

## **Modelos matemáticos de la sociedad y aplicaciones. Introducción.**

*Nelia Tello<sup>1</sup>*

*Escuela Nacional de Trabajo Social, Universidad Nacional Autónoma de México,  
México.*

*José Antonio de la Peña<sup>2</sup>*

*Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México y Consejo  
Nacional de Ciencia y Tecnología, México.*

### **Resumen**

La finalidad de esta serie de artículos es contribuir en la articulación urgente de dos áreas en intenso desarrollo pero con relativamente poco contacto entre sí, a pesar de que trabajan con problemas y fines comunes: por una parte el análisis de las redes sociales desde el punto de vista sociológico y antropológico, y por otro lado el análisis matemático de las redes sociales y la construcción de modelos. En esta serie de artículos intentamos desarrollar simultáneamente las dos direcciones en temas importantes, sin profundizar en ninguna de las dos direcciones pero sin trivializarlas. Para ello, avanzamos en la discusión de una serie de conceptos sociológicos y antropológicos (el individuo en sociedad, la formación de grupos, los líderes sociales, la formación de estructuras de gobierno, los conceptos de colaboración y conflicto social) construyendo, con base a los principios básicos de carácter social que revisamos, modelos matemáticos de ellos. Modelos que nos permiten hacer predicciones simples de la sociedad y su comportamiento.

**Palabras clave:** red social, relaciones, matriz de la gráfica, modelo matemático.

### **Abstract**

The purpose of this series of articles is to contribute to articulate two dynamic research areas, which despite sharing problems and scope, frequently ignore each other: on one side the social and anthropological analysis of networks, on the other side, the mathematical analysis of social networks and the construction of models. In this series of articles we propose important topics and discuss simultaneously the social and mathematical aspects with the purpose to develop simple models of social networks which yield predictions of different aspects of the social behavior. The topics that we consider are, among others, the individual as part of a social network, the integration of groups, leadership, the merging of social organizations, the growth of social networks and finally, two important aspects of human behavior in society, namely, collaboration and conflict.

**Key words:** social network, matrix of a graph, mathematical model.

---

<sup>1</sup>E-mail: [neliatello@me.com](mailto:neliatello@me.com)

<sup>2</sup> E-mail: [jap@matem.unam.mx](mailto:jap@matem.unam.mx)

## **Presentación de la serie**

*El individuo en sociedad* es un tema que ha sido discutido por filósofos, sociólogos, economistas y místicos por siglos. Los líderes religiosos, políticos y sociales han tratado de comprender el concepto para mejor influenciar a individuos y comunidades. Desde el siglo pasado, se han intentado desarrollar modelos sociológicos, biológicos, psicológicos y políticos del comportamiento del individuo en sociedad y de la sociedad como un todo con base a principios de base evolutiva o conductista. Asimismo se desarrollan y emplean modelos de intervención para ayudar el desarrollo humano dentro del, cada vez más complejo, entorno social. Estos modelos de intervención, según su enfoque y finalidad, han sido desarrollados por economistas, médicos, trabajadores sociales. En los últimos años, con el advenimiento del almacenamiento masivo de información y las capacidades de cómputo, matemáticos y físicos tratan de entender la conformación estructural y funcionamiento de las redes sociales.

La filosofía nos ha dado puntos de vista divergentes del papel que la naturaleza asigna al individuo como parte de la sociedad. Para Aristóteles, la sociedad precede en la naturaleza al individuo. Alguien que no puede llevar a cabo una vida social, o que es autosuficiente o no la necesita, es una bestia o un Dios. En el otro extremo, para Hobbes, el individuo tiene dificultades intrínsecas en su entorno social, así dice que "es manifiesto que durante el tiempo que los hombres viven sin una fuerza que los mantiene controlados, viven en condición de guerra: todo hombre contra todo hombre".

