

## **Modelos matemáticos de la sociedad y aplicaciones. Estructuras sociales y gobierno**

*Nelia Tello<sup>1</sup>*

*Escuela Nacional de Trabajo Social, Universidad Nacional Autónoma de México,  
México.*

*José Antonio de la Peña<sup>2</sup>*

*Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México y Consejo  
Nacional de Ciencia y Tecnología, México.*

### **Resumen**

Las estructuras sociales son acuerdos de organización de la sociedad alrededor de los asuntos de poder social: la ideología, la riqueza, la milicia y el estado. Las estructuras sociales se desarrollan de manera natural debido a presiones de varios tipos: ambientales, laborales, conflictos y demográficas, entre otros. En nuestro modelo de red social consideramos la forma en que la estructura de la red, en particular, el número de nodos, determina la estructura en diversas formas de gobierno para la sociedad. De particular importancia en este acercamiento al problema lo juega el número de Dunbar  $D$  de la red, ya que el número de nodos  $n \leq 40 (D/2)^{m-1}$ , donde  $m$  es el número de niveles de gobierno. Mostramos que en este modelo el tamaño del gobierno de la red es proporcional a  $n^{\frac{3}{4}}$ , donde  $n$  es el número de nodos de la red.

**Palabras clave:** estructura social, gobierno, poder, líder.

### **Abstract**

Social structures are implicit agreements for the organization of society around the issues of social power: ideology, wealth, the military and the state. These structures develop in a natural way due to pressures of different kind: labor, environmental, demographic among others. In our model, the structure of the network, in particular its size, determine important features of the government. Particularly important in our approach is the Dunbar number  $D$  of the network, since the size of the network is bounded as  $n \leq 40 (D/2)^{m-1}$  for an  $m$ -level government. We show that the size of the government is proportional to  $n^{\frac{3}{4}}$ .

**Key words:** social structure, government, power, leadership.

Las estructuras sociales son los acuerdos de organización de la sociedad que determinan, en gran parte, el papel que juegan los miembros de la sociedad.

---

<sup>1</sup>E-mail: [neliatello@me.com](mailto:neliatello@me.com)

<sup>2</sup> E-mail: [jap@matem.unam.mx](mailto:jap@matem.unam.mx)

Múltiples son las formas en que la sociedad se ha estructurado dependiendo de épocas, regiones del planeta, tamaño de la sociedad y condiciones económicas, medio-ambientales y políticas. Las estructuras pueden establecer un orden jerárquico o un orden funcional con diversos fines, por ejemplo, pueden determinar el sistema de estratificación socio-económica, conocido como *clases sociales*, o pueden establecer la *organización gremial* determinada por la actividad de los individuos. Por supuesto, las diversas estructuras sociales se intersecan y relacionan de maneras complejas entre sí, haciendo difícil el problema de jerarquizarlas. La familia, la religión, la ley, la economía, el gobierno son todas diferentes formas de estructuras sociales.

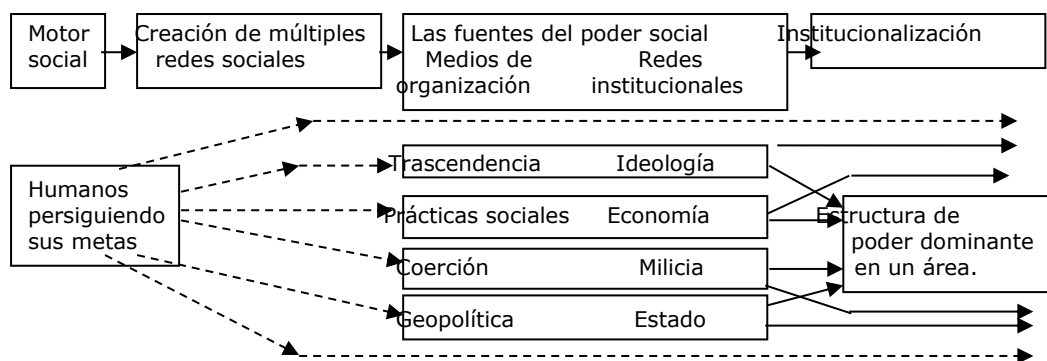
Aparentemente el primero en usar el término de *estructura social* fue Alexis de Tocqueville. Sin embargo, el primer estudio comprehensivo de las estructuras sociales se debe a Karl Marx que relacionó la vida política, religiosa y cultural con la estructura económica subyacente en la sociedad, un punto de vista que ha sido muy influyente a lo largo del siglo XX y hasta nuestros días. Posteriormente, Max Weber estudió con profundidad diversas estructuras sociales relacionadas con la economía, como los mercados, la división del trabajo, y prácticas sociales tales como la competencia y la solidaridad.

