QÜESTIIÓ, Vol 17, 2 pp. 221-233, 1993

UN CONTRASTE DE NORMALIDAD BASADO EN LA ENERGÍA INFORMACIONAL

Mª DEL CARMEN PARDO*

Universidad Complutense de Madrid

En este trabajo se presenta un contraste de normalidad basado en la Energía Informacional de forma paralela al obtenido por Vasicek (1976) basándose en la Entropía de Shannon. Se estima la potencia de este contraste para diversas alternativas comparándola con la de otros contrastes de normalidad. Estos resultados permiten afirmar que este contraste es preferido en algunos casos a algunos contrastes clásicos.

A test for normality based on the information energy.

Key words: Contraste no paramétrico, Energía Informacional, Contraste de normalidad.

Clasificación AMS: 62G10, 62B10, 94A17.

1. INTRODUCCIÓN

La medida de certidumbre Energía Informacional, fue introducida en la literatura de la Teoría de la Información por Onicescu (1966), como la suma de las

*María del Carmen Pardo. Departamento de Estadística e I.O. Escuela Universitaria de Estadística. Universidad Complutense de Madrid. 28040. Madrid.

–Article rebut el gener de 1993.

–Acceptat el setembre de 1993.

probabilidades al cuadrado en caso de una variable aleatoria discreta y como la integral de la función de densidad al cuadrado a lo largo del soporte de la misma en caso de una variable aleatoria continua. Este concepto tiene su apoyo físico en la Energía Cinética de la Mecánica Clásica.

Desde que Onicescu propusiera construir una Teoría de la Información basada en la Energía Informacional en paralelo a la Teoría de la Información basada en la Entropía de Shannon han sido muchas e importantes las aportaciones que en esta línea han realizado diversos autores. Así Theorodescu (1977) presenta una caracterización axiomática y estudia diversas propiedades de la misma. Estas propiedades fueron ampliadas en el trabajo de Pardo (1977) en donde se hace la adaptación del concepto de Energía Informacional a todas aquellas situaciones en las que es necesario distinguir la importancia de los diversos resultados del experimento con respecto a un fin determinado: Energía Informacional Útil. Esta nueva medida que tiene en cuenta tanto la probabilidad de ocurrencia de los diversos resultados asociados al experimento en cuestión como su importancia con respecto a un fin determinado fue caracterizada axiomáticamente por Pardo (1985).

La adaptación del concepto de Energía Informacional al contexto bayesiano como medida de la información que un experimento se espera proporcione acerca de la cantidad de interés fue realizado por Pardo (1982). Esta adaptación permitió a García-Carrasco (1982) definir un criterio de comparación de experimentos para elegir aquel que se espera proporcione una mayor cantidad de información. Una regla de muestreo secuencial utilizando la Energía Informacional fue definida y estudiada en los modelos normal y binomial en Pardo (1987). Un estudio para el modelo exponencial fue realizado por Quesada, Pardo y Morales (1985). Estos mismos autores analizaron la Energía Informacional contenida en un Proceso Puntual y estudiaron sus propiedades.

Gil (1989) estudió el estimador analógico de la Energía Informacional y obtuvo su distribución asintótica, en términos de una distribución normal, tanto en muestreo aleatorio simple como estratificado. En el caso que la población de partida sea uniforme la varianza asintótica de la distribución normal se anula y en este caso Ménendez, Pardo y Pardo (1991) obtuvieron como distribución asintótica en el muestreo aleatorio simple una Ji-Cuadrado. Tanto la distribución asintótica a la normal como a la Ji-Cuadrado, permiten construir diversos contrastes de hipótesis así como intervalos de confianza asintóticos.

Petrica y Stefanescu (1982), discípulos de Onicescu, han escrito un libro en donde se presentan diversas aplicaciones y propiedades de la Energía Informacional. Otro interesante libro sobre aplicaciones de la Energía Informacional es el escrito por Onicescu y Stefanescu (1979). Finalmente una recopilación de los resultados más importantes obtenidos con la Energía Informacional puede verse en la monografía acerca de la misma publicada por Pardo y Taneja (1992).