El siglo XIX trajo una comprensión más científica del entorno social de los seres vivos. Así, las observaciones de Kropotkin acerca del comportamiento gregario de hormigas y abejas fue recibido con entusiasmo. Por su parte, Darwin tuvo algunos problemas para comprender como el comportamiento altruista en la sociedad es compatible con las nociones básicas de la teoría de la evolución. Finalmente, Wallace, competidor y amigo de Darwin, expresaría que: "la idea popular de la lucha en el mundo animal por la supervivencia está muy alejada de la realidad. En la vida social de los animales hay gozo y un mínimo de sufrimiento".

El enfoque de estudio de la sociedad a través de las redes sociales, como constructos matemáticos susceptibles de análisis, data de tiempo atrás, al menos de 1940. En 1973 el sociólogo Mark Granovetter discutió redes sociales con enlaces de diferente intensidad entre individuos, tal como haremos nosotros. En 1979 el matemático Linton Freeman discutió el concepto de centralidad en una red social,

diferenciando el papel que juega el número de vecinos en una red social contra la posición global en la red, discusión que retomaremos en capítulos posteriores. Sin embargo, sólo en los últimos años se han desarrollado modelos que trascienden las analogías para convertirse en modelos de simulación (tal vez, todavía rústica) de la realidad.

El crecimiento de las capacidades informáticas a nivel global permite no sólo el conocimiento e intercambio de grandes cantidades de datos, sino el análisis de ellos por medio de programas de índole estadístico y matemático. Probablemente los avances más profundos se han logrado desde el advenimiento de la Red de Redes y el estudio analítico del crecimiento de ella. En años recientes, el estudio de redes complejas que se aproximan al mundo real han tenido importantes contribuidores, como Albert Barabási, quién junto a otros físicos, matemáticos e informáticos, como Steven Strogatz, Mark Newman o Duncan J. Watts, ha introducido el concepto de redes libres de escala, así como nociones importantes del crecimiento de las redes y el enlazamiento preferencial de nuevos individuos, modelos en los cuáles, por ejemplo, los individuos recién llegados a la red preferirán enlazarse a otros individuos que poseen el mayor número de conexiones.

A lo largo de esta serie de artículos iremos estableciendo un significado preciso para una lista de conceptos 'sociales' para poder representarlos como elementos de nuestro modelo y, finalmente, matematizarlos. Esta es la única manera de proceder para poder hacer uso de información numérica acerca de los fenómenos observados y, más importante aún, estar en condiciones de hacer predicciones específicas. Por supuesto, las predicciones deben entenderse como una 'prueba de fuego' para el modelo que responderá correctamente o no, mostrando así su pertinencia o futilidad.

En los siguientes capítulos desarrollaremos herramientas matemáticas, casi siempre de álgebra lineal o estadística elemental, de forma que los conocimientos especializados requeridos no sean avanzados. El formalismo matemático requerido será enmarcado en rojo para 'marcar' la zona peligrosa. No se darán demostraciones de resultados conocidos, pero se indicará como derivar algunas de las aplicaciones. Esto nos permitirá hacer análisis que podemos fácilmente formalizar. Las aplicaciones se desarrollarán de forma coloquial, de forma que el texto no requiera de conocimientos matemáticos para entenderse en toda su potencialidad.

Finalmente, unas palabras acerca de la originalidad de la presentación y el contenido de los capítulos. El planteamiento y estructura de la serie fue creciendo a lo largo de una discusión entre el punto de vista social y el matemático (debido a la formación particular de los autores). Por supuesto, debemos argumentos (en los dos lados de la moneda) a muchas fuentes, de las cuales citamos algunas como referencias generales. Los modelos matemáticos presentados están, en general, basados en la teoría espectral de redes, que procura determinar la estructura de la red a partir del conocimiento de los valores y vectores propios de matrices asociadas a la red. En ese sentido, los modelos no son inesperados, pero los detalles específicos son originales y darán lugar a publicaciones más especializadas.

