REDES- Revista hispana para el análisis de redes sociales
Vol.24,#1, Junio 2013
http://revista-redes.rediris.es

Modelos matemáticos de la sociedad y aplicaciones. El individuo en el entorno social

Nelia Tello[1]

Escuela Nacional de Trabajo Social, Universidad Nacional Autónoma de México, México.

José Antonio de la Peña[2]

Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México y Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, México.

Resumen
Consideremos una red social *S* cuyos nodos son los individuos que están vinculados por medio de aristas que representan, según su peso, la intensidad de la relación. Centramos nuestra atención en la estructura local de la red, esto es, en la información asociada a los individuos como nodos de la red. Cuantificamos el número de vecinos c(x) de cada nodo x en *S* y su promedio c(*S*). La comparación de c(x) y c(*S*) pone de manifiesto el grado de integración de x a la red. Reportamos los estudios antropológicos que permiten definir el *número de Dunbar* D(S) como una cota superior c(x) ≤ *D(S)*, para toda x en *S*, y la estimación *D(S)* ≤ 150. Por otra parte la máxima distancia entre los nodos, el *diámetro d(S)*, satisface de forma que un reducido d(S) permite cubrir muchos elementos de la red rápidamente, explicando así, la eficiencia de la transmisión social de información.
Palabras clave*:* red social, vecinos, número de Dunbar, mundos pequeños.

Abstract
We consider a social network S whose nodes are the individuals who are linked by edges representing bonds of different weight. We devote our attention to the local structure of the network, that is, the information coming from the individual nodes of the network. We quantify the number of neighbors c(x) of a vertex x and its average c(S) along S. Comparing c(x) and C(S) yields an idea of the degree of integration of x with the society. From Dunbar's anthropological studies we get a number D(S) which bounds c(x) ≤ *D(S)* and D(S) ≤ 150. Moreover, if we introduce the diameter d(S) as the maximal distance between vertices in S, we get which explains the high efficiency of transmission of information in society.
Key words*:* social network, neighbors in a graph, Dunbar number, small worlds.

La idea del *individuo* es un constructo tan aceptado en el mundo moderno que se pierde de vista que la idea de un individuo aislado y con personalidad propia es, en realidad, un producto relativamente reciente del pensamiento filosófico y sociológico. La idea del 'valor moral del individuo' toma forma en el pensamiento renacentista, probablemente desde Petrarca, para de ahí permear a todas las humanidades. Reconociendo el papel fundamental del individuo, el 'contrato social' establece, según Rousseau, mecanismos de funcionamiento de las

[1]E-mail: neliatello@me.com
[2] E-mail: jap@matem.unam.mx

voluntades en un contexto social compartido, en beneficio finalmente de los individuos. Pasando por el liberalismo, el socialismo y otras formas de comprensión del mundo según la teoría social, económica o política, se reconoce siempre que los individuos se definen a partir del papel que juegan en su entorno social. Así, el individuo es producto de la sociedad y, al mismo tiempo, busca modificarla y, en ocasiones, jugar un papel diferente al que tiene asignado.

A pesar de que la psicología provee los fundamentos que definen la 'individualidad', también argumenta que la sociedad ha creado mecanismos para asegurar el control de las tendencias o instintos humanos individuales. En particular, Freud decía que la voluntad individual no opera fuera de la sociedad formada por la familia, pero aún dentro de la familia, se tienen mecanismos fuertes de control, tales como la prohibición de incesto.

El punto de vista moderno, pone al individuo en un contexto de intercambio con otros individuos, siendo estos procesos los vínculos formales entre ellos. En una sociedad de individuos libres, el acto de intercambio es un proceso mecánico, el más simple de los cuales es el mecanismo de intercambio que afecta a una transferencia impersonal de mercancías y la evaluación de su valor. Desde este punto de vista, la sociedad es un sistema económico de mercado en que los intercambios son trueques interpersonales donde cada persona decide, en respuesta a las condiciones que tiene en cada momento, la acción que realiza.

En este capítulo, como a lo largo de la serie, nos centraremos en observar y estudiar la red de relaciones entre los individuos. El carácter de estas relaciones es indiferente para nosotros, así como las motivaciones y significados de estos intercambios para los individuos.