Para los estructuralistas, como Herbert Spencer y Émile Durkheim, las prácticas sociales y las instituciones tienen la función de asegurar la integración funcional de la sociedad, asimilando en la unidad de la institución las diversas partes y prácticas que la forman. Esta corriente desemboca en las teorías antropológicas del siglo XX, con Claude Lévi-Strauss como el más conocido exponente, con variadas perspectivas analíticas, como las de Talcott Parsons, Peter Blau y otros. Por ejemplo, Blau intentó basar su teoría de estructuras sociales en patrones numéricos asociados a las relaciones sociales, en algunos casos, analizando como el tamaño del grupo determina las relaciones sociales al interior del mismo.

De entre las teorías basadas en la emergencia espontánea de las estructuras sociales, probablemente la más influyente fue propuesta por Hayek (1967). Su teoría de evolución cultural establece el marco general para la aparición espontánea de 'orden'. En primer lugar, las estructuras sociales son la consecuencia no buscada de las acciones individuales. Estas estructuras pueden tomar variadas formas, debido a que no hay un diseño previo buscado. Finalmente, un proceso de selección de tipo evolutivo determina la prevalencia de ciertos tipos de organización: aquellos que benefician a más individuos o a los más poderosos. Entre otros factores selectivos, la competencia de los mercados, hace prevalecer a las formas más

eficientes de organización y producción, garantizando procesos sociales eficientes emanados de una maraña indefinida de intereses individuales.

De acuerdo a Mann (1986), las teorías de estructuras sociales intentan poner orden en la confusión (*mess*, en inglés) imperante entre las diversas organizaciones, instituciones y prácticas sociales. En su intento por dar coherencia a las organizaciones e instituciones, siguiendo las metodologías de Weber, Mann identifica la organización de las múltiples redes sociales formadas por los humanos por intereses diversos, alrededor de cuatro asuntos que son las fuentes del poder social: la ideología, la riqueza, la fuerza militar y el estado<sup>3</sup>. Las redes institucionales surgen así incluyendo partidos políticos, mercados, ejércitos y estados. Tomamos del libro de Mann el siguiente diagrama ilustrativo:



## El surgimiento de las estructuras sociales

Michael Mann en su libro *Las Fuentes del Poder Social* señala que, de acuerdo a las teorías marxistas y neo-weberianas, la *estratificación social está determinada por la creación y distribución de poder en la sociedad*. Así, las clases sociales representan la forma básica de organización social.

En nuestra percepción, las estructuras sociales se desarrollan de manera natural. Las necesidades de trabajo, administración, profesionales y militares, así como la aparición de conflictos de clase y políticos deben presionar para producir los nuevos

<sup>3</sup> Según Mann, identificar el uso de la fuerza con el Estado frecuentemente parece tener sentido en los estados modernos. Sin embargo hay varias razones para considerarlos conceptualmente distintos: históricamente los estados no han poseído el monopolio militar, como sucedía en la Europa feudal; grupos militares pueden realizar conquistas independientemente de sus estados, como sucedió durante la colonización europea de América; institucionalmente los militares se consideran separados del estado, como se manifiesta en la ocasión de *coup d'état*. Así visto, el estado es la organización emanada de la fuerza reguladora de la distribución territorial, de la geopolítica, mientras la milicia es la organización emanada de la fuerza física de coerción social.

cambios que transforman a la sociedad. Para Thomas Hobbes, el hombre como ser racional prefiere la sumisión al gobierno de un estado que vivir en anarquía, así, el hombre crea los estados para darse a sí mismo seguridad y orden público<sup>4</sup>. En nuestro argumento veremos que presiones ocasionadas por el tamaño y la estructura misma de la red social deben inducir cambios en las formas de gobierno para permitir la supervivencia de la red.

