

# ANÁLISIS DE UN METODO NUMERICO CON ELEMENTOS FINITOS PARA PROBLEMAS DE CONTACTO UNILATERAL SIN ROZAMIENTO EN ELASTICIDAD

## PARTE II.— Aproximación y resolución de los problemas discretos

JUAN M. VIAÑO REY

*Departamento de Ecuaciones Funcionales. Facultad de Matemáticas  
Universidad de Santiago de Compostela. España*

### RESUMEN

Se estudia la aproximación con elementos finitos de los problemas tratados en la Parte I de este trabajo, incluyéndose análisis de convergencia y estimaciones de error. Se introduce un algoritmo iterativo para la resolución de los problemas aproximados. Finalmente, se acompañan experiencias numéricas en problemas bidimensionales de indentación con rodillo cilíndrico y cálculo de estructuras.

### SUMMARY

An approach via finite elements for the problems presented in Part I of this work is studied. Convergence results and error estimations are given. A iterative algorithm is introduced for solving the approximate problems. Finally, some numerical experiences on two dimensional problems are presented.

### INTRODUCCION

Este artículo es la segunda parte de un amplio estudio sobre el tratamiento numérico de problemas de contacto unilateral en elasticidad. En la primera parte del estudio presentada en<sup>1</sup> se desarrolló la formulación matemática del problema, describiéndose los problemas de contorno asociados al contacto unilateral tanto con sólido rígido como de respuesta elástica y su forma variacional. Asimismo, se introdujeron ciertas nociones de operadores maximales monótonos en espacios de Hilbert y su aplicación para un nuevo planteamiento de los problemas variacionales obtenidos.

En esta segunda parte se describe la aproximación de ambos problemas utilizando elementos finitos, estudiando también los resultados de convergencia y estimaciones de error así como el efecto de la integración numérica en el problema de contacto con sólido elástico. Finalmente, se describe el algoritmo iterativo para la resolución de los problemas discretos y se presentan varios ejemplos de aplicación en problemas de contacto bidimensionales.

Recibido: Marzo 1985

## APROXIMACION CON ELEMENTOS FINITOS

Consideramos, en un principio, la aproximación con elementos finitos tipo Lagrange (polinomiales de grado  $\leq k$  a trozos). Posteriormente, nos restringiremos al caso  $k = 1$  (elementos finitos lineales a trozos). Ciertos razonamientos en la convergencia y en las estimaciones de error del caso  $k = 1$  no son válidos cuando  $k \geq 2$ .

Supongamos entonces que  $\Omega$  es un dominio poligonal acotado de  $\mathbb{R}^N$  ( $N = 2, 3$ ) y consideramos una triangulación  $\tau_h$  de  $\Omega$  compuesta de  $N$ -simplex, compatible con la descomposición de  $\partial\Omega$ . Como es habitual,  $h$  denota el mayor diámetro de los elementos de  $\tau_h$ . Notamos por  $\Sigma_h^k$  el conjunto de los nodos de la triangulación  $\tau_h$  y sea

$$\gamma_h^k = \Sigma_h^k \cap \Gamma \quad (1)$$

La descomposición  $\tau_h$  induce en  $\Gamma_C$  una descomposición  $\theta_h$  compuesta de  $(N-1)$ -simplex (caras de los  $N$ -simplex de  $\tau_h$  que intersecan a  $\Gamma_C$ ). Para cada  $C \in \theta_h$ , notaremos por  $n^C = (n_i^C)$  el vector (constante) normal unitario a  $C$  y exterior a  $\Omega$ .

Dada una función  $q \in L^2(\Gamma_C)$  y  $A \subset \Gamma_C$  notaremos por  $q^A$  la restricción  $q|_A \in L^2(A)$ . Si  $q|_A$  coincide casi por doquier con una función continua en  $A$ , se pondrá  $q^A \in C^0(A)$ .

Puesto que hemos supuesto  $\Omega$  poligonal, se tendrá

$$\Gamma_C = \bigcup_{i=1}^L A_i, \quad (2)$$

con  $A_i$  contenido en un hiperplano de  $\mathbb{R}^N$ . Si  $i \neq j$  se supondrá que  $A_i$  y  $A_j$  no están contenidos en el mismo hiperplano. En consecuencia si  $P \in A_i \cap A_j$ ,  $i \neq j$ , la función de distancia  $s$  no está definida en  $P$ .

Supondremos, desde ahora, que el obstáculo  $S$  es tal que la función de distancia  $s$  verifica

$$s^{A_i} \in C^0(A_i), \quad i = 1, 2, \dots, L. \quad (3)$$

Cualquiera que sea  $A_i$  y para todo  $P \in A_i$ ,  $s^{A_i}(P)$  es la distancia del punto  $P$  al obstáculo en la dirección del vector normal a  $A_i$ . En general, si  $P \in A_i \cap A_j$ ,  $i \neq j$ , se tendrá  $s^{A_i}(P) \neq s^{A_j}(P)$  (Figura 1) de modo que  $s$  es globalmente discontinua. Las condiciones

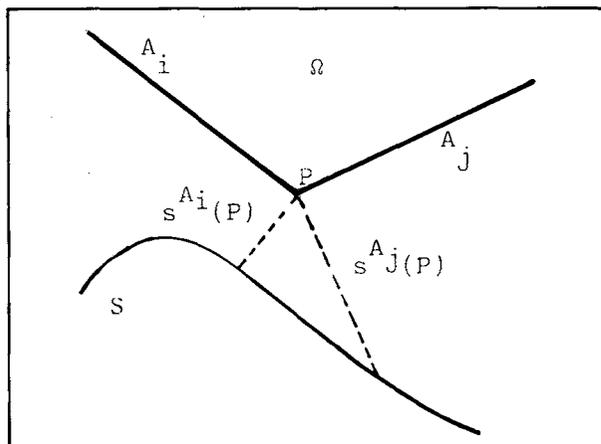


Figura 1

de contorno<sup>1</sup>, particularizadas en el punto P, deberán hacer referencia a las componentes normales tanto en la dirección de la normal a A<sub>i</sub> como de la normal a A<sub>j</sub> ambas definidas en P. Esta es la idea central para aproximar el convexo K de desplazamientos admisibles en el problema de Signorini y el convexo U definido en<sup>1</sup> por

$$U = \{q \in L^2(\Gamma_C) : q \leq s \text{ c.p.d. en } \Gamma_C\} \quad (4)$$

El espacio V se aproximará por los espacios de dimensión finita V<sub>h</sub><sup>k</sup>, k ≥ 1, siguientes:

$$V_h^k = \{v_h \in [C^0(\bar{\Omega})]^N : v_{h|T} \in [P_k(T)]^N, \forall T \in \tau_h, v_h = 0 \text{ en } \Gamma_D\}. \quad (5)$$

Análogamente se introducen los subespacios de dimensión finita de L<sup>2</sup>(Γ<sub>C</sub>):

$$E_h^k = \{q_h \in L^2(\Gamma_C) : q_h^C \in P_k(C), \forall C \in \theta_h\} \quad (k \geq 1) \quad (6)$$

**Observación a).**— Por P<sub>k</sub>(C) se denota el espacio de polinomios de grado ≤ k en (N-1) variables mientras que en P<sub>k</sub>(T) son de N variables. Se notará, asimismo, que

$$v_{h|_{\Gamma_C}} \in E_h^k, \quad \forall v_h \in V_h^k. \quad (7)$$

El convexo K de desplazamientos admisibles en el problema de Signorini<sup>1</sup> se aproximará por:

$$K_h^k = \{v_h \in V_h^k : v_{hi} n_i^C \leq s^C(P), \forall P \in \gamma_h^k \cap C, \forall C \in \theta_h\}. \quad (8)$$

Es claro que K<sub>h</sub><sup>k</sup> es un conjunto, convexo, cerrado y no vacío de V<sub>h</sub><sup>k</sup>.

**Observación b).**— a) Supongamos que s verifica, s<sup>C</sup> ∈ P<sub>1</sub>(C), ∀ C ∈ θ<sub>h</sub> (lo que dependerá de la forma del obstáculo). Esto ocurre en el caso, frecuente, en el que s ≡ 0 (obstáculo y cuerpo están en contacto antes de la deformación). Se tiene, entonces, la siguiente definición equivalente de K<sub>h</sub><sup>1</sup>:

$$K_h^1 = \{v_h \in V_h^1 : v_{h|C} \leq s^C, \forall C \in \theta_h\}. \quad (9)$$

y, por consiguiente, K<sub>h</sub><sup>1</sup> ⊂ K (aproximación interna). Es importante destacar que esta propiedad no es cierta para k ≥ 2 ni tampoco para aproximaciones de este tipo con elementos paralelepípedicos de cualquier grado. Por otra parte, en el tratamiento numérico es imprescindible traducir la restricción v<sub>h|C</sub> ≤ s<sup>C</sup> en términos de valores nodales. Por ello la definición (8) se hace necesaria aún cuando no se consiga aproximación interna en los casos más simples.

b) Se notará que la definición (8) de K<sub>h</sub><sup>k</sup> impone a los desplazamientos en un punto P ∈ γ<sub>h</sub><sup>k</sup> tantas restricciones como caras (aristas) de θ<sub>h</sub> contengan a P. Además, hace que en la práctica deba elegirse la malla de elementos en función de la forma del obstáculo, especialmente en lo que se refiere a la situación de los nodos en Γ<sub>C</sub> (Figura 2).

La siguiente aproximación de convexo U introducido en (4) surge de forma natural:

$$U_h^k = \{q_h \in E_h^k : q_h^C(P) \leq s^C(P), \forall P \in \gamma_h^k \cap C, \forall C \in \theta_h\}. \quad (10)$$

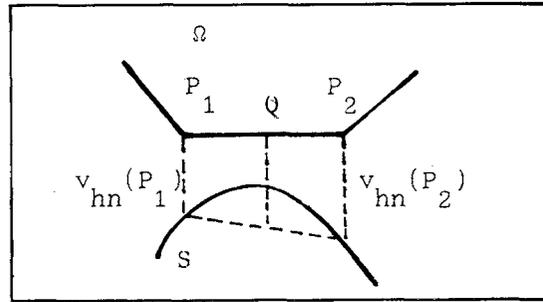


Figura 2

Se tiene  $U_h^k \subset E_h^k$  siendo convexo, cerrado y no vacío.