Recordamos que para nosotros, una red social *S* es una estructura de relaciones sociales que se puede representar en forma de gráfica en las cual los nodos representan a los individuos y las aristas, relaciones entre ellos. Nada más, nada menos, por lo pronto.

Así entendido, los individuos en nuestro modelo de red social se representan como puntos o *nodos* de la red. No juegan ningún papel el sexo, la edad, las condiciones económicas, ni problemas psicológicos. Una arista entre dos nodos significa que existe una *relación social* (o afectiva) entre los individuos que representan los nodos. En la red social S, las aristas pueden tener diferentes *pesos*, esto es un número entero asociado, que intuitivamente manifiesta la fuerza del lazo afectivo. Así, se pueden tener pesos 1, 2 o 3, de acuerdo con la siguiente convención:

i -^{n}- j indica una relación de peso *n* entre los elementos i y j, de manera que:

n=1 indica que i y j se conocen. En este caso escribimos i – j.

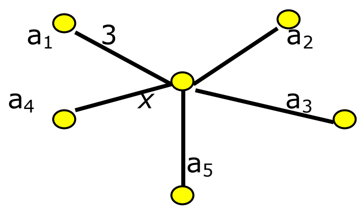
n=2 indica que i y j son amigos, trabajan juntos;

n=3 indica que i y j están estrechamente relacionados, puede tratarse de familiares cercanos, pareja, "hermanos" en sentido literal o figurado.

El peso de la arista i -- j se escribe w_{ij} , de manera que la *matriz de la red* A(S)= (w_{ij}) contiene toda la información de la red. Recordemos que la matriz de adyacencia $\underline{A}$(S) =(a_{ij}), donde a_{ij} =1 si existe la arista i — j, independientemente de su peso, y a_{ij} =0 si no existe.

¿Qué podemos decir del individuo en la red social?

Consideremos una **red social** *S*, esto es, una gráfica. Elijamos un individuo *x* arbitrario y observemos su entorno. Veremos algo así:



Diremos que los nodos directamente conectados con x son sus *vecinos* y llamamos c(x) al número de ellos. Por w(x) denotamos la suma total de los pesos de las aristas que conectan x con sus vecinos. En el ejemplo anterior, los nodos a_1,…, a_5 son los vecinos de x, todas las aristas tienen peso 1 con excepción de x—a_1 que tiene peso 3. Tenemos c(x) =5 y w(x)= 7.

El comportamiento promedio de los individuos en la sociedad es, sin duda, la referencia obligada. El promedio del número de vecinos c(S) y el promedio de los pesos w(S) se definen de la manera usual:

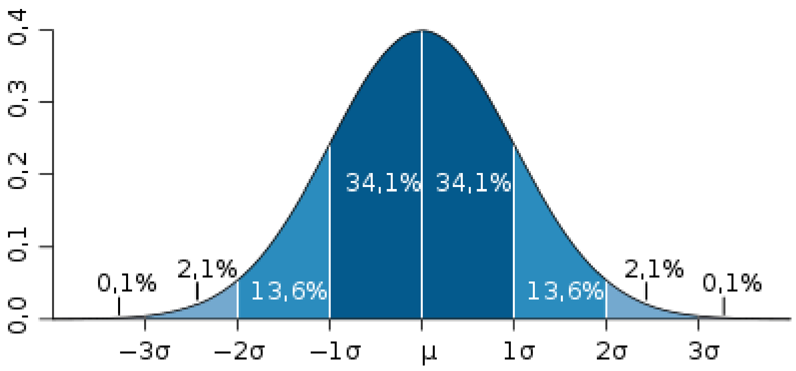
$$c(S)= \frac{1}{n} \left(\sum_{x \epsilon S} c(x) \right) \quad \text{y} \quad w(S)= \frac{1}{n} \left(\sum_{x \epsilon S} w(x) \right),$$

donde n=n(S) es el número total de individuos en la red S.

Un individuo x en la red S se dice *bien integrado* si c(x) ≥ c(S) y también w(x) ≥ w(S), esto es, cuando x se relaciona al menos con tantos individuos como el promedio de la sociedad y al menos con la misma intensidad. Diremos que x está *poco integrado* si c(x) < c(S) y también w(x) < w(S).