Los estudios antropológicos han mostrado que, por millones de años, los humanos vivieron como cazadores-recolectores en pequeñas comunidades no jerárquicas. La introducción de la agricultura trajo consigo cada vez mayores densidades poblacionales. Muchos autores explican como esto generó la creación de estados con leyes y gobiernos: el proceso de retroalimentación entre el incremento de población y el intercambio de información que implica prácticas innovadoras, lo que ha su vez redundado en mayor aprovechamiento del medio ambiente y mayor crecimiento demográfico. Así, hace 5,000 años aparecen las primeras ciudades-estado, que para el segundo milenio a.c. se habían desarrollado en áreas gobernadas, como Sumeria, el antiguo Egipto, la civilización del Valle del Indo y la civilización del Río Amarillo. Veamos como se puede representar esta evolución socio-cultural en el contexto de nuestros modelos de redes sociales.

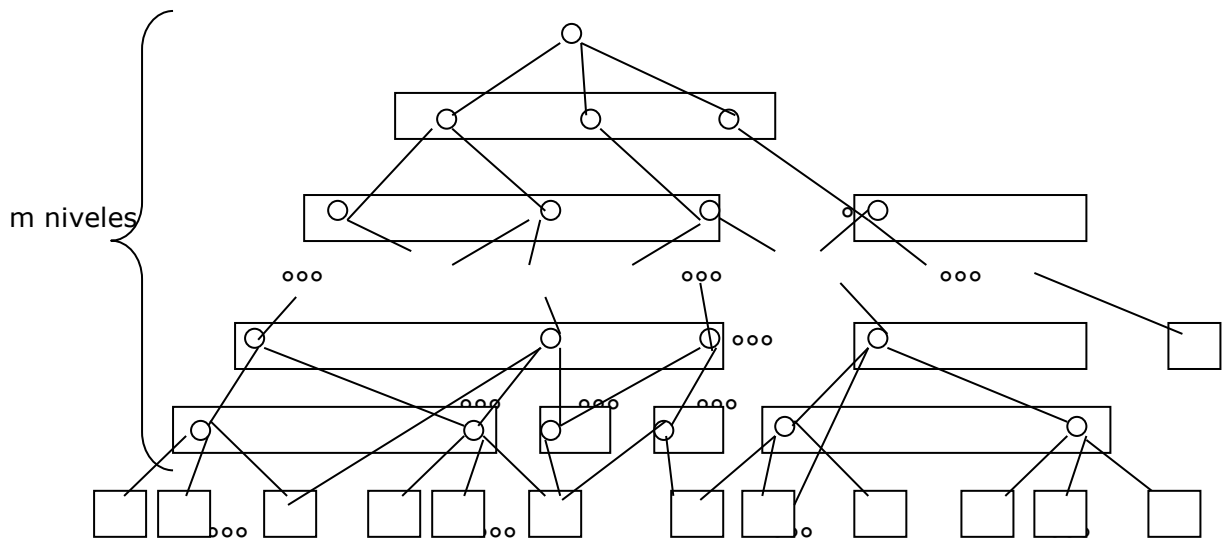
Sea  $S$  una red social con  $n=n(S)$  nodos y número de Dunbar  $D$ , esto, es, el número de vecinos  $c(x)$  de cada nodo  $x$  está acotado por arriba por  $D$ . Típicamente este número es a lo más 150, como hemos visto en el Capítulo 1.

Veamos que nos dicen estos parámetros al considerar la estructura de un gobierno en cada uno de los cuatro temas de poder antes descritos. La estructura de relaciones determina la matriz  $A=A(S)$  de la red y con ella su radio espectral  $r$  y el vector de Perron  $u$  que determina la estructura de poder, de acuerdo con el capítulo 3, y por tanto la jerarquía social, según el enunciado de Mann. Los diferentes niveles de gobierno están asociados estrechamente a esta jerarquía social, de manera que si el nivel de gobierno de  $x$  es más alto que el nivel de  $y$  entonces  $u_x > u_y$ .