**Observación c).**— De nuevo para  $k = 1$ , si  $s^c \in P_1(C)$ ,  $\forall C \in \theta_h$ , entonces  $U_h^1 \subset U$ .

### Problema de Signorini: Aproximación, convergencia y estimación de error.

Se definen para  $k \geq 1$  los problemas aproximados de

$$\begin{aligned} & u \in v \\ & a(u, v-u) \geq L(v-u), \quad \forall v \in K \end{aligned} \quad (11)$$

en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} & u_h^k \in K_h^k \\ (P_{1h}^k) \quad & a(u_h^k, v_h - u_h^k) \geq L(v_h - u_h^k), \quad \forall v_h \in K_h^k. \end{aligned}$$

Se tiene entonces que el problema  $(P_{1h}^k)$  tiene una única solución y además, puesto que  $a(\cdot, \cdot)$  es simétrica,  $(P_{1h}^k)$  es equivalente al problema de programación cuadrática:

$$(P_{1h}^k) \quad \min_{v_h \in K_h^k} \left[ \frac{1}{2} a(v_h, v_h) - L(v_h) \right].$$

Los esquemas análogos para el *problema de Signorini simplificado* (ec. (29) de<sup>1</sup>) se estudian detalladamente en Glowinski<sup>22</sup>. Se prueba que para una familia  $(\tau_h)$  regular de triangulaciones (véase Ciarlet<sup>17</sup>), los esquemas para  $k = 1, 2$  son convergentes. La demostración se basa en un resultado general de convergencia en inecuaciones variacionales de primera especie y es aplicable, salvo ligeras variaciones de detalle, a las aproximaciones  $(P_{1h}^k)$  ( $k = 1, 2$ ) del problema de Signorini. Así pues:

**Teorema 1.**— (Glowinski<sup>22</sup>). *Suponiendo que  $(\tau_h)_{h>0}$  es una familia regular de triangulaciones entonces*

$$\lim_{h \rightarrow 0} u_h^k = u \quad \text{en } [H^1(\Omega)]^N, \quad (k = 1, 2), \quad (12)$$

donde  $u$  y  $u_h^k$  son las soluciones de (11) y  $(P_{1h}^k)$  ( $k = 1, 2$ ) respectivamente.

Para el problema de Signorini simplificado<sup>1</sup> utilizando el esquema de aproximación con  $k = 1$  (elementos finitos lineales) y suponiendo hipótesis de regularidad sobre  $u$ , Brezzi-Hager-Raviart<sup>15</sup>, obtienen una estimación del error del orden  $O(h)$  incluso para un dominio no poliédrico y  $g \neq 0$ . Esta demostración se adapta sin ninguna dificultad al problema (11) (véase Haslinger<sup>25</sup> para el caso  $s = 0$  y por tanto  $K_h^1 \subset K$ ). Se puede enunciar, entonces, el siguiente teorema de estimación de error:

**Teorema 2.**— *Suponiendo que  $s^{A_i} \in W^{1,\infty}(A_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, L$  y que los datos que definen el problema unilateral de Signorini son suficientemente regulares para que la solución del problema (11) verifique:*

$$(i) \quad u \in H^2(\Omega) \cap K, \quad \sigma_n(u)|_{\Gamma_C} \in L^\infty(\Gamma_C), \quad u_n|_{A_i} \in W^{1,\infty}(A_i), \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (13)$$

(ii) *El número de puntos donde  $u_n$  cambia de  $u_n < s$  a  $u_n > s$  es finito. (14)  
Entonces, para la solución  $u_h^1$  del problema  $P_{1h}^1$  se tiene:*

$$\|u - u_h^1\|_{1,\Omega} = O(h) \quad (15)$$

**Observación d.**— a) La hipótesis (14) probablemente se verifica si los datos son analíticos (Brezzi-Hager-Raviart<sup>15</sup>).

b) La misma demostración para  $k \geq 2$  no es aplicable debido, esencialmente, a que si  $q$  es un polinomio de grado  $k$  tal que  $q(P) \leq 0$ ,  $\forall P \in \gamma_h^k \cap C$ , en general, no se cumple  $q \leq 0$  en  $C$ .

**Problema de contacto con sólido elástico: aproximación, convergencia y estimación de error**

Sea  $j: V \rightarrow \mathbb{R}$  la función convexa, semicontinua inferiormente y propia:

$$j = (I_U)_\lambda \cdot B^* \quad (16)$$

Con esta notación el problema de contacto con sólido elástico, se puede escribir:

$$\begin{aligned} &u \in V \\ &a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geq L(v-u), \quad \forall v \in V \end{aligned} \quad (17)$$

Sería, entonces, natural aproximar (17) por:

$$\begin{aligned} &\hat{u}_h^k \in V_h^k \\ &(\pi_{2h}^k)_1 \quad a(\hat{u}_h^k, v_h - \hat{u}_h^k) + j(v_h) - j(\hat{u}_h^k) \geq L(v_h - \hat{u}_h^k), \quad \forall v_h \in V_h^k \end{aligned}$$

Argumentos análogos a los utilizados en<sup>1</sup> permiten afirmar que  $(\pi_{2h}^k)_1$  tiene una única solución que coincide con la de los dos problemas siguientes:

$$\begin{aligned}
 (\pi_{2h}^k)_2 \quad & \min_{v_h \in V_h^k} \left[ \frac{1}{2} a(v_h, v_h) - L(v_h) + \frac{1}{2\lambda} \|v_{hn} - P_U v_{hn}\|_{0, \Gamma_c}^2 \right], \\
 & \hat{u}_h^k \in V_h^k \\
 (\pi_{2h}^k)_3 \quad & a(\hat{u}_h^k, v_h) + (G_\lambda(\hat{u}_h^k), v_{hn}) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h^k.
 \end{aligned}$$

A continuación se da un teorema de convergencia y estimación del error  $\|u - \hat{u}_h^k\|_{1, \Omega}$ . El resultado de convergencia utiliza un resultado general de Glowinski<sup>22</sup>, (Cap. I). La estimación de error es una demostración directa para este caso particular utilizando técnicas clásicas.

**Teorema 3.**— *Supongamos que  $(\tau_h)_h > 0$  es una familia regular de triangulaciones. Entonces,*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \hat{u}_h^k = u \quad \text{en } [H^1(\Omega)]^N \quad (18)$$

donde  $u$  y  $\hat{u}_h^k$  son las soluciones del problema variacional de segunda clase<sup>1</sup> y  $(\pi_{2h}^k)$  respectivamente. Si, además los datos que definen el problema continuo<sup>1</sup> son suficientemente regulares para que la solución  $u$  verifique:

$$u \in H^{k+1}(\Omega) \cap V, \quad (19)$$

entonces,

$$\|u - \hat{u}_h^k\|_{1, \Omega} = O(h^k) \quad (20)$$

**Demostración.**— Para demostrar (18) y siguiendo a Glowinski<sup>22</sup> (Cap. I) es suficiente probar que existe  $M \subset V$ ,  $\bar{M} = V$  y  $r_h: M \rightarrow V_h^k$  tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} r_h v = v \quad \text{en } V, \quad \forall v \in M. \quad (21)$$

Sea

$$M = [C^\infty(\bar{\Omega})]^N \cap V. \quad (22)$$

Para la densidad de  $M$  en  $V$  véase, por ejemplo, Necas<sup>31</sup>. Definimos

$$r_h: V \cap [C^\circ(\bar{\Omega})]^N \rightarrow V_h^k$$

por:

$$\begin{aligned}
 r_h v \in V_h^k, \quad \forall v \in V \cap [C^\circ(\bar{\Omega})]^N, \\
 (r_h v)(P) = v(P), \quad \forall P \in \Sigma_h^k
 \end{aligned} \quad (23)$$

Es conocido (véase Ciarlet<sup>17</sup>) que bajo la hipótesis de regularidad para la familia  $(\tau_h)$  se tiene:

$$\|r_h v - v\|_{1,\Omega} \leq c h^k \|v\|_{k+1,\Omega} \quad \forall v \in H^{k+1}(\Omega) \cap V, \quad (24)$$

donde  $c$  es una constante independiente de  $h$  y  $v$ . Esto prueba (21) y por tanto (18).

Para probar (20), observemos, en primer lugar, que por sustracción de  $(\pi_{2h}^k)_3$  y la ecuación 33 de<sup>1</sup> se obtiene:

$$a(u - \hat{u}_h^k, w_h) + (G_\lambda(u_n) - G_\lambda(\hat{u}_{hn}^k), w_{hn}) = 0, \quad \forall w_h \in V_h^k. \quad (25)$$

Por otra parte, cualquiera que sea  $v_h \in V_h^k$ , se tiene (utilizando (25)):

$$\begin{aligned} a(u - \hat{u}_h^k, u - \hat{u}_h^k) &= a(u - \hat{u}_h^k, u - v_h) + a(u - \hat{u}_h^k, v_h - \hat{u}_h^k) = \\ &= a(u - \hat{u}_h^k, u - v_h) + (G_\lambda(u_n) - G_\lambda(\hat{u}_{hn}^k), \hat{u}_{hn}^k - v_{hn}) = \\ &= a(u - \hat{u}_h^k, u - v_h) + (G_\lambda(u_n) - G_\lambda(v_{hn}), \hat{u}_{hn}^k - v_{hn}) + \\ &+ (G_\lambda(v_{hn}) - G_\lambda(\hat{u}_{hn}^k), \hat{u}_{hn}^k - v_{hn}) \end{aligned}$$

Utilizando el hecho de que  $G_\lambda$  es la aproximación Yosida de  $(\partial I_U)$  y las propiedades del operador  $A_\lambda^{-1}$ , se deduce:

$$a(u - \hat{u}_h^k, u - \hat{u}_h^k) \leq a(u - \hat{u}_h^k, u - v_h) + (G_\lambda(u_n) - G_\lambda(v_{hn}), \hat{u}_{hn}^k - v_{hn}), \quad \forall v_h \in V_h^k. \quad (26)$$

Haciendo uso de las propiedades de la aproximación Yosida<sup>1</sup>, así como de la continuidad y  $V$ -elipticidad de la forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  se deduce de (26):

$$\begin{aligned} \|u - \hat{u}_h^k\|_{1,\Omega}^2 &\leq \frac{M}{\alpha} \|u - \hat{u}_h^k\|_{1,\Omega} \|u - v_h\|_{1,\Omega} + \\ &+ \frac{1}{\lambda\alpha} \|u_n - v_{hn}\|_{0,\Gamma_c} \|\hat{u}_{hn}^k - v_{hn}\|_{0,\Gamma_c} \leq \\ &\leq \frac{M}{\alpha} \|u - \hat{u}_h^k\|_{1,\Omega} \|u - v_h\|_{1,\Omega} + \\ &+ \frac{1}{\lambda\alpha} \|u_n - v_{hn}\|_{0,\Gamma_c} \|u_n - \hat{u}_{hn}^k\|_{0,\Gamma_c} + \frac{1}{\lambda\alpha} \|u_n - v_{hn}\|_{0,\Gamma_c}^2 \end{aligned} \quad (27)$$

cualquiera que sea  $v_h \in V_h^k$ .