En este trabajo se presenta una nueva aplicación de la Energía Informacional: la construcción de un contraste de normalidad. Es conocida la importancia que ha tenido la construcción de estos contrastes en Estadística. En Mardia (1980) se analizan los siguientes contrastes de normalidad: los basados en medidas descriptivas, el de Shapiro-Wilk y sus modificaciones, los de aproximación de verosimilitud, los de bondad de ajuste y varios más. En esta línea Landry y Lepage (1992) presentan una interesante recopilación de 20 diferentes tests de normalidad. Además en este trabajo, a través de la simulación, obtienen, por una parte, el nivel de significación empírico de los tests considerados y, por otra, comparan la potencia empírica de algunos de ellos frente a diversas alternativas.

El contraste que se presenta en este trabajo se realiza de forma análoga al contraste de normalidad de Vasicek (1976) basado en la Entropía de Shannon y se lleva a cabo un estudio comparativo de este procedimiento con los de Kolmogorov-Smirnov D, Cramér-Von Mises W^2, Kniper V, Watson U^2, Anderson-Darling A^2 y Shapiro-Wilk W. Este estudio se hace para las alternativas:

a) Exponencial,

b) Gamma (1,2),

c) Uniforme (0,1),

d) Beta (2,1) y

e) Cauchy con parámetros de localización 0 y escala 1 (Cauchy (0,1)).

Por último se calcula la potencia de este contraste para la distribución Ji-cuadrado con diferentes grados de libertad.

2. CONSTRUCCIÓN DEL CONTRASTE DE NORMALIDAD BASADO EN LA ENERGÍA INFORMACIONAL

En este apartado se construye un contraste de normalidad basado en la Energía Informacional. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n \geq 3$, la realización de una muestra aleatoria simple de tamaño n de una población con función de densidad $f(x)$ y función de distribución $F(x)$. Sea Φ la función de distribución de una población normal de media μ y varianza σ^2, se trata de construir un procedimiento, basándose en la Energía Informacional, que permita analizar si hay evidencia o no de que las observaciones $x_1, \ldots, x_n$ procedan de una población normal. Es decir, si las observaciones $x_1, \ldots, x_n$ son consistentes con la hipótesis nula

$$H_0 \colon F(x) = \Phi(x).$$

La Energía Informacio~~nal de una distribución F con una función de densid~~ad f se define como

$$\mathfrak{E}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 \, \mathrm{d}x \tag{1}$$

Esta expresión escrita en términos de F^{-1} adopta la siguiente forma

$$\mathfrak{E}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{f(x)}\right)^{-1} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} F^{-1}(p)\right)^{-1} \mathrm{d}p, \tag{2}$$

donde en el último paso hemos hecho el cambio de variable $p = F(x)$ o equivalentemente $F^{-1}(p) = x$.

Reemplazando la función de distribución F por la distribución empírica F_n y utilizando el operador diferencia en lugar del operador diferencial se puede construir un estimador de (2). La derivada de $F^{-1}(p)$ se estima por $\left(x_{(i+m)} - x_{(i-m)}\right) n/(2m)$ para $(i-1)/n < p \leq i/n$, $i = m+1, m+2, \ldots, n-m$, donde $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$ son los estadísticos de orden y m es un entero positivo menor que $n/2$. Las diferencias del tipo $x_{(i+m)} - x_{(1)}$ o $x_{(n)} - x_{(i-m)}$ se utilizan en lugar de $x_{(i+m)} - x_{(i-m)}$ cuando $p \leq m/n$, $p > (n-m)/n$ respectivamente.

Entonces se obtiene un estimador $\mathcal{E}_{mn}$ de $\mathfrak{E}(f)$ de la forma

$$\mathcal{E}_{mn} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{2m}{n\left(x_{(i+m)} - x_{(i-m)}\right)},$$

donde $x_{(i)} = x_{(1)}$, $i < 1$, y $x_{(i)} = x_{(n)}$, $i > n$.

