\lambda$  son funciones de  $a/R$ , y se han deducido por las fórmulas de Navier-Bresse para los corrientes, aplicadas a las barras de canto variable. (Figura 18).

En la Figura 19 se comparan estos métodos con los resultados obtenidos por elementos finitos. El módulo de Poisson  $\nu$  se ha tomado igual a 0,2. Se aprecia cómo sólo el último de ellos alcanza precisión aceptable, aunque no resulta práctico por el cálculo de los coeficientes mencionados.

### CONCLUSIONES

Hasta el presente, los criterios señalados por los diferentes autores para el análisis de tableros de puente de sección tipo losa aligerada, han sido bastante dispares en lo referente a la inclusión o no de la deformación por esfuerzo cortante transversal en el modelo, y sobre todo, en los límites a partir de los cuales puede considerarse despreciable dicho efecto. Los valores señalados en la literatura varían entre el 60% y 50% para la relación entre el área aligerada y el área total, y entre 0,75 y 0,7 para la relación entre el diámetro del aligeramiento y el canto de la losa.

Por el contrario, basándonos en los resultados obtenidos en el presente estudio, podemos afirmar que, ni aún para relaciones entre el diámetro y el canto de 0,67,

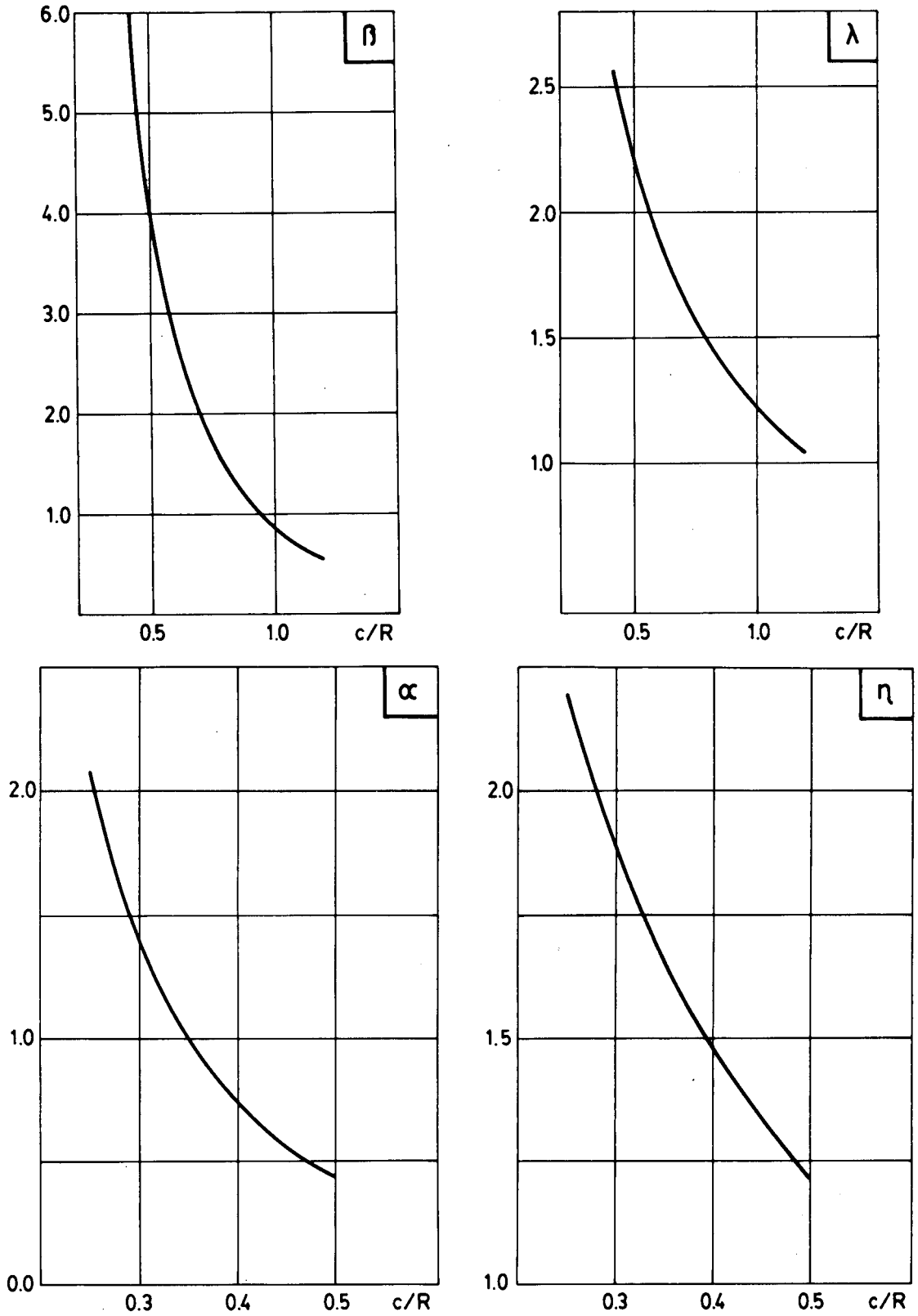


Figura 18. Gráficas de las funciones  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\eta$ , y  $\lambda$ , empleadas en el cálculo del área de cortante transversal por métodos simplificados.

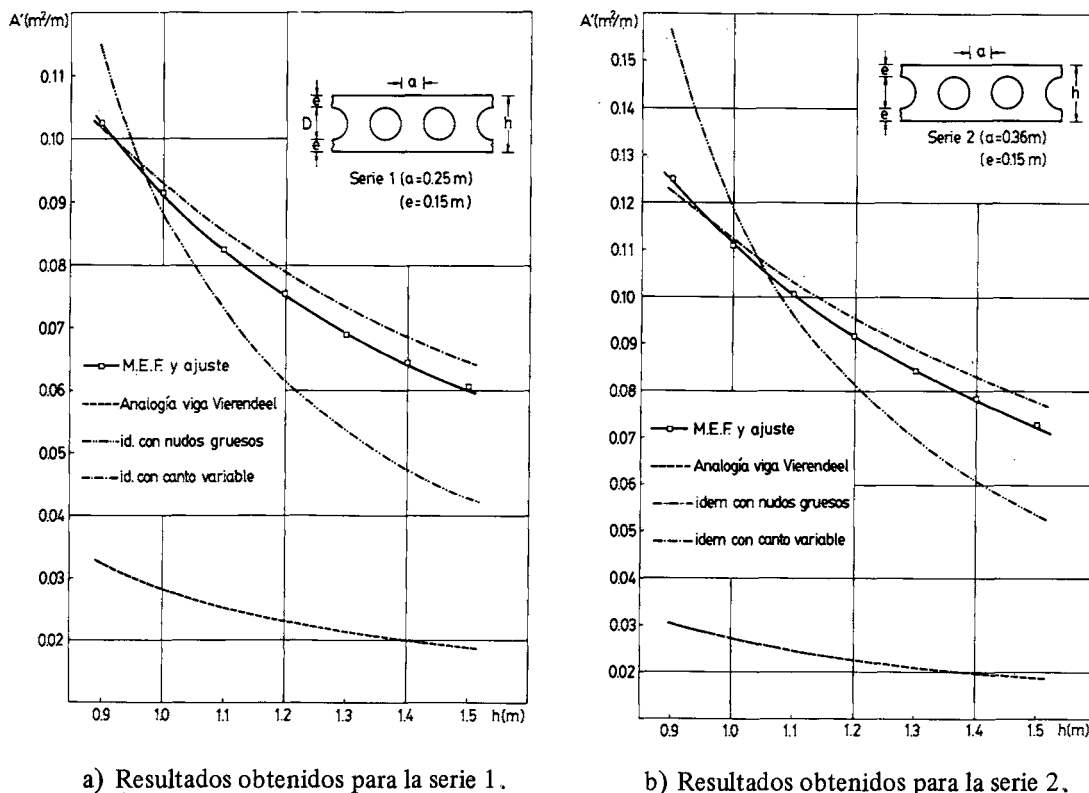


Figura 19. Comparación de las áreas de cortante transversales obtenidas por elementos finitos con métodos simplificados.