La continuidad de la aplicación

$$v \in H^1(\Omega) \longrightarrow v_n \in L^2(\Gamma_c)$$

permite concluir de (27):

$$\begin{aligned} \|u - \hat{u}_h^k\|_{1,\Omega}^2 &\leq c_1 \|u - \hat{u}_h^k\|_{1,\Omega} \|u - v_h\|_{1,\Omega} + \\ &+ c_2 \|u - v_h\|_{1,\Omega}^2, \quad \forall v_h \in V_h^k \end{aligned} \quad (28)$$

y finalmente:

$$\|u - \hat{u}_h^k\|_{1,\Omega} \leq c \|u - v_h\|_{1,\Omega}, \quad \forall v_h \in V_h^k. \quad (29)$$

Eligiendo  $v_h = r_h u$ , (20) resulta de (24). Esto finaliza la demostración del teorema 3. Desde el punto de vista computacional ( $\pi_{2h}^k$ ), en general, no puede usarse directamente, dado que el cálculo implica integrales que no pueden hacerse de forma exacta. Concretamente:

$$(G_\lambda(\hat{u}_{hn}^k), v_{hn}) = \frac{1}{\lambda} \int_{\Gamma_C} (\hat{u}_{hn}^k - s)^+ v_{hn} \, d\gamma$$

ó bien

$$j(v_h) = \frac{1}{2\lambda} \int_{\Gamma_C} [(v_{hn} - s)]^2 \, d\gamma = \frac{\lambda}{2} \int_{\Gamma_C} [G_\lambda(v_{hn})]^2 \, d\gamma.$$

Por esta razón, ( $\pi_{2h}^k$ ) debe ser *modificado usando algún procedimiento de integración numérica*. En realidad se debe aproximar  $a(\cdot, \cdot)$ ,  $L(\cdot)$  y  $j(\cdot)$ . Dado que la aproximación de  $a(\cdot, \cdot)$  y  $L(\cdot)$  se estudia en Ciarlet<sup>17</sup> (Cap. 3), aquí trabajaremos con  $a(\cdot, \cdot)$  y  $L(\cdot)$  pero aproximamos  $j(\cdot)$ . La idea es utilizar en cada cara  $C \in \theta_h$  una fórmula cuyos puntos de integración sean los nodos  $P \in \gamma_h^k \cap C$  y que sea exacta para polinomios de grado  $\leq k$ , es decir:

$$\int_C \phi \, d\gamma \cong \sum_{P \in \gamma_h^k \cap C} \omega_P^C \phi(P). \quad (30)$$

Resultará de gran importancia en lo sucesivo que la fórmula (30) que se considere sea tal que:

$$\omega_P^C > 0 \quad \forall P \in \gamma_h^k \cap C. \quad (31)$$

Así, para  $k=1$  la fórmula utilizada en este estudio será la regla trapezoidal (en una ó dos dimensiones):

$$\int_C \phi \, d\gamma \cong \frac{m(C)}{N} \sum_{P \in \gamma_h^1 \cap C} \phi(P) \quad (N=2,3) \quad (32)$$

donde  $m(C)$  denota la medida  $(N-1)$ -dimensional de  $C$ . Esta fórmula es exacta para polinomios de grado  $\leq 1$ .

Para  $k=2$  y  $N=2$ , es decir  $C$  es unidimensional, una fórmula válida es la regla de Simpson:

$$\int_C \phi \, d\gamma \cong \frac{m(C)}{N} [\phi(a_1) + 4\phi(a_{12}) + \phi(a_2)] \quad (33)$$

siendo  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_{12}$  los nodos de  $C$ .

Supongamos pues una fórmula de cuadratura del tipo (30) verificando (31). Se pondrá, entonces:

$$j_h^k(v_h) = \frac{\lambda}{2} \sum_{C \in \theta_h} \sum_{P \in \gamma_h^k \cap C} \omega_P^C [G_\lambda(v_{hn})(P)]^2, \quad v_h \in V_h^k \quad (34)$$

En particular:

$$j_h^1(v_h) = \frac{\lambda}{2} \sum_{C \in \theta_h} \frac{m(C)}{N} \sum_{P \in \gamma_h^1 \cap C} [G_\lambda(v_{hm})(P)]^2. \quad (35)$$

Consideremos el espacio  $E_h^k$  definido en (6) con el siguiente producto escalar

$$(r_h, q_h)_{0,h} = \sum_{C \in \theta_h} \sum_{P \in \gamma_h^k \cap C} \omega_p^C r_h(P) q_h(P), \quad r_h, q_h \in E_h^k \quad (36)$$

y sea  $\|\cdot\|_{0,h}$  la norma inducida:

$$\|q_h\|_{0,h} = \left[ \sum_{C \in \theta_h} \sum_{P \in \gamma_h^k \cap C} \omega_p^C q_h^2(P) \right]^{1/2} \quad (37)$$

Sea, para cada  $C \in \theta_h$ ,  $\pi_C^C : C^0(C) \rightarrow P_k(C)$  el operador de interpolación en los nodos de  $\gamma_h^k \cap C$  y  $\pi_{kh} : E \rightarrow E_h^k$  el operador definido por

$$[\pi_{kh}(q)]^C = \pi_C^C(q^C), \quad \forall q \in E. \quad (38)$$

Es clara, entonces, la igualdad:

$$j_h^k(v_h) = \frac{\lambda}{2} \|\pi_{kh}[G_\lambda(v_{hm})]\|_{0,h}^2 \quad (39)$$

Teniendo en cuenta que el conjunto  $U_h^k$  definido en (10) es convexo, cerrado y no vacío en  $E_h^k$  con la norma  $\|\cdot\|_{0,h}$  consideremos el operador  $P_{U_h^k} : E_h^k \rightarrow U_h^k$  de proyección ortogonal con dicha norma. Sea  $G_\lambda^{kh} : E_h^k \rightarrow E_h^k$  el operador aproximación Yosida de  $(\partial I_{U_h^k})$ , es decir (véase<sup>1</sup>),

$$G_\lambda^{kh} = \frac{1}{\lambda} [I - P_{U_h^k}] \quad (40)$$

donde  $I$  es el operador identidad de  $E_h^k$ .

Es claro que, para  $q_h \in E_h^k$ ,  $G_\lambda^{kh}(q_h) \in E_h^k$  es un polinomio de grado  $\leq k$  sobre cada elemento  $C \in \theta_h$  caracterizado por:

$$[G_\lambda^{kh}(q_h)]^C(P) = \begin{cases} 0 & \text{si } q_h^C(P) \leq s^C(P) \\ \frac{1}{\lambda} (q_h^C - s^C)(P) & \text{si } q_h^C(P) > s^C(P), \end{cases} \quad (41)$$

$\forall P \in \gamma_h^k \cap C, \quad \forall C \in \theta_h.$

De (29), de la definición de  $G_\lambda$  y de la  $\lambda$ -regularizada  $(I_{U_h^k})_\lambda$  se deduce inmediatamente el,

**Lema 1.** — *Se verifica:*

$$\pi_{kh} G_\lambda = G_\lambda^{kh} = (\partial I_{U_h^k})_\lambda \quad (42)$$

$$j_h^k = (I_{U_h^k})_\lambda B^* \quad (43)$$

Las consideraciones anteriores justifican la definición de un nuevo problema aproximado de (17) —modificación de  $(\pi_{2h}^k)$  por integración numérica— y permiten relacionar esta aproximación con las formulaciones del problema continuo<sup>1</sup>. En efecto, el problema (17) se aproxima de modo clásico por:

$$(P_{2h}^k)_1 \quad \begin{array}{l} u_h^k \in V_h^k \\ a(u_h^k, v_h - u_h^k) + j_h^k(v_h) - j_h^k(u_h^k) \geq L(v_h - u_h^k), \quad \forall v_h \in V_h^k. \end{array}$$

La igualdad (43) permite comparar  $(P_{2h}^k)$  con la ec. (49) de<sup>1</sup>. Argumentos análogos a los de la sección de formulación variacional de<sup>1</sup> junto con el lema 1 se aplican para concluir que  $(P_{2h}^k)_1$  tiene una y una sólo solución que coincide con la de los dos problemas siguientes:

$$(P_{2h}^k)_2 \quad \min_{v_h \in V_h^k} \left[ \frac{1}{2} a(v_h, v_h) - L(v_h) + \frac{1}{2\lambda} \|v_{hn} - P_{U_h^k} v_{hn}\|_{0,h}^2 \right].$$

$$(P_{2h}^k)_3 \quad \begin{array}{l} u_h^k \in V_h^k \\ a(u_h^k, v_h) + (G_\lambda^{kh}(u_{hn}^k), v_{hn})_{0,h} = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h^k. \end{array}$$

La convergencia de las aproximaciones del tipo  $(P_{2h}^k)$ , de las inecuaciones variacionales de segunda especie se estudia con detalle en Glowinski<sup>22</sup> y Glowinski-Lions-Tremolières<sup>24</sup>. El teorema general de convergencia de Glowinski<sup>22</sup> (Cap. I) se aplicará aquí para demostrar que todavía se conserva la convergencia de  $u_h^1$  (solución de  $P_{2h}^1$ ) a  $u$  (solución de la ec. (45) de<sup>1</sup>) en  $[H^1(\Omega)]^N$ . Más difícil resulta la estimación del error  $\|u - u_h^1\|_{1,\Omega}$  y no trataremos este tema en este trabajo. Referencias indicadas en este sentido pueden ser Ciarlet-Schultz-Varga<sup>18</sup> y Glowinski<sup>23</sup> donde se estudian problemas generales del tipo de los de la ec. (33) de la referencia<sup>1</sup>.