La Energía Informacional de una distribución normal con varianza σ^2 viene dada por

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma(2\pi)^{1/2}}\right)^2 \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\sigma 2\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma\pi^{1/2}}\right) \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2\sigma\pi^{1/2}}. \end{aligned}$$

Además bajo la hipótesis nula, $H_0\colon F(x) = \Phi(x)$, se sigue que

$$\mathcal{E}_{mn} \xrightarrow{p} \frac{1}{2\sigma\pi^{1/2}} \text{ cuando } n \to \infty,\ m \to \infty,\ m/n \to 0.$$

A partir de este resultado y con el fin de definir un estadístico que no depende de σ se considera el estadístico $\mathcal{T}_{mn}$ definido por

$$\mathcal{T}_{mn} = \frac{2ms2^{1/2}}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(x_{(i+m)} - x_{(i-m)}\right)}$$

con $s^2 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

Es claro que bajo la hipótesis nula, se tiene

$$\mathcal{T}_{mn} \xrightarrow{p} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \text{ cuando } n \to \infty,\ m \to \infty,\ m/n \to 0.$$

Se puede probar que

$$\mathcal{T}_{mn} \geq \frac{1}{(2\pi)^{1/2}},$$

con lo cual, utilizando el estadístico $\mathcal{T}_{mn}$, la región crítica para contrastar $H_0\colon F(x) = \Phi(x)$ vendrá dada por $\mathcal{T}_{mn} \geq \mathcal{T}^*_{mn}(\alpha)$ donde $\mathcal{T}^*_{mn}(\alpha)$ son los puntos críticos para un nivel de significación α. El cálculo analítico de estos valores es difícil por lo que se obtienen por el método de Monte Carlo.

Para cada $n \leq 50$ se simularán 2000 muestras de tamaño n de una población normal de media 0 y varianza 1 por el método de Box-Muller y para cada una de las muestras se calcula el valor del estadístico $\mathcal{T}_{mn}$. En la tabla 1 se muestran los valores $\mathcal{T}^*_{mn}(\alpha)$ para valores de m y n dados y $\alpha = 0.05$. Cada uno de éstos se ha estimado por el valor del estadístico de orden que deja a su derecha el 5% de las 2000 observaciones de la variable $\mathcal{T}_{mn}$. Es decir, se calculan los estadísticos correspondientes a cada una de las 2000 muestras y una vez ordenados el valor de $\mathcal{T}^*_{mn}(0.05)$ es el que corresponde al estadístico que ocupa el lugar 1900.

Tabla 1

Valores de $\mathcal{T}^*_{mn}(\alpha)$ para $\alpha = 0.05$

	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$
$n = 3$	3.81				
4	7.18				
5	2.12	1.38			
6	6.89	1.42			
7	4.77	1.45	0.99		
8	4.55	1.22	0.95		
9	3.73	1.12	0.71		
10	3.70	0.93	0.87		
12	2.83	0.91	0.88		
14	2.31	0.87	0.73		
16	2.01	0.79	0.66	0.65	
18	1.62	0.69	0.57	0.54	
20	1.77	0.64	0.56	0.55	
25		0.70	0.59	0.53	0.51
30		0.52	0.50	0.49	0.48
35		0.61	0.55	0.52	0.50
40			0.56	0.52	0.50

3. ESTUDIO COMPARATIVO CON OTROS PROCEDIMIENTOS

En este apartado el objetivo es doble. Por un lado se calcula la potencia del contraste introducido en el apartado anterior para diversas alternativas y por otro se utilizan estos valores de la potencia del contraste para compararla con la de otros contrastes de normalidad.

La potencia del contraste fue calculada para diversas alternativas. Para cada alternativa la potencia del contraste ha sido estimada por la frecuencia relativa con que 1000 muestras caen dentro de la región crítica. Las alternativas que se han investigado son las distribuciones Exponencial, Gamma (1,2), Uniforme (0,1), Beta (2,1) y Cauchy (0,1).

En relación con la comparación de este nuevo contraste de normalidad con otros ya introducidos en la literatura se han considerado, para las alternativas citadas anteriormente, los contrastes de Kolmogorov-Smirnov D, Cramér-Von Mises W^2, Kniper V, Watson U^2, Anderson-Darling A^2 y Shapiro-Wilk W.

La tabla 2 muestra las potencias para un contraste de tamaño $\alpha = 0.05$ con tamaño muestral $n = 20$ y $m = 4$. Se comprueba que para $n = 20$ los diversos valores de $\mathcal{T}^*_{mn}(0.05)$ vienen dados por

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathcal{T}^*