ni para relaciones entre el área aligerada y el área total del 37%, puede obviarse la inclusión de la deformación por esfuerzo cortante. Los esfuerzos obtenidos en las zonas más cargadas del tablero resultan ser significativamente superiores si se tiene en cuenta el efecto de la distorsión. De ello concluimos que el análisis de este tipo de tableros debe realizarse siempre incluyendo el efecto de la deformación transversal por esfuerzo cortante.

En lo referente a la asignación de las características mecánicas del modelo, ha sido tradicionalmente empleado el criterio de Rowe, o del cuadrado equivalente. Esta aproximación, a pesar de no tener en cuenta la separación entre aligeramientos, resulta de una exactitud apreciable, sobre todo para relaciones entre el diámetro y el canto del 75%. La desviación máxima con respecto a los valores obtenidos por el método de los elementos finitos no supera el 7%.

Mayor aproximación alcanza la fórmula debida a Elliott, especialmente para relaciones  $d/h$  grandes. En el rango de valores estudiado, dicha fórmula no se aparta más de un 3% de la solución por elementos finitos, pero sigue sin distinguir las posibles distintas separaciones entre aligeramientos.

La fórmula incluida en el texto, obtenida por interpolación a partir del estudio realizado por elementos finitos, proporcionará una mayor aproximación de la inercia dentro del rango de valores estudiado.

Por lo que respecta al área reducida, la mayoría de los autores emplean para su evaluación expresiones basadas en modelos muy simples, que conducen a resultados muy diferentes de los proporcionados por el método de los elementos finitos. Para

conseguir buenos resultados con estos métodos simplificados, hay que tomar las barras equivalentes con su verdadera geometría, lo que conduce a expresiones de utilización poco práctica.

La fórmula expuesta en el texto conduce a una aproximación mayor y más simple del área reducida, siempre que nos hallemos razonablemente próximos a la zona de valores aquí estudiados.

## AGRADECIMIENTOS

Queremos expresar nuestro agradecimiento a los Profesores Eugenio Oñate y Javier Oliver, de la Cátedra de Estructuras de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona, por el programa de elementos finitos proporcionado que ha servido de base para realizar el presente estudio.

## REFERENCIAS

1. J. J. Arenas. "Análisis de tableros rectos de puente mediante el modelo de la losa ortótropa", *publicación de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos*, Santander (1981).
2. B. Bakht, L. G. Jaeger y S. M. Cheung. "Cellular and voides slab bridges", *A.S.C.E. Journal*, St. Div., Sept. (1981).
3. D. Beckett. "Concrete Bridges", *Surrey University Press*, Surrey (1973).
4. A. R. Cusens y R. P. Pama. "Bridge deck analysis", John Wiley and Sons, London (1975).
5. E. C. Hambly. "Bridge deck behaviour", Chapman and Hall, London (1976).
6. E. C. Hambly y E. Pennells. "Grillage analysis applied to cellular bridge decks", *The Structural Engineer*, 53 (7), London (1975).
7. L. G. Jaeger y B. Bakht. "The grillage analogy in bridge analysis", *Canadian Journal of Civil Engineering*, Vol. 9, Nbr. 2, Ottawa (1982).
8. C. Massonet y A. Gandolfi. "Some exceptional cases in the theory of multigrade bridges", *I.A.B.S.E.*, Public. Nbr. 27, Zurich (1967).
9. R. E. Rowe. "Concrete bridge design", C. R. Books Ltd., London, (1962).
10. R. West. "Recommendations on the use of grillage analysis for slab and pseudo-slab bridge decks", *C.A. Conc. Ass.*, London (1973).
11. O. C. Zienkiewicz. "El Método de los Elementos Finitos", Ed. Reverté, Barcelona (1980).