La distribución estadística de c(x).

En la gráfica S de una red social no todos los nodos tienen, necesariamente, el mismo valor del número de vecinos c(x). Si el número de nodos n(S) es grande, posiblemente, la función c(x) sea una *distribución normal*, esto es, la gráfica de la función c(x) tenga la forma de una *campana de Gauss*.



Llamamos μ=c(S) al valor medio de {c(x): x ϵ S} y σ= $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_x (c(x)-\mu)^2}$ a la desviación estándar de la función. Los valores c(x) se distribuyen simétricamente por arriba y debajo del valor medio. A distancia σ de μ se encuentran aproximadamente el 68% de los valores c(x), mientras que a distancia 2σ se encuentra el 95%.

El número de vecinos c(x) de individuos en una red social no puede ser arbitrariamente grande, como lo muestran la *primatología* y la antropología.

Los primatólogos, estudiando los simios humanoides, notaron que, dada su naturaleza altamente social, estos mantienen un contacto individual cercano con ciertos miembros de su grupo social. Los individuos de este grupo, llamado *clan*, se relacionan estrechamente todos entre sí. La observación fundamental es que, el número máximo de miembros de un clan, en cada especie es, esencialmente, constante y parece estar limitado por el volumen de la neo-corteza cerebral. En 1992, Dunbar usó la correlación observada en primates no humanos para predecir el tamaño máximo de clanes humanos. Dunbar predijo un clan de un tamaño máximo aproximado de 150 individuos, lo que ha sido corroborado por algunas observaciones antropológicas. Por ejemplo, las unidades militares, donde la vida de cada hombre depende de los demás miembros de la unidad, han tenido desde tiempos de los romanos un tamaño aproximado de 150 individuos. Otras 'aplicaciones' antropológicas del número de Dunbar se han popularizado a través del libro *The Tipping Point*.

Así, dada una red social, hay un número máximo D(S) que acota por arriba a los números c(x), con x en S. Llamaremos *número de Dunbar* de la red a esta constante D(S), que será siempre a lo más 150. La existencia a priori de esta cota tiene muchas implicaciones para la estructura de la red S y los grupos que ahí se forman, como veremos posteriormente. Por lo pronto observemos que

$$c(S) \leq D(S),$$

además si se da la igualdad c(S)=D(S) quiere decir que todos los individuos x en S tienen c(x)= D(S). Las redes S donde c(x) es una constante se llaman *regulares*.

Otra pregunta importante es ¿cuántos pasos se requieren, en promedio, para llegar de un individuo de la red a otro, usando cadenas de conocidos? Es una manera de preguntarse qué tan separados podemos estar en la red social de otros individuos y por ende qué tan rápido puede propagarse información en la red.

Hace unos años, Milgram llevó a cabo un experimento social que ahora es muy conocido: le pido a alguien que le haga llegar un sobre a otra persona a la que no conoce y de la sólo le doy el nombre, ni siquiera le digo en qué país vive ni qué idioma habla. El sobre debe de ser entregado en mano, de persona en persona, según creamos que hay más posibilidades de que, quien lo recibe, conozca al destinatario. La sorpresa es que los sobres llegan a buen destino, por lo general, ¡en menos de 7 pasos!

Los matemáticos tienen otra experiencia similar: se define el *número de Erdös* de un matemático x, como el número de coautores de artículos matemáticos que se requieren para llegar a Erdös. La motivación en definir este número se debe a que Paul Erdös fue no sólo el matemático más prolífico del siglo XX, sino sus artículos fueron en colaboración con gran número de coautores.