### ¿Qué es una red social?

En nuestro modelo, los *individuos* no poseen 'características personales' a priori: edad, género, características económicas, psicológicas o de otra índole. Lo que nos interesa primordialmente son sus lazos sociales con otros individuos. El objeto de trabajo será precisamente comprender la estructura y características de esa *red de relaciones*. Por lo tanto, el tipo de problemas que consideramos son del tipo: ¿qué información obtenemos sobre los individuos si conocemos las características de la red social? ¿podemos entender los problemas de los individuos o los grupos por medio de características estructurales de la red?

Los individuos en nuestro modelo estarán representados por puntos o *nodos* de la red, el objeto geométrico más simple de todos. En esta serie de artículos, una **red social**  $S$  es una estructura de relaciones sociales que se puede representar en forma de gráfica en la cual los nodos representan elementos de la red (los individuos) y las aristas relaciones entre ellos. Las aristas pueden tener diferentes *pesos* dependiendo de la "fuerza" o profundidad del lazo afectivo de la relación entre los elementos correspondientes a los extremos de la arista. Estos lazos de diferente intensidad definirán pesos de las aristas de la gráfica. Así, se pueden tener pesos 1, 2 o 3, de acuerdo con la siguiente convención:

$i -^n - j$  indica una relación de peso  $n$  entre los elementos  $i$  y  $j$ , de manera que:

$n=1$  indica que  $i$  y  $j$  se conocen bien. En este caso escribimos  $i - j$ .

$n=2$  indica que  $i$  y  $j$  comparten partes relevantes de su vida, por ejemplo, son amigos o trabajan juntos;

$n=3$  indica que  $i$  y  $j$  están estrechamente relacionados, puede tratarse de familiares cercanos, pareja, "hermanos" en sentido literal o figurado.

Como podemos observar, los simples "conocidos de vista", o "seguidores de twitter" no los consideraremos relacionados en nuestras redes sociales. Pronto veremos la importancia de considerar redes sociales cuyos lazos de relación son profundos, o al menos, no superficiales. Intuitivamente esta diferencia convierte a nuestras redes en "humanas" en contraste con redes de carácter "informático".

Por supuesto, una pregunta válida sería ¿quién determina la intensidad de los lazos de relación entre individuos? En realidad, la definición de *intensidad* de los lazos es ambigua, pero ha sido estudiada al menos desde los años 1980, ver por ejemplo el trabajo de Krackhardt y Stern (1988). Como en otras cuestiones tomaremos un punto de vista práctico suponiendo como dadas las redes con sus debidas "intensidades". En realidad, muchas de las discusiones considerarán sólo *redes simples*, esto es, con intensidad 1 en todas las relaciones.

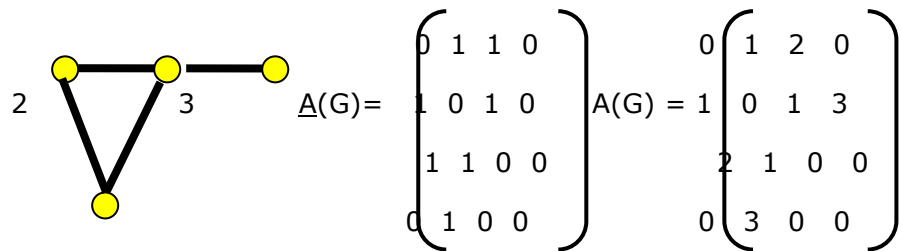
Consideremos una **red social**, eso es, una gráfica. Las componentes conexas de la gráfica son los grupos de individuos que pueden conectarse por relaciones entre otros individuos.

Las matemáticas nos dan herramientas para trabajar con la información contenida en las gráficas y obtener nueva información que no es evidente o que no puede leerse a simple vista de los dibujos gráficos. Nos referimos a la **teoría de matrices**, un área fundamental de las matemáticas.