**Teorema 4.**— *Supongamos que  $(\tau_h)_{h>0}$  es una familia regular de triangulaciones y que*

$$s^{A_i} \in W^{1,\infty}(A_i), \quad i = 1, 2, \dots, L$$

Entonces:

$$\lim_{h \rightarrow 0} u_h^1 = u \quad \text{en } [H^1(\Omega)]^N \quad (44)$$

donde  $u$  y  $u_h^1$  son las soluciones de la ec. (49) de<sup>1</sup> y  $(P_{2h}^1)$  respectivamente, con  $j_h^1$  dado por (35).

**Demostración.**— Para probar (44) es suficiente verificar lo siguiente (véase Glowinski<sup>22</sup> (Cap. I Teorema 6.2):

$$(i) \quad \text{Existe } M \subset V, \bar{M} = V \text{ y } r_h : M \rightarrow V_h^1 \text{ tal que} \quad (44)$$

(ii) Si  $v_h \rightarrow v$  débilmente en  $V$ , entonces,

$$\liminf_{h \rightarrow 0} j_h^1(v_h) \geq j(v),$$

(iii)  $\lim_{h \rightarrow 0} j_h^1(r_h v) = j(v), \quad \forall v \in M.$

**Verificación de (i):** Bastará elegir como  $M$  y  $r_h$  los definidos en (22) y (23), respectivamente, con  $k = 1$ .

**Verificación de (ii):** Se utilizarán para ello los lemas siguientes de demostración inmediata.

**Lema 2.**— Sea  $C$  un  $m$ -simplex en  $\mathbb{R}^m$  ( $m = 1, 2$ ). Sea  $p$  un polinomio de grado  $\leq 1$  en  $m$  variables tal que  $p \geq 0$  en  $C$ . Entonces  $p^2$  es una función convexa en  $C$ .

**Corolario 1.**— Sea  $\pi_1^C(p^2)$  el polinomio de grado  $\leq 1$  que interpola a  $p^2$  en los vértices de  $C$ . Se tendrá:

$$\int_C p^2 \leq \int_C \pi_1^C(p^2) \tag{45}$$

**Lema 3.**— Sea  $C$  como en el lema anterior. Sea  $p$  un polinomio de grado  $\leq 1$  en  $C$  y  $\pi_1^C(p^+)$  el polinomio de grado  $\leq 1$  que interpola a  $p^+$  en los vértices de  $C$ . Se tiene:

$$\pi_1^C(p^+) \geq p^+ \geq 0 \quad \text{c.p.d. en } C. \tag{46}$$

**Lema 4.**— Sea  $s$  verificando la hipótesis (3). Sea  $\pi_{1h}(s)$  la función polinómica de grado  $\leq 1$  tal que

$$[\pi_{1h}(s)]^C = \pi_{1h}^C(s^C), \quad \forall C \in \theta_h \quad (\text{véase la notación en (38)}).$$

Entonces:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \pi_{1h}(s) = s \quad \text{en } L^\infty(\Gamma_C). \tag{47}$$

**Lema 5.**— Sea  $(p_\mu)$  una sucesión de elementos de  $L^2(\Gamma_C)$  tal que

$$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} p_\mu = p \quad \text{en } L^2(\Gamma_C).$$

Entonces,

$$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} p_\mu^+ = p^+ \quad \text{en } L^2(\Gamma_C). \tag{48}$$

**Lema 6.**— Para todo  $q \in L^2(\Gamma_C)$  tal que  $q^C \in C^0(C)$ ,  $C \in \theta_h$  se tiene:

$$\pi_{kh}^C [(q-s)^+] = \pi_{kh}^C [(\pi_{kh}^C(q) - \pi_{kh}^C(s))^+]. \tag{49}$$

Sea, pues, una sucesión  $(v_h)_h$  con  $v_h \in V_h^1$  tal que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} v_h = v \text{ débilmente en } V$$

Se tiene, entonces (véase Necas<sup>31</sup>) que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} v_{hn} = v_n \text{ en } L^2(\Gamma) \text{ fuerte.} \quad (50)$$

Utilizando, el lema 6 se tiene, cualesquiera que sean  $C \in \theta_h$  y  $P \in \gamma_h^1 \cap C$ :

$$\begin{aligned} [(v_{hn} - s)^+]^2(P) &= [\pi_{1h}^C [(v_{hn} - s)^+]]^2(P) = [\pi_{1h}^C [(v_{hn} - \pi_{1h}^C(s))^+]]^2(P) = \\ &= \pi_{1h}^C [(\pi_{1h}^C [(v_{hn} - \pi_{1h}^C(s))^+])^2](P) \end{aligned}$$

Sea  $p_h^C$  el polinomio de grado  $\leq 1$  en  $C \in \theta_h$ :

$$p_h^C = \pi_{1h}^C [(v_{hn} - \pi_{1h}^C(s))^+]. \quad (51)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} j_h^1(v_h) &= \frac{1}{2\lambda} \sum_{C \in \theta_h} \frac{m(C)}{N} \sum_{P \in \gamma_h^1 \cap C} [(v_{hn} - s)^+]^2(P) = \\ &= \frac{1}{2\lambda} \sum_{C \in \theta_h} \frac{m(C)}{N} \sum_{P \in \gamma_h^1 \cap C} \pi_{1h}^C [(p_h^C)^2](P) = \\ &= \frac{1}{2\lambda} \sum_{C \in \theta_h} \int_C \pi_{1h}^C [(p_h^C)^2] \geq \frac{1}{2\lambda} \sum_{C \in \theta_h} \int_C (p_h^C)^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{2\lambda} \int_{\Gamma_C} [(v_{hn} - \pi_{1h}(s))^+]^2 = \frac{1}{2\lambda} \| (v_{hn} - \pi_{1h}(s))^+ \|_{0,\Gamma_C}^2 \end{aligned}$$

donde hemos utilizado los lemas 2 y 3. Haciendo uso de (50) y de los lemas 4 y 5, de la desigualdad precedente se deduce (ii).

**Observación 5.**— Teniendo en cuenta (50) y el lema 5 se deduce:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} j(v_h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\lambda} \| (v_{hn} - s)^+ \|_{0,\Gamma_C}^2 = \\ &= \frac{1}{2\lambda} \| (v_h - s)^+ \|_{0,\Gamma_C}^2 = j(v). \end{aligned} \quad (52)$$

**Verificación de (iii):** Sea  $v \in M = [C^0(\bar{\Omega})]^N \cap V$ . De (24) con  $k = 1$  se tiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} r_h v = v \text{ en } V.$$

En consecuencia  $\lim_{h \rightarrow 0} (r_h v)_n = v_n$  en  $L^2(\Gamma)$ . Es evidente, por otra parte, que  $(r_h v)_n = \pi_{1h}(v_n)$ . Por tanto:

$$j_h^1(r_h v) = \frac{1}{2\lambda} \sum_{C \in \theta_h} \frac{m(C)}{N} \sum_{P \in \gamma_h^1 \cap C} [(\pi_{1h}(v_n) - s)^+]^2(P) =$$

$$= \frac{1}{2\lambda} \sum_{C \in \theta_h} \int_C \pi_{1h}^C [(\pi_{1h}[(v_n - s)^+])^2]$$

Dada la regularidad de  $s$  se tiene que  $(v_n - s)^+ \in W^{1,\infty}(A_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , (véase Stampacchia<sup>36</sup>, Brezis<sup>12</sup> (p. 150-155)). De ello se deduce que

$$\|\pi_{1h}((v_n - s)^+)\|_{W^{1,\infty}(\Gamma_C)} \leq \delta$$

donde  $\delta$  es una constante independiente de  $h$ . Puesto que  $\pi_{1h}[(v_n - s)^+]$  es un polinomio de grado  $\leq 1$  a trozos, se deduce que todas las derivadas hasta el orden 2 de  $(\pi_{1h}[(v_n - s)^+])^2$  están acotadas en  $\Gamma_C$ , y por tanto en cada  $C \in \theta_h$ , independientemente de  $h$ . Las estimaciones de error para la fórmula trapezoidal (véase Isaacson-Keller<sup>26</sup> (p. 359) para el caso  $N = 3$ ) garantizan que:

$$\int_C \pi_{1h}^C [(\pi_{1h}[(v_n - s)^+])^2] = \int_C (\pi_{1h}[(v_n - s)^+])^2 + O(h^{5-N})$$

En consecuencia,

$$j_h^1(r_h v) = \frac{1}{2\lambda} \int_{\Gamma_C} (\pi_{1h}[(v_n - s)^+])^2 + O(h^{5-N}) =$$

$$= \frac{1}{2\lambda} \|\pi_{1h}[(v_n - s)^+]\|_{0,\Gamma_C}^2 + O(h^{5-N})$$

Como  $(v_n - s)^+$  es continua en  $A_i$   $i = 1, 2, \dots, L$  se tiene:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \pi_{1h}[(v_n - s)^+] = (v_n - s)^+ \text{ en } L^2(\Gamma_C)$$

de donde se deduce (iii). Esto finaliza la demostración del teorema 4.

### RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS DISCRETOS

En esta sección supondremos  $k=1$ , es decir, nos restringimos únicamente a elementos finitos lineales a trozos. Se trata entonces de resolver de forma efectiva los problemas  $(P_{1h}^1)$  y  $(P_{2h}^1)$ . Teniendo en cuenta que

$$j_h^1 = (I_{U_h^1})_\lambda \cdot B^* \quad (\text{véase Lema 1}) \text{ y que } I_{K_h^1} = I_{U_h^1} \cdot B^*,$$

estos problemas pueden escribirse en la forma siguiente *donde se suprimen los índices y superíndices que hacen referencia a  $k = 1$ .*

$$(P_{1h}) \quad \begin{array}{l} u_h \in V_h \\ a(u_h, v_h - u_h) + I_{U_h}(B^*v_h) - (I_{U_h})(B^*u_h) \geq L(v_h - u_h), \quad \forall v_h \in V_h \end{array}$$

$$(P_{2h}) \quad \begin{array}{l} u_h \in V_h \\ a(u_h, v_h - u_h) + (I_{U_h})_\lambda(B^*v_h) - (I_{U_h})_\lambda(B^*u_h) \geq L(v_h - u_h), \quad \forall v_h \in V_h. \end{array}$$

(compárese con los problemas continuos (ecs. (49) y (50) de<sup>1</sup>).