Cada nodo está relacionado con cierto número de nodos en su nivel de gobierno y cierto número de nodos en otros niveles de gobierno. El siguiente modelo de distribución de los nodos en la estructura de gobierno es sobre-simplificador pero ilustra algunos principios generales.

---

<sup>4</sup> A grandes rasgos esta es la *Teoría del Contrato Social*.



Cada rectángulo contiene a lo más  $D/2$  nodos que están relacionados todos entre sí (aunque las relaciones dentro de cada rectángulo no están indicadas). El nodo en el primer nivel de gobierno, la punta de la pirámide de jerarquías que llamamos  $a_1$ , tiene  $c$  vecinos que forman el nivel 2 de gobierno. Cada uno de los nodos en el nivel 2, acepta cuando más  $D/2$  vecinos que constituyen el nivel 3 de gobierno. Así, el nivel 3 queda formado por cuando más  $cD/2$  nodos. Continuando de esta forma, en el nivel ascendente de niveles, llegamos al nivel  $m$  de gobierno constituido por  $c(D/2)^{m-2}$  nodos. Este nivel de servidores de gobierno debe atender a todos los individuos de la sociedad, luego  $n \leq c(D/2)^{m-1}$ . Calculando logaritmos de los dos lados, tenemos:

$$\text{Log}(n) \leq (m-1) \text{Log}(D/2) + \text{Log}(c).$$

Siendo  $a_1$  el mismo líder para cada uno de los cuatro temas del poder, tenemos que el número de vecinos de  $a_1$  es  $4c < D$ . Por tanto, podemos suponer que  $c < 40$ , de lo que se obtiene que si  $n=10^p$  entonces  $m > \frac{p-1.6}{1.87} + 1$ . Podemos tabular:

| $m$ | $p$ está en el intervalo $n <$ |
|-----|--------------------------------|
| 1   | $[0, 1)$ 40                    |
| 2   | $[1, 3.47)$ 3,000              |
| 3   | $[3.47, 5.34)$ 225,000         |
| 4   | $[5.34, 7.21)$ 16,000,000      |
| 5   | $[7.52, 9.08)$ 1,200,000,000   |

Esta tabla muestra que, en nuestro modelo, el *tamaño de la sociedad determina la complejidad de la estructura de gobierno*. De esta forma, si  $m=1$  la sociedad es simplemente un clan, como en el caso de una familia primitiva. Para  $m=2$  tenemos sociedades estructuradas alrededor de clanes, como las sociedades tribales estudiadas<sup>5</sup> en el capítulo 2. Para  $m=3$ , encontramos una sociedad de tipo feudal, donde un líder convoca a los caballeros de la corte (c de ellos) que a su vez controlan y protegen a pequeñas comunidades organizadas en forma de tribus. Este esquema, para una población mayor dentro de los límites establecidos, es también el modelo de ciudad-estado. Para  $m=4$  encontramos estados organizados con gobiernos de hasta  $4c \{(D/2)^2 + (D/2) + 1\} \sim 462,000$  individuos. Para  $m=5$  encontramos los estados modernos que en este modelo tienen gobiernos de tamaño a lo más de  $4c \{(D/2)^3 + (D/2)^2 + (D/2) + 1\} \sim \frac{8c}{D}(D/2)^4$ .

Para contrastar nuestros cálculos, comparamos con el número de habitantes de algunas ciudades-estado del postclásico mesoamericano, según Smith (2005):

| Ciudad       | Región           | No. de habitantes |
|--------------|------------------|-------------------|
| Tenochtitlan | Centro México    | 212,500           |
| Zacapu       | occidente México | 20,000            |
| Tzintzuntzan | Occidente México | 30,000            |
| Texcoco      | Centro México    | 24,100            |
| Mayapan      | Yucatán          | 21,000            |
| Yautepec     | Centro México    | 15,100            |

Para el modelo de estado moderno ( $m=5$ ) podemos ajustar  $D$  de manera que  $n = \frac{8c}{150} (D/2)^5$ . Si comparamos con el tamaño del gobierno  $g(S) = \frac{8c}{150} (D/2)^4 = \frac{2}{15} D^4$ , o aproximadamente,  $g(S) = 1.14 n^{\frac{4}{5}}$ .