### Matriz de incidencia de una gráfica pesada y valores propios.

Dada una gráfica  $G$  con vértices  $\{1,2,\dots,n\}$  y las aristas  $i-j$  con peso  $w_{ij}$ . Escribimos  $a_{ij} = 1$  o  $a_{ij} = 0$  para indicar que hay o no arista entre  $i$  y  $j$ . El peso  $w_{ij}=1$  no es necesario escribirlo explícitamente, los pesos mayores que 1 se señalarán en cada arista de la gráfica. La **matriz de incidencia**  $\underline{A}(G)=(a_{ij})$  y la **matriz de la red**  $A(G)=(w_{ij})$  son arreglos numérico de tamaño  $n \times n$ .

Por ejemplo, para la gráfica  $G$  con 4 nodos, tenemos:



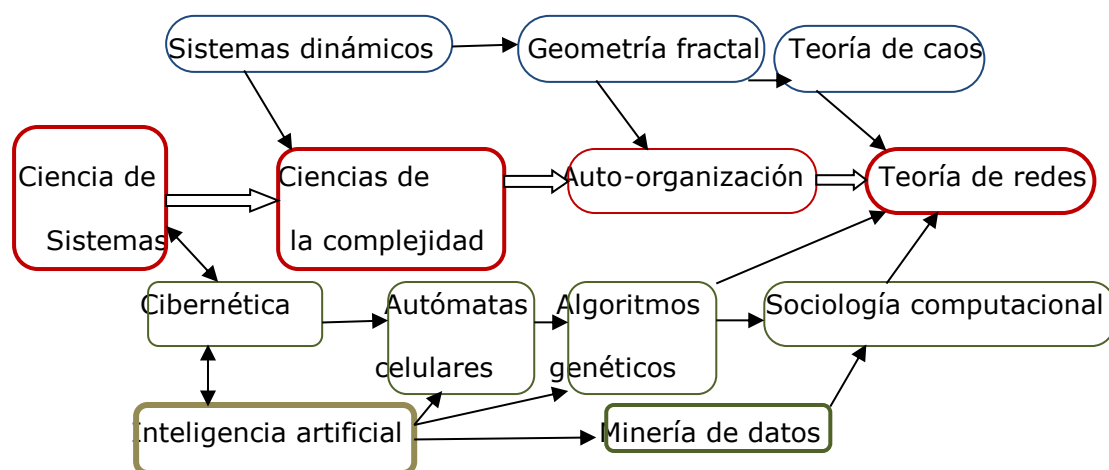
La gráfica  $G$  y sus correspondientes matrices  $\underline{A}(G)$  y  $A(G)$  son objetos matemáticos que tienen la información de  $G$  pero que pueden ser estudiados con herramientas diferentes. Mientras la gráfica  $G$  es un objeto *combinatorio*, en el que podemos contar nodos y aristas, la matriz  $A(G)$  es un objeto *algebraico* con la que podemos calcular valores y vectores propios que nos darán información adicional acerca de la estructura de la gráfica  $G$ .

### El plan de la serie.

Las *discusiones introductorias* de los diferentes temas en los artículos las haremos tomando como base literatura de divulgación y especializada en diferentes áreas de conocimiento, tanto sociología, economía, ciencias políticas y antropología, aún encontremos argumentos relacionados a psicología y filosofía. *Advertimos* que no pretendemos que en forma alguna estas discusiones sean exhaustivas o profundas, ni pretendemos que se entiendan, necesariamente, como parte de un marco conceptual general. Deben entenderse como elementos informativos que ilustran las nociones que intentamos desarrollar y luego modelar.

En todo caso, la *teoría moderna de redes en sociología* es heredera de la teoría de sistemas de la escuela estructuralista-funcionalista fundada por Herbert Spencer y luego desarrollada por Durkheim, Pareto, Parsons, Merton y Luhman entre otros y recibe la influencia de numerosas disciplinas como la antropología, la biología, la

cibernética y las matemáticas, estas últimas a través de los sistemas dinámicos, la teoría de caos y la computación que dan origen en los años 90's del siglo pasado a las llamadas ciencias de la complejidad.