Los métodos clásicos en la solución de inecuaciones variacionales de Glowinski-Lions-Tremolieres<sup>24</sup>, Glowinski<sup>22</sup> pueden aplicarse para la resolución de estos problemas (véase Oden-Kin<sup>33</sup> y Oden-Kikuchi<sup>32</sup> para el problema de Signorini). A continuación introducimos un algoritmo iterativo debido a Bermúdez-Moreno<sup>5</sup> que se ha revelado especialmente adaptado para este tipo de problemas. Para otras aplicaciones de este algoritmo véase Bermúdez<sup>2</sup>, Bermúdez-Durany<sup>4</sup>, Bermúdez-Viaño<sup>7,8,9</sup> y Viaño<sup>37, 38</sup>. Se necesitarán para ello las ideas y notaciones introducidas en<sup>1</sup>. Aquellos argumentos se aplican para deducir la equivalencia de  $(P_{1h})$  con

$$(P_{1h}) \quad \begin{array}{l} u_h \in V_h \\ L \in Au_h + \Lambda_{V_h} [\partial(I_{U_h} B^*)(u_h)]. \end{array}$$

Ahora bien, dado que (véase (10)):

$$\text{Int}(U_h) = \{q_h \in E_h : q_h^C(P) < s^C(P), \forall P \in \gamma_h \cap C, \forall C \in \theta_h\} \neq \emptyset,$$

se deduce (véase<sup>1</sup>):

$$\Lambda_{V_h} [\partial(I_{U_h} \cdot B^*)(u_h)] = B[\partial I_{U_h}(B^*u_h)]$$

Recordemos que este razonamiento no podría hacerse para el problema continuo. Por tanto  $(P_{1h})$  equivale a

$$(P_{1h}) \quad \begin{array}{l} u_h \in V_h \\ L \in Au_h + B G^h(B^*u_h), \quad G^h = \partial I_{U_h}. \end{array}$$

Análogamente, de la diferenciabilidad de  $(I_{U_h})_\lambda$  y la igualdad

$$(I_{U_h})'_\lambda = G_\lambda^h,$$

donde  $G_\lambda^h$ , definida en (40), es la aproximación Yosida de  $G^h$ , se deduce la equivalencia de  $(P_{2h})$  con

$$(P_{2h}) \quad \begin{array}{l} u_h \in V_h \\ L = Au_h + B G_\lambda^h B^*u_h. \end{array}$$

Ambos problemas, entran pues en la categoría:

$$(P_h) \quad \begin{aligned} u_h &\in V_h \\ L \in Au_h + BH B^* u_h \end{aligned}$$

donde  $H: E_h \rightarrow P(E_h)$  es un operador maximal monótono y  $B \in \mathcal{L}(E_h, V_h')$ ,  $A \in \mathcal{L}(V_h, V_h')$  y  $L \in V_h'$ .

El algoritmo siguiente para la resolución de  $(P_h)$  se describe siguiendo a Bermúdez-Moreno<sup>5</sup>.

Sean  $\omega > 0$ ,  $\mu = \frac{1}{2\omega}$  y  $\rho \in [0, 1)$ . Sea  $H_\mu^\omega$  la aproximación Yosida del operador  $H^\omega = H - \omega I$ . Puesto que  $A$  es  $V_h$ -elíptico, la sucesión  $(u_h^r)_{r \geq 0}$  construida como se indica a continuación converge en  $V_h$  a  $u_h$  solución de  $(P_h)$ :

Se parte de  $q_h^0 \in E_h$  arbitrario. Habiendo obtenido  $q_h^r$  y  $u_h^{r-1}$ , se calcula  $q_h^{r+1}$  y  $u_h^r$  tales que:

$$A u_h^r + \omega B B^* u_h^r = L - B q_h^r \tag{53}$$

$$q_h^{r+1/2} = H_\mu^\omega [B^* u_h^r + \frac{1}{2\omega} q_h^r] \tag{54}$$

$$q_h^{r+1} = \rho q_h^{r+1/2} + (1 - \rho) q_h^r \tag{55}$$

Utilizando la igualdad (55) de<sup>1</sup> y las definiciones de  $A$ ,  $B$  y  $L$ , podemos reescribir el algoritmo (53) y (54) como sigue:

$$\begin{aligned} a(u_h^r, v_h) + \omega \int_{\Gamma_C} u_{hn}^r v_{hn} d\gamma &= \int_{\Omega} f \cdot v_h + \int_{\Gamma_F} g \cdot v_h d\gamma - \\ &- \int_{\Gamma_C} q_h^r v_{hn} d\gamma, \quad \forall v_h \in V_h \end{aligned} \tag{56}$$

$$q_h^{r+1/2} = 2H_{1/\omega} (2u_{hn}^r + \frac{1}{\omega} q_h^r) - 2\omega u_{hn}^r - q_h^r \tag{57}$$

donde  $H_{1/\omega}$  es la aproximación Yosida de parámetro  $1/\omega$  de  $H$ . Se reconocerá entonces en (56) un problema de elasticidad lineal cuya matriz de rigidez no varía con  $r$  y cuyo segundo miembro es una modificación (en cada iteración) del vector de cargas. Obsérvese como el parámetro  $\omega$  modifica la matriz de rigidez usual en elasticidad. A continuación explicitamos (57) para los dos problemas  $(P_{ih})$   $i = 1, 2$ .

Para el problema de Signorini  $(P_{1h})$  se tiene  $H = G^h = \partial I_{U_h}$ . Utilizando la ec. (63) de<sup>1</sup> tendremos

$$H_{1/\omega} = G_{1/\omega}^h = \omega(I - P_{U_h})$$

donde  $P_{U_h}: E_h \rightarrow U_h$  es el operador de proyección con la norma  $\|\cdot\|_{0,h}$  (véase (40),

(41)). Por tanto, la puesta al día del multiplicador  $q_h^r$  en el problema de Signorini queda como sigue:

$$p_h^r = 2u_{hn}^r + \frac{1}{\omega} q_h^r, \quad (58)$$

$$q_h^{r+1/2} = \omega [p_h^r - 2P_{U_h}(p_h^r)].$$

Para el problema de contacto con sólido ( $P_{2h}$ ) se tiene  $H = G_\lambda^h = (\partial I_{U_h})_\lambda$  siendo  $\lambda = 1/k$ . Por tanto, en este caso

$$H_{1/\omega} = (G_\lambda^h)_{1/\omega} = G_{\lambda+1/\omega}^h = \frac{\omega}{\lambda\omega+1} (I - P_{U_h}) \quad (59)$$

La segunda igualdad (59) es una propiedad general de la aproximación Yosida (véase Brezis<sup>11</sup>). En consecuencia, la puesta al día del multiplicador para el problema de contacto con sólido elástico es:

$$p_h^r = 2u_{hn}^r + \frac{1}{\omega} q_h^r \quad (60)$$

$$q_h^{r+1/2} = \frac{\omega}{1+\lambda\omega} [(1-\lambda\omega)p_h^r - 2P_{U_h}(p_h^r)].$$

**Observación.**— Desde el punto de vista del cálculo es interesante observar que (60) con  $\lambda = 0$  se reduce a (58). Esto permite un mismo programa para la puesta al día de los multiplicadores en ambos problemas. Este hecho resulta todavía más importante si se tiene en cuenta que el problema (56) es el mismo en ambos casos.

Terminaremos esta sección con una breve nota sobre la *implementación práctica*. Supongamos que  $\Sigma_h = \{a_i\}_{i=1}^M$  es el conjunto de vértices de la triangulación y que  $\theta_h$  está constituida por  $N_C$  caras de  $N$ -simplex. Para cada cara  $i \in \{1, 2, \dots, N_C\}$ , sea  $n_i = (n_{ij})_{j=1}^N$  su vector normal unitario y  $a_{m_{ij}}$   $1 \leq j \leq N$  los vértices de esta cara en la numeración global.

Cada función  $v_h \in V_h$  está determinada por el vector de valores nodales  $\tilde{v} \in \mathbb{R}^{N \times M}$  tal que

$$\tilde{v}_{N(i-1)+j} = v_j(a_i) \quad 1 \leq i \leq M, \quad 1 \leq j \leq N \quad (61)$$

Sea  $\tilde{s} \in \mathbb{R}^{N \times N_C}$  el vector definido por:

$$\tilde{s}_{N(i-1)+j} = s^{Ci}(a_{m_{ij}}), \quad 1 \leq i \leq N_C, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (62)$$

Se notará que  $s^{Ci}(a_{m_{ij}})$  es la distancia del vértice  $a_{m_{ij}}$  al obstáculo en la dirección del vector  $n_i$  (normal a  $C_i$ ). En la práctica ocurre que se conoce el vector  $n_i$ , las coordenadas del punto  $a_{m_{ij}}$  y la ecuación del obstáculo en la forma  $F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ . Por tanto,  $s^{Ci}(a_{m_{ij}})$  es la solución de la ecuación en  $\xi$ :

$$F(a_{m_{ij}} + \xi n_i) = 0 \quad (63)$$

que puede calcularse utilizando un método numérico (dicotomía, Newton-Raphson si  $F$  es regular, etc.).