Para contrastar con datos reales esta última predicción de nuestro modelo observemos que  $\text{Log}\left(\frac{g(S)}{n}\right) = -\frac{1}{5} \text{Log}(n) + \text{Log}(1.14)$ . En su estudio de las economías de Europa del Este antes y después de la 'caída del muro', Gehlbach (2008) observa que para las diferentes sociedades  $S_t$  ( $t=1982$  y  $1994$ ), se tiene  $\text{Log}\left(\frac{g(S_t)}{n}\right) = -s \text{Log}(n_t) + b_t$  para una pendiente  $0.18 \leq s \leq 0.2$  que es independiente del tiempo, mientras que  $b_t$  se incrementa con el tiempo. El acuerdo del modelo con las observaciones es excelente.

---

<sup>5</sup> Por supuesto, el modelo considerado en este momento alrededor de las diferentes formas de poder social no es el más indicado para estos casos simples de sociedades tribales.

## Referencias bibliográficas

- Cvetkovic, D., Doob, M. and Sachs, H. *Spectra of Graphs -- Theory and applications*. Academic Press (1980).
- Gantmacher, F.R. *The theory of matrices*. Vol II. Chelsea, New York (1974).
- R.I.M Dunbar, *Neocortex size as a constraint on group size in primates*, *Journal of Human Evolution* (1992), vol. 20, pp. 469-493.
- Merton, Robert (1957). *Social Theory and Social Structure*, revised and enlarged. London: The Free Press of Glencoe.
- Nolan, Patrick and Gerhard Lenski (2004). *Human Societies: An Introduction to Macrosociology*. Boulder, CO: Paradigm.
- Parsons, Talcott (1951) *The Social System*, Routledge, London.
- Chagnon, N. (1968): *Yanomamö: The Fierce People*, U. of Michigan.
- Abercrombie, N., S. Hill and B. S. Turner (2000), 'Social structure' in *The Penguin Dictionary of Sociology*, 4th edition, London: Penguin, pp. 326–327.
- Blau, P. M. (editor) (1975). *Approaches to the Study of Social Structure*, New York: The Free Press A Division of Macmillan Publishing Co., Inc.
- Burns, T. R. and H. Flam (1987) *The Shaping of Social Organization: Social Rule System Theory with Applications* London: Sage.
- Hayek, F.A. (1967). *Notes on the evolution of Systems of Rules of Conduct*. In *Studies of Philosophy, Politics and Economics*. University of Chicago Press.
- Knight, Jack (1992). *Institutions and Social Conflict*. Political Economy of Institutions and Decisions. Cambridge University Press.
- Gehlbach, Scott (2008) What Is a Big Bureaucracy? Reflections on *Rebuilding Leviathan and Runaway State-Building*. *Czech Sociological Review* Vol. 44, No. 6
- Jary, D. and J. Jary (editors). (1991). 'Social structure', in *The Harper Collins Dictionary of Sociology*, New York: Harper Collins.
- Mann, Michael (1986), *The Sources of Social Power*. Cambridge University Press.
- Hobbes, Thomas. (1651). *Leviathan*. C.B Macpherson (Editor). London: Penguin Books (1985)
- Kavka, Gregory S. (1986). *Hobbesian Moral and Political Theory*. Princeton: Princeton University Press.

Locke, John. *Two Treatises of Government and A Letter Concerning Toleration*. Yale University Press (2003).

Smelser, N. J. (1988). 'Social structure', in N. J. Smelser (editor), *The Handbook of Sociology*, London: Sage, pp. 103–209.

Smith, Michael (2005), City size in late postclassic Mesoamerica. *Journal of Urban History*, Vol. 31 No. 4, 403-434