Un mapa de algunas de las influencias interdisciplinarias que llevan al enfoque matemático de la teoría de redes en ciencias sociales.

En los primeros capítulos de la serie desarrollaremos algunos conceptos fundamentales desde el punto de vista sociológico y la interpretación matemática correspondiente, generalmente con el uso de algún concepto importante proveniente de la teoría algebraica de gráficas. Así, en el capítulo 1 de la serie hablaremos del *individuo*, esto es, de la estructura local de la red social, que se reduce a conocer el número de vecinos de cada nodo. Sorprendentemente, el número de vecinos de un nodo (=individuo) en la red está asociado a la capacidad cognitiva de la especie humana y por ello se puede establecer el llamado *número de Dunbar*. Es aquí donde juega un papel fundamental el hecho de que las relaciones que consideramos no son meros encuentros casuales, sino verdaderas relaciones que implican un conocimiento entre los individuos. Veremos como estas propiedades locales de la red social se reflejan en propiedades estructurales globales, como la capacidad que tiene la red de transmitir información internamente, lo que explica, al menos en parte, la eficiencia en la comunicación de *chismes*.

El capítulo 2 estará dedicado a discutir el concepto de *grupo social*, como unidad homogénea de individuos relacionados. Estas unidades, constituyentes esenciales de la sociedad reciben nombres tales como *clanes, tribus, familias extendidas, pandillas* y otros y tienen una estructura gráfica particular. La complejidad de la

estructura de estos clanes permite entender tanto su tamaño limitado y su estabilidad, como la dificultad de un individuo externo en ser aceptado como miembro del clan.

Asimismo, la estructura de las redes sociales explica la existencia de individuos destacados, los *líderes sociales*, que no son otros que 'nodos' que ocupan un 'lugar preferencial' en la red de relaciones sociales. El modelo matemático correspondiente, que jerarquiza a los nodos de acuerdo al valor de las coordenadas del vector propio de *Perron*, será desarrollado en el capítulo 3. En particular, en una tribu, donde cada individuo pertenece exactamente a un clan, los líderes son aquellos individuos con más contactos fuera de su clan. Al crecer una red social, la estructura primitiva de tribu no es más posible. Por ello, una sociedad con un número relativamente pequeño de individuos tiene que desarrollar *organizaciones superiores* y eventualmente *formas de gobierno*, análisis que será el objeto del capítulo 4.

El análisis de las *leyes de crecimiento de una red* es pieza fundamental de la comprensión del desarrollo de la sociedad y en general, en el desarrollo de la red, del tipo que sea. En el capítulo 5 comparamos los modelos de crecimiento al azar (*random networks*), que comienzan en los trabajos pioneros de Erdős y Ranyi y desembocan en los artículos recientes de Barabási y Watts y que se aplican de manera eficiente al estudio de las redes informáticas (las, tal vez, mal llamadas redes sociales de la Web y el Twitter), con modelos de crecimiento de redes humanas donde el número de Dunbar vuelve a jugar un papel relevante. El punto fundamental es que las redes humanas no crecen al azar, lo hacen selectivamente de acuerdo a reglas de fortalecimiento y conservación de los lazos sociales como mecanismo de supervivencia personal. Desarrollamos aquí el modelo de formación de *tríadas* como recurso estructural para la conformación de clanes en la red social, lo que finalmente determina la estabilidad y permanencia de los lazos sociales.

En el capítulo final de la serie revisaremos algunas de las características estructurales de una red social que determinan dos de las principales actitudes de interacción social: la colaboración y el conflicto social. A grandes rasgos, la colaboración está determinada por la necesidad de los individuos de lograr mayor estabilidad social, estructuralmente diríamos que un individuo colabora con otros con el fin de pertenecer a regiones de la red que son más "fuertes", concepto que habremos de formalizar. Por otra parte, la existencia de regiones de la red social



aisladas de las componentes principales, sin estabilidad, produce situaciones conflictivas tanto a nivel de los individuos como de la sociedad.