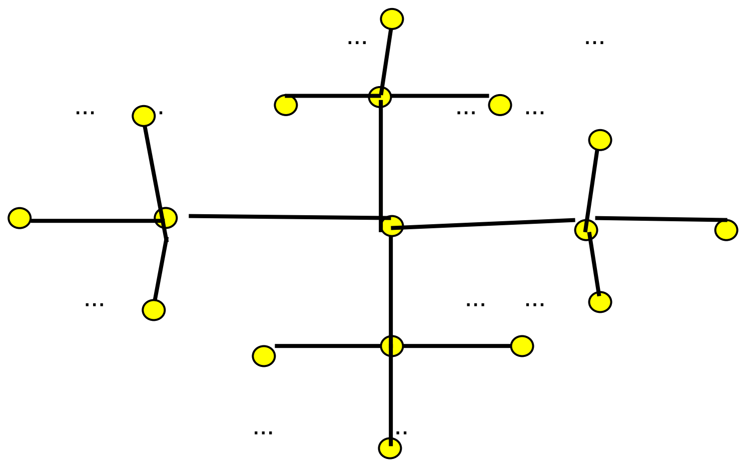
Así, el autor matemático de este artículo tiene un trabajo con Eisenbud, que tiene un trabajo con Diakonis, que tiene un trabajo con Erdös, lo que da un número de Erdös para de la Peña igual a 3. Lo sorprendente es que el promedio de los números de Erdös entre todos los matemáticos es de apenas 4.65. Veamos que en realidad, este fenómeno, conocido como de *mundos pequeños*, no tiene mucho de sorprendente si pensamos el problema matemáticamente.

Decimos que la red S tiene un diámetro d(S) si ese es el número máximo de pasos que se requiere para llegar a través de conocidos de un individuo a otro de la red. Los experimentos sociales arriba mencionados muestran que el diámetro de las redes sociales es relativamente pequeño. En efecto, en la red social ordinaria S, la experiencia de los sobres muestra que d(S) no debe ser mucho mayor que 7 (en realidad, la distancia entre nodos en la red tiene una distribución normal donde la media es cercana a 7). En la red de matemáticos S', donde la adyacencia se define como coautoría, se tiene d(S') $\leq$ 26, ya que el máximo número de Erdös conocido es de 13. Un sencillo razonamiento matemático muestra que el número de Dunbar D(S) de una red S y su diámetro están relacionados, de manera que para diámetros pequeños se requieren números de Dunbar más grandes. En particular, una sociedad S con número de Dunbar D(S)=150 y diámetro d(S)=10 puede tener más habitantes que toda la tierra.

Esto nos explica porqué la información y los *chismes* se transmiten con tanta rapidez. Si cada persona transmite la información a sus vecinos en la red en un tiempo T, una noticia que surge de una sola fuente y se transmite eficientemente por la red tardará un tiempo $d(S)^T$ para propagarse por toda la red. Siendo el diámetro d(S) un número pequeño, se tiene el rápido efecto del chisme.

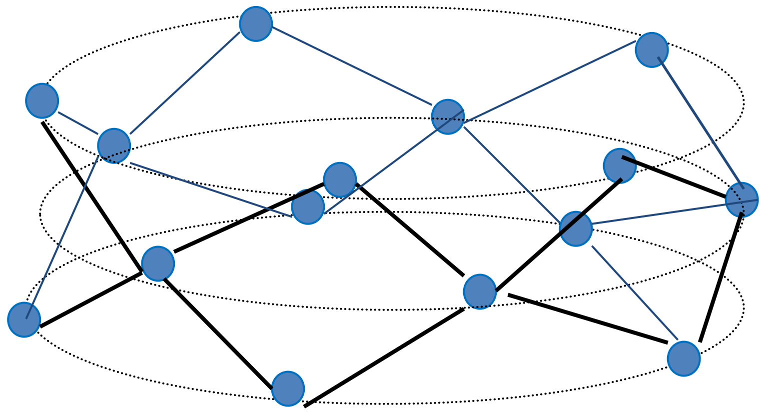
Hacemos una digresión final: para que una noticia pueda transmitirse en una red social se requiere que sea comprendida e interesante para la mayoría de los nodos de la red. Por ello, la información de los chimes es generalmente de carácter político, pues las comunidades comparten dirigentes, o bien referente a *cultura popular*, eso es, a la vida privada de artistas de cine y otras gentes famosas. Para algunos sociólogos este es el papel de la cultura popular, proveer de materia prima a las redes de comunicación social que de esa manera crean un sentido de identidad y comunidad en la población.