Ocorre, entonces, que la matriz de rigidez  $A_{\omega}$  del problema de elasticidad (56) es tal que

$$A_{\omega} = A + \omega BB^T \quad (64)$$

donde  $A$  es la matriz de rigidez usual en elasticidad y  $B$  es una matriz de orden  $(N \times M) \times (N \times N_C)$  con todos sus elementos nulos salvo:

$$[B]_{N(m_{ij}-1)+k, N(i-1)+j} = n_{ik}, \quad 1 \leq j, k \leq N, \\ 1 \leq i \leq N_C \quad (65)$$

Por otra parte, toda función  $q_h \in E_h$ , está unívocamente determinada por el vector  $\tilde{q} \in \mathbb{R}^{N \times N_C}$  definido por:

$$\tilde{q}_{N(i-1)+j} = q^{C_i(a_{m_{ij}})}, \quad 1 \leq i \leq N_C, \quad 1 \leq j \leq N \quad (66)$$

de suerte que  $P_{U_h}(q_h)$  se determina conociendo el vector  $P_{\tilde{U}}(\tilde{q})$  siendo  $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^{N \times N_C}$  el convexo:

$$\tilde{U} = \left\{ z \in \mathbb{R}^{N \times N_C} : z_j \leq \tilde{s}_j, \quad 1 \leq j \leq N \times N_C \right\}, \quad (67)$$

y  $P_{\tilde{U}}$  el operador de proyección ortogonal con la norma euclídea usual en  $\mathbb{R}^m$ , es decir:

$$[P_{\tilde{U}}(\tilde{q})]_i = \begin{cases} \tilde{q}_i & \text{si } \tilde{q}_i \leq \tilde{s}_i \\ \tilde{s}_i & \text{si } \tilde{q}_i > \tilde{s}_i \end{cases}, \quad 1 \leq i \leq N \times N_C \quad (68)$$

Después de estas indicaciones no es necesario insistir sobre la facilidad de implementación del algoritmo (53)-(55). Estas son las ideas básicas seguidas para la realización de un código FORTRAN que resuelve los dos tipos de problemas, en 2 y 3 dimensiones, sin ninguna restricción sobre la forma del obstáculo. Este código es compatible con la Biblioteca MODULEF del Institut National de Recherche en Informatique et Automatique (I.N.R.I.A.) de Francia (véase Viaño<sup>39</sup>).

### EXPERIENCIAS NUMERICAS

El primer test se ha realizado resolviendo el *problema de Signorini* que se presenta en la endentación con rodillo cilíndrico de un bloque rectangular de material elástico, en la hipótesis de deformaciones planas (véase figura 3). El mismo problema se considera en Oden-Kim<sup>33</sup>. Se suponen los siguientes datos físicos:

- Dimensiones del bloque:  $16 \times 4$
- Módulo de Young:  $E = 10^3$
- Coeficiente de Poisson:  $\nu = 0.3$
- Radio del cilindro:  $R = 8$

Se supone el bloque apoyado, de modo que los desplazamientos en la cara inferior son nulos. Los laterales del bloque se consideran libres. La cara superior es la superficie

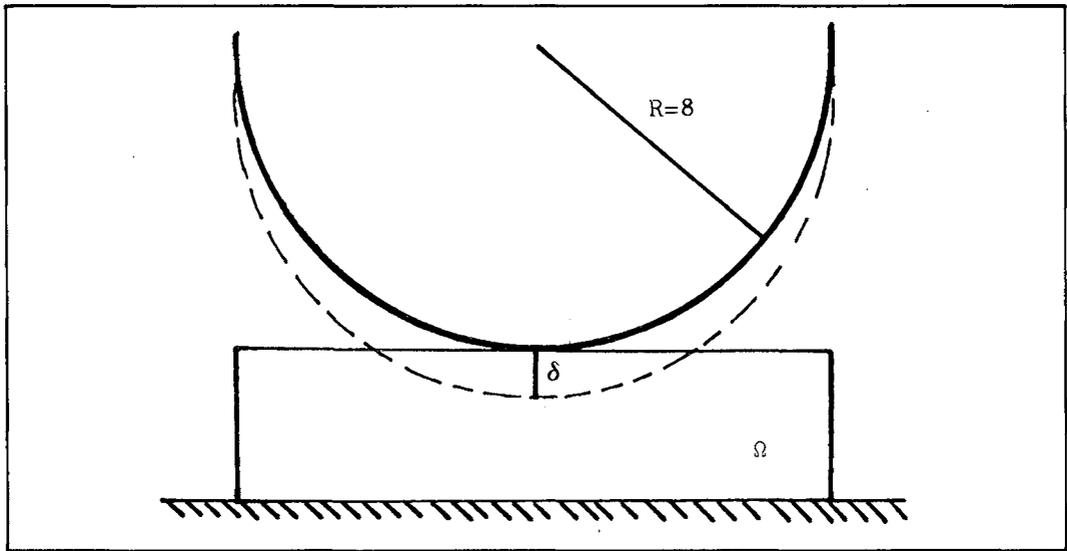


Fig. 3.— Test 1: Endentación con rodillo cilíndrico.

susceptible de entrar en contacto con el obstáculo (el cilindro). Dada la simetría del problema se modeliza la mitad del dominio con una malla regular de 144 triángulos y 91 vértices (Figura 4).

Suponiendo que el cilindro desciende verticalmente una distancia  $\delta$  se tiene:

$$\Gamma_C = \left\{ x = (x_1, 4), \quad 0 \leq x_1 \leq 8 \right\}$$

$$s(x) = 8 - \delta - (64 - x_1^2)^{1/2}, \quad \forall x \in \Gamma_C.$$

Se ha tomado en los ensayos  $\delta = 0.6$ . En el algoritmo (53)-(55) se ha puesto  $\rho = 0.8$  en todos los casos. Se utiliza un test de parada del tipo

$$e^{r+1} = \frac{\sum_{i=1}^{N \times M} |\tilde{u}_i^{r+1} - \tilde{u}_i^r|}{\sum_{i=1}^{N \times M} |\tilde{u}_i^{r+1}|} < 10^{-3}$$

donde  $u^r$  es el vector de valores nodales de  $u_n^r$ . La Tabla 1 muestra el número de iteraciones en función del parámetro  $\omega$ . Se observa la baja sensibilidad del número de iteraciones a los cambios de  $\omega$ . En la Figura 5, con trazo continuo, se representa la malla deformada, donde se visualiza el desplazamiento del material hacia el lateral libre.

$\omega$	125	200	250	300	325	335	350	400	500	$10^3$	$2.10^3$	$10^4$
N.º iteraciones	9	8	7	6	7	7	7	7	8	10	14	33

Tabla 1. — Endentación con rodillo cilíndrico: N.º de iteraciones en función del parámetro  $\omega$ .

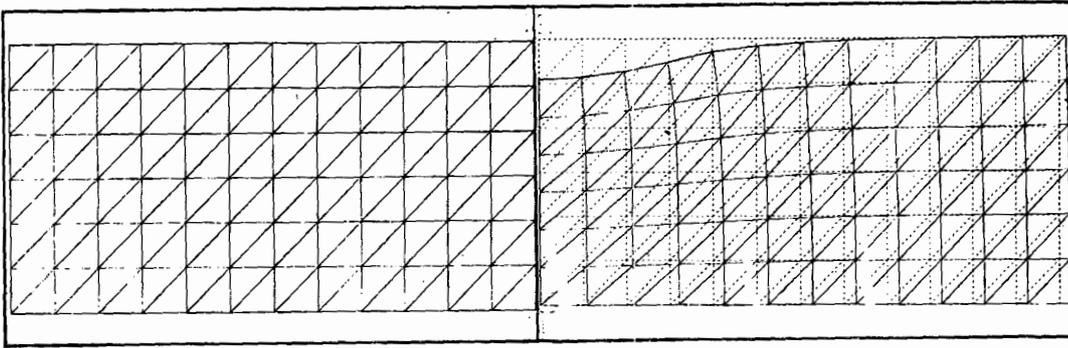


Fig. 4.— Test 1: M.E.F.

Fig. 5.— Test 1: Deformaciones.

La segunda experiencia se refiere a un problema de *contacto con medio elástico*. Se considera una estructura de hormigón como la representada en la Figura 6. Necesidades de la construcción imponen que el apoyo del pilar izquierdo sea en el borde de la zapata. Se supone un comportamiento elástico tanto en el hormigón como en la superficie de apoyo (suelo). La presencia de la viga centradora uniéndolas zapatas se explica porque, en su ausencia, se presume que, una vez cargada la estructura en la parte superior de los pilares, la zapata izquierda se deslizará hacia la derecha (además de su posible enterramiento), con el consiguiente riesgo de ruptura del pilar izquierdo. La viga centradora es una solución clásica en arquitectura. En esta experiencia se trata de simular el comportamiento de la estructura en ambos casos y evidenciar la necesidad de la viga centradora.

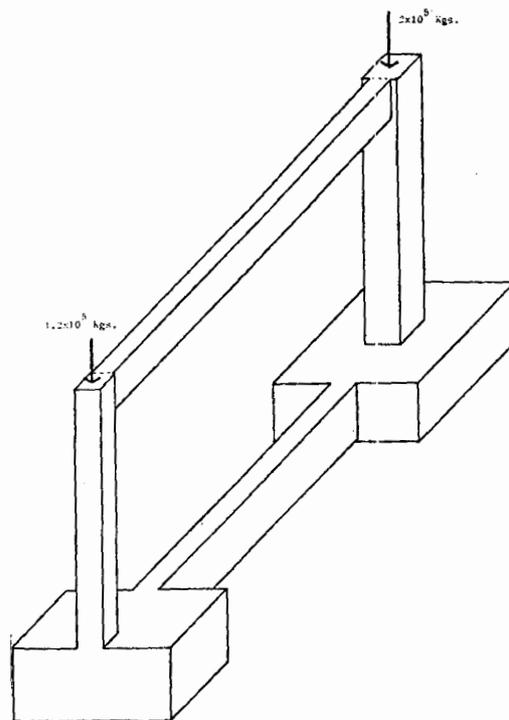


Fig. 6.— Test 2: Estructura en hormigón con viga centradora.