### **Referencias generales de la serie**

Barabási, Albert-László (2002), *Linked: How Everything Is Connected to Everything Else and What it Means for Business, Science, and Everyday Life*.

Barabási, Albert-László and Réka Albert (1999), *Emergence of scaling in random networks*. *Science*, 286:509-512, October 15.

Barabási, Albert-László, Mark Newman and Duncan J. Watts (2006), *The Structure and Dynamics of Networks*.

Cvetkovic, D., Doob, M. and Sachs, H. (1980). *Spectra of Graphs -- Theory and applications*. Academic Press.

Freeman, Linton (2006), *The Development of Social Network Analysis*. Vancouver: Empirical Press.

Gantmacher, F.R. (1974). *The theory of matrices*. Vol II. Chelsea, New York.

Hoult, Thomas Ford (1969). *Dictionary of Modern Sociology*.

Krackhardt, David and Stern, Robert (1988). *Informal networks and organizational crises: an experimental simulation*. *Social Psychology Quarterly*. Vol 51, 123-140.

Lenski, Gerhard (1966). *Power and Privilege: A Theory of Social Stratification*. New York: McGraw-Hill.

Lenski, Gerhard (2005). *Evolutionary-Ecological Theory*. Boulder, CO: Paradigm.

Lin, N., Dayton, P., & Greenwald, P. (1978). *The urban communication network and social stratification: A "small world experiment."* In B. D. Ruben *Communication yearbook : Volume 1* (pp. 107-119) . New Brunswick: Transaction Books.

Maryanski, Alexandra (1998). *Evolutionary Sociology*. *Advances in Human Ecology*. 7:1-56.

Maryanski, Alexandra and Jonathan Turner (1992). *The Social Cage: Human Nature and the Evolution of Society*. Stanford: Stanford University Press.

Merton, Robert (1957). *Social Theory and Social Structure*, revised and enlarged. London: The Free Press of Glencoe.

- Merton, Robert (1958). *Consensus and Controversy*, Falmer Press, London, pp. 129–35
- Milgram, S. (1967). *The small-world problem*. *Psychology Today* 1, 61-67.
- Nolan, Patrick and Gerhard Lenski (2004). *Human Societies: An Introduction to Macrosociology*. Boulder, CO: Paradigm.
- Parsons, Talcott (1951) *The Social System*, Routledge, London.
- De la Peña, J.A. (1996) *Algebra Lineal Avanzada*. Fondo de Cultura Económica. México.
- De la Peña, José Antonio and Tello, Nelia (2009): *The iterated Prisoner's Dilemma in societies of deterministic players*. *Discrete Mathematics* 309, 4982-4991.
- De la Peña, José Antonio y Tello, Nelia (2009) *¿Colaborar o no colaborar? Ese es el Dilema*. *Ciencias Revista de difusión de la Facultad de Ciencias de la UNAM*, vol. Junio 2009.
- Radcliffe-Brown, A.R. (1940). *On Social Structure*, *Journal of the Royal Anthropological Institute* 70,1-12.
- Scott, John. 1991. *Social Network Analysis*. London: Sage.
- Van Steen, Maarten (2010). *Graph Theory and Complex Networks*.
- Tello, Nelia (2010): *Características sociales de los adolescentes con problemas con la ley*. ENTS, UNAM. Por publicarse.
- Wasserman, Stanley, and Faust, Katherine. (1994). *Social Network Analysis: Methods and Applications*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Watts, D. J. & Strogatz, S. H. (1998). *Collective dynamics of 'small-world' networks*. *Nature* 393, 440-442.
- Wellman, Barry and S.D. Berkowitz, eds., (1988). *Social Structures: A Network Approach*. Cambridge: Cambridge University Press.