La relación entre un parámetro de *carácter local*, como D(S), y un parámetro de *carácter global*, como d(S), muestra que la 'estructura fina' se refleja en propiedades globales de la red. A lo largo de los próximos capítulos encontraremos ejemplos de esta naturaleza.



Ejemplo. Una sociedad S con n(S) individuos donde cada individuo tiene 4 vecinos, tiene D(S)=4. En la gráfica del ejemplo de arriba, cuando el diámetro es d(S)=4 hay n(S)=13=4x3+1 < 16 = 4^2 individuos; cuando el diámetro es 6, hay n(S)=49=(D(S)-1)$D(S)^{d(S)/2\ -1}$ + 1 < 64 = 4^3 individuos.

En el ejemplo de abajo, la red forma un cilindro con D(S)=4 y diámetro d(S)= 5. La cuenta de individuos es, claramente, n(S)=15.



Caminos en una gráfica.

Dada una gráfica G con matriz de adyacencia A(G)=(a_{xy}) de tamaño n x n, el número de vecinos c(x)= $\sum_y a_{xy}$ de x es la suma total del renglón x, de manera que el promedio del número de vecinos es

$$c(S)=\frac{1}{n}\sum_{x,y=1}^{n} a_{xy}.$$

Llamamos $a_{xy}^{(k)}$ al número de caminos de longitud k que van de x a y. Observemos que se obtienen de la siguiente manera:

$$a_{xy}^{(k+1)}=\sum_z \ a_{xz}^{(k)}\, a_{zy}.$$

Finalmente, las potencias de A(G) son precisamente $A(G)^k=(a_{xy}^{(k)})$.

Recordemos que el *número de Dunbar* de G es *D(G)= max* { c(x): 1 ≤ x ≤n}. Mostraremos por inducción sobre k que:

$$max\ \{ a_{xy}^{(2k)}: 1 \le x, y \ \le n\} \le D(G)^k.$$

En efecto, para k=1, $a_{xy}^{(2)} = \sum_z \ a_{xz}\, a_{zy} \le \sum_z \ a_{xz} \le c(x) \le D(G)$. Supongamos el resultado cierto para k, entonces calculamos para k+1:

$$a_{xy}^{(2k+2)} = \sum_z \ a_{xz}^{(2k)}\, a_{zy}^{(2)}. \le \ D(G)^k c(y) \le D(G)^{k+1}.$$

En particular, si *d(G)* es el diámetro de G, supongamos que *d(G)=2d* (si es non tomamos *d(G)+1*), para algún número entero *d*. Luego $a_{xy}^{(d(G))} > 0$, para cualesquiera nodos *x,y* y así,

$$n^2 \le \sum_{x,y=1}^{n} a_{xy}^{(d(G))} \le n\, D(G)^d \text{ o bien, } n \le D(G)^{d(G)/2}.$$

Referencias bibliográficas

Cvetkovic, D., Doob, M. and Sachs, H. (1980) *Spectra of Graphs -- Theory and applications*. Academic Press.

Dunbar; R.I.M. (1992), *Neocortex size as a constraint on group size in primates*, Journal of Human Evolution, vol. 20, pp. 469-493.

Gantmacher, F.R. (1974) *The theory of matrices*.Vol II. Chelsea, New York.

Gladwell, Malcolm (2000). *The Tipping Point - How Little Things Make a Big Difference. Little, Brown and Company.*

Lin, N., Dayton, P., & Greenwald, P. (1978). *The urban communication network and social stratification: A "small world experiment."* In B. D. Ruben (Ed.), Communication yearbook : Volume 1 (pp. 107-119) . New Brunswick: Transaction Books.

Lundberg, C. C. (1975). *Patterns of acquaintanceship in society and complex organization: A comparative study of the small world problem*. Pacific Sociological Review 18, 206-222.

Milgram, S. (1967). *The small-world problem*. Psychology Today 1, 61-67.

Travers, J., & Milgram, S. (1969). *An experimental study of the small world problem*. Sociometry 32, 425-443.

Watts, D. J. & Strogatz, S. H. (1998). *Collective dynamics of 'small-world' networks*. Nature 393, 440-442.