La Figura 7 muestra las dimensiones de las diferentes partes de esta estructura, así como las cargas consideradas sobre cada uno de los pilares. Se supone la *hipótesis de tensiones planas* y se estudia, por tanto, un corte vertical. Se supone, asimismo, que bajo la viga centradora se extiende un relleno blando y que ésta no se encuentra en contacto con el terreno. Los datos físicos son los siguientes:

Hormigón: Módulo de Young:  $E = 1.9 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$   
 Coeficiente de Poisson:  $\nu = 0.2$

Terreno: Módulo de balasto:  $k = 30 \text{ Kg/cm}^3$

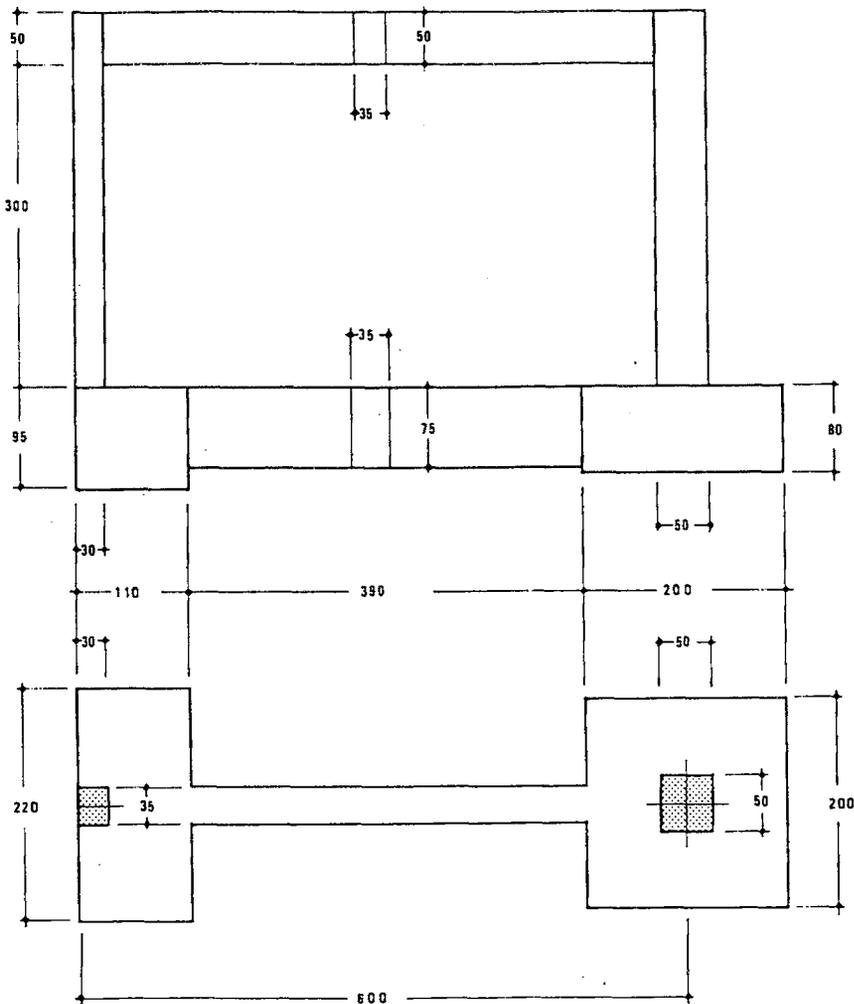


Fig. 7.— Test 2: Dimensiones de la estructura.

En las Figuras 8 y 9 se representan las mallas regulares de elementos finitos utilizadas. La primera consta de 1.328 triángulos y 803 vértices. Las Figuras 10 y 11 muestran las estructuras deformadas con y sin viga centradora. Es evidente la función de contención realizada por ésta. La solución se obtiene con el algoritmo (53)-(55) tomando  $\rho = 0.8$  y  $\omega = 10^6$ . Se realizan 10 iteraciones, de modo que con el test de parada del caso anterior, se tiene  $e^{10} < 0.05$ .

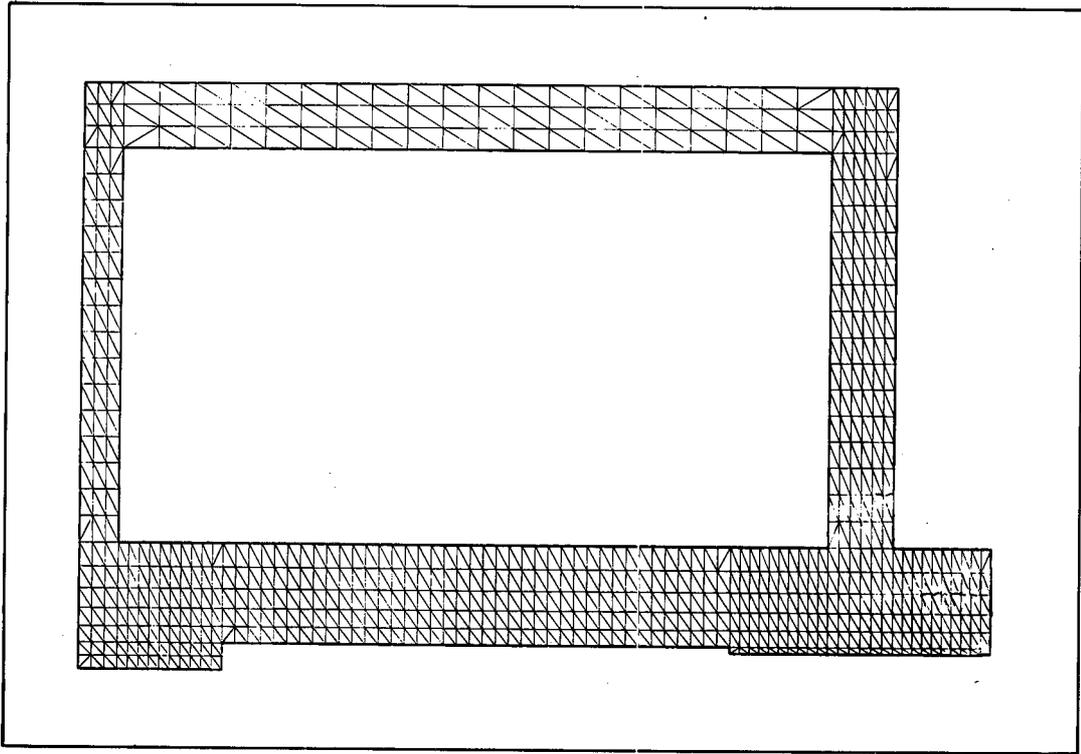


Fig. 8. - Test 2: Triangulación de la estructura con viga.

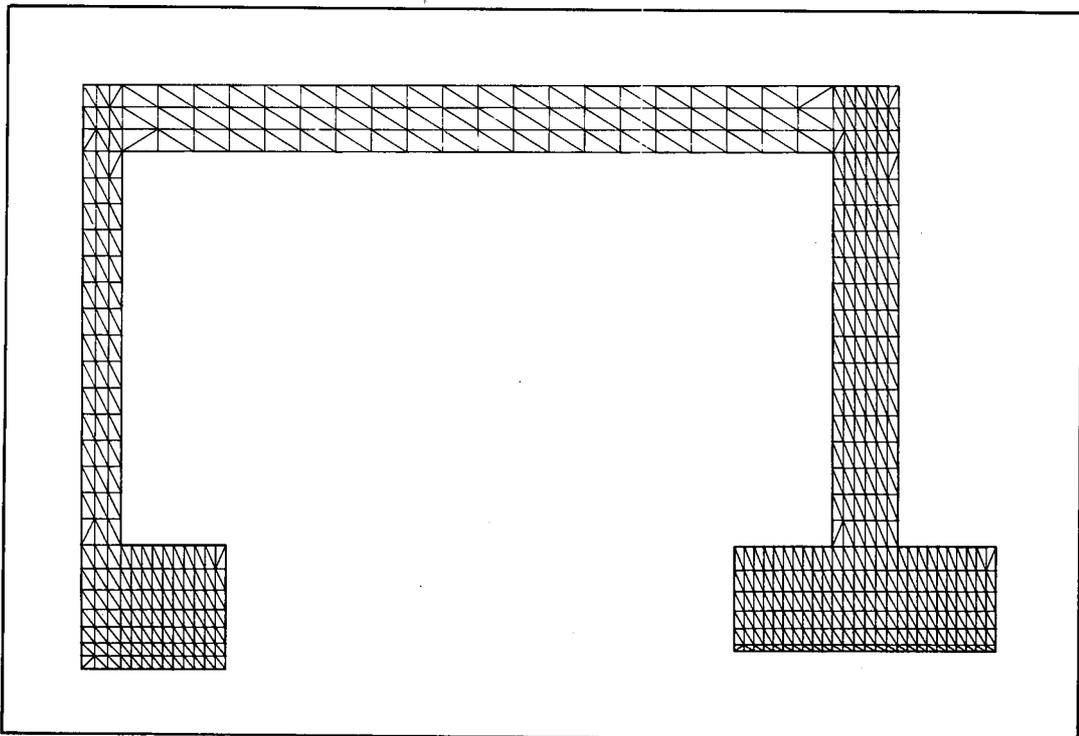


Fig. 9. - Test 2: Triangulación de la estructura sin viga.

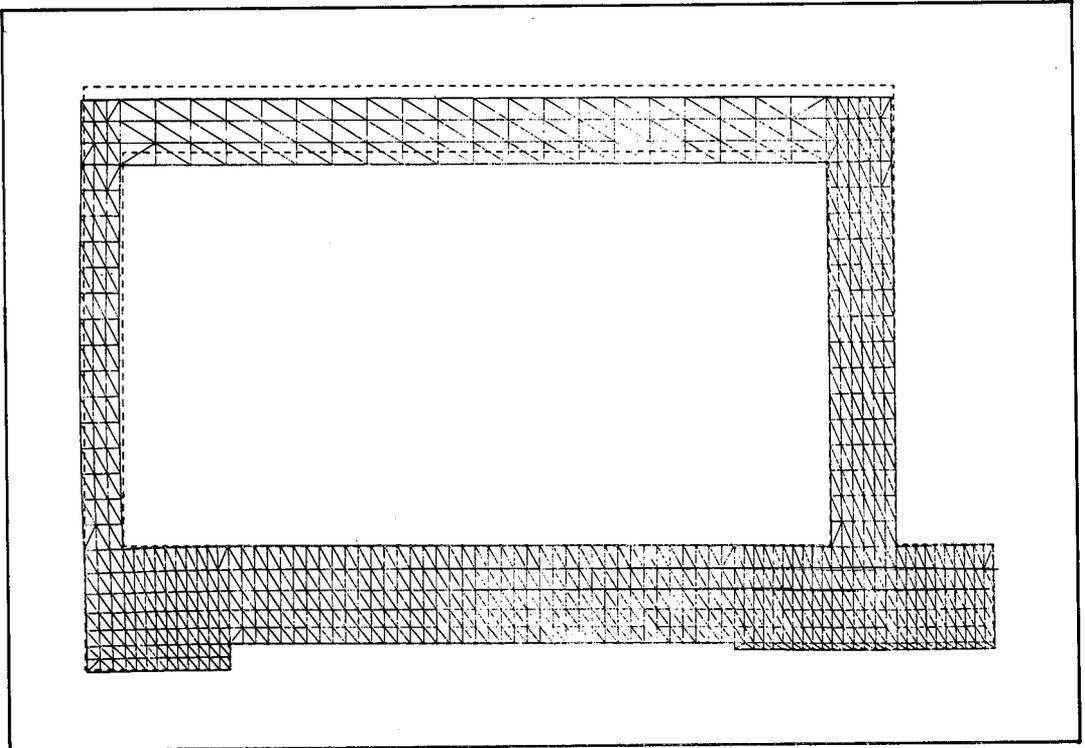


Fig. 10.— Test 2: Deformaciones en la estructura con viga.

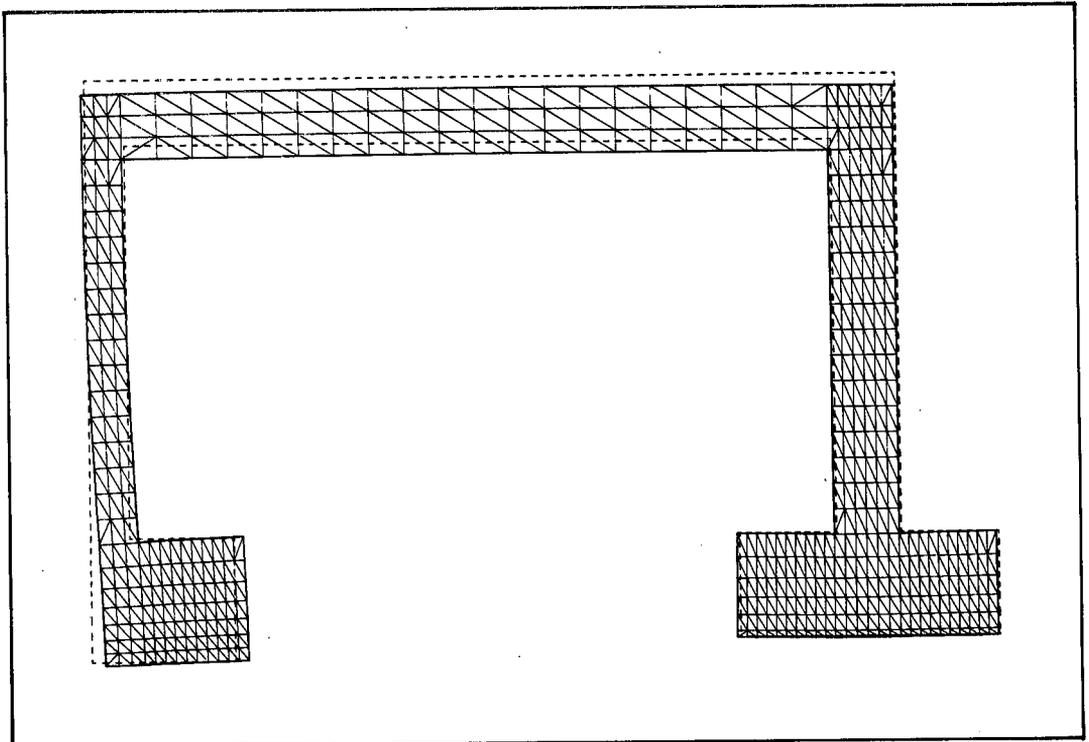


Fig. 11.— Test 2: Deformaciones en la estructura sin viga.

## AGRADECIMIENTOS

Las experiencias numéricas que acompañan este artículo han sido realizadas, casi en su totalidad, en INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET AUTOMATIQUE (I.N.R.I.A.) de Rocquencourt-FRANCIA durante una estancia en el mismo, en noviembre de 1984, en el marco de la Acción Integrada I.N.R.I.A.-Departamento de Ecuaciones Funcionales de la Universidad de Santiago de Compostela. Asimismo, el problema test de la estructura de hormigón nos fue planteado por el Prof. Perez Valcárcel de la E.T.S. de Arquitectura de La Coruña, colaborando en los trabajos de programación iniciales D. Fernando Taberero, alumno de dicha Escuela.

## REFERENCIAS

1. J.M. Viaño, Análisis de un método numérico con elementos finitos para problemas de contacto unilateral sin rozamiento en elasticidad Parte I: Formulación física y matemática de los problemas. *Rev. Int. Met. Num. Calc. y Dis. Ing.* Vol. **1**, nº 4 (1985).
2. A. Bermúdez, Un método numérico para la resolución de ecuaciones con varias no-linealidades. Aplicación a un problema de flujo de gas en un conducto. *Revista de la R.A. Ciencias*. Madrid (Próxima aparición).
3. A. Bermúdez, *Elementos finitos mixtos para problemas no lineales*. Actas del IV Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones (C.E.D.Y.A.) Sevilla (1981).
4. A. Bermúdez y J. Durany, A finite element method for solving heat transfer problems with phase change in non-homogeneous media. En *Numerical methods for non-linear problems*. Vol. **2** Ed. Taylor-Hinton-Owen-Oñate. Pineridge Press. Swansea, U.K. (1984).
5. A. Bermúdez y C. Moreno, Duality methods for solving variational inequalities. *Comp. Math. with App.* Vol. **7** pp. 43-58, (1981).
6. A. Bermúdez y C. Moreno, *Application of pursuit method to optimal control problems*. (Próxima aparición).
7. A. Bermúdez y J.M. Viaño, Some numerical methods in elastoplasticity. *Calcolo*, Vol. **XIX** fasc. IV pp. 335-353, (1982).
8. A. Bermúdez y J.M. Viaño, Etude de deux schémas numériques pour les équations de la thermoélasticité. R.A.I.R.O. *Analyse Numérique*. Vol. **17** nº 2, pp. 121-136, (1983).
9. A. Bermúdez y J.M. Viaño, Algoritmos iterativos para el problema de elastoplasticidad con endurecimiento. En *1.º Simposium Nacional sobre Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería*. Ed. Oñate-Alonso-Casteleiro. Barcelona (1982).
10. H. Brezis, *Problèmes unilatéraux*. J. de Math. Pures et Appliquées. Vol. **IX**, serie 72, pp. 1-68, (1971).
11. H. Brezis, *Operateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. North-Holland. Amsterdam (1973).
12. H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle. Theorie et Applications*. Masson-París (1983).
13. H. Brezis, M. Crandall y A. Pazy, Perturbations of nonlinear monotone sets in Banach spaces. *Comm. Pure Applied, Math*, Vol. **23**, pp. 123-144, (1970).
14. F. Brezzi, On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from lagrangian multipliers. R.A.I.R.O. *Analyse Numerique*, Vol. **8**, pp. 129-151, (1974).
15. F. Brezzi, W. Hager y P.A. Raviart, Error estimates for the finite element solution of variational inequalities. *Numer. Math.*, Vol. **28**, pp. 431-443, (1977).
16. L.T. Campos, J.T. Oden y N. Kikuchi, A numerical analysis of a class of contact problems with friction in elastostatics *Comp. Meth. App. Mech. and Eng.*, Vol. **34**, pp. 821-845, (1982).
17. P.G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland. Amsterdam, (1978).
18. P.G. Ciarlet, M.H. Schultz y R.S. Varga, Numerical methods for high order accuracy for nonlinear boundary value problems. V. Monotone Operator theory. *Numerische, Math.*, Vol. **13**, pp. 51-77, (1969).
19. M. Cocu, Existence of solutions of Signorini problems with friction. *Int. J. Engng. Sci.* Vol. **22**, nº 5, pp. 567-575, (1984).

20. G. Duvaut y J.L. Lions, *Inequalities in mechanics and physics*. Springer-Verlag. Berlin, (1976).
21. I. Ekeland y R. Temam, *Analyse Convexe et problèmes variationnelles*. Gautier-Villars. París, (1984).
22. R. Glowinski, *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*. Springer-Verlag. New York (1984).
23. R. Glowinski, *Numerical Analysis of Nonlinear Boundary value Problems (I). Methods of Convexity and Monotonicity*. (En preparación).
24. R. Glowinski, J.L. Lions y R. Tremolières, *Analyse Numerique des Inequations Variationnelles*. Dunod-Bordas. París, (1976).
25. J. Haslinger, *Mixed Variational formulation of elliptic inequalities. Approximation theory*. Lecture Notes 2 Department of Mathematics. University of JYVÄSKYLÄ, (1983).
26. E. Isaacson y H.B. Keller, *Analysis of numerical methods*. Ed. John Wiley and Sons. New York, (1966).
27. N. Kikuchi y J.T. Oden, Contact problems in elasticity. SIAM Studies in Applied Mathematics. *SIAM Publication*, Philadelphia, (1982).
28. J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod. Gautier-Villars, París, (1969).
29. J.L. Lions y E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Dunod. París, (1968).
30. J.A.C. Martins y J.T. Oden, A numerical analysis of a class of problems in elastodynamics with friction. *Comp. Meth. App. Mech. and Eng.*, Vol. **40**, pp. 327-360, (1983).
31. J. Necas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson. París, (1967).
32. J.T. Oden y N. Kikuchi, Finite element methods for constrained problems in elasticity. *Int. J. Num. Meth. Eng.* Vol. **18**, pp. 701-725, (1982).
33. J.T. Oden y S.J. Kim, Interior penalty methods for finite element approximations of the Signorini problem in elastostatics. *Comp. and Math. with App.*, Vol. **8**, n.º 1, pp.35-56, (1982).
34. J.T. Oden y E.B. Pires, Non local and nonlinear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity. *J. App. Mech.*, Vol. **50**, (1983).
35. A. Pazy, Semigroups of non-linear contractions in Hilbert spaces. En *Problems in Nonlinear Analysis*. C.I.M.E. Ed. Cremonese. Roma, (1971).
36. G. Stampacchia, *Equations elliptiques du second-ordre à coefficients discontinus*. Séminaire de Mathématiques Supérieures. Presses de L'Université de Montréal, (1965).
37. J.M. Viaño, Existencia y aproximación de soluciones en termoelasticidad y elastoplasticidad. *Tesis Doctoral*. Univ. Santiago de Compostela, (1981).
38. J.M. Viaño, *Calcul de contraintes en elastoplasticité bi et tridimensionnelle*. Module ELAPLA. Publication MODULEF- I.N.R.I.A. Rocquencourt, n.º 89, (1982).
39. J.M. Viaño, Une méthode de resolution de problèmes de contact unilateral en élasticité et son implementation dans MODULEF. *Rapport de Recherche I.N.R.I.A.* Rocquencourt, n.º 457 (1985).
40. K. Yosida, *Functional Analysis*. Springer-Verlag. Berlin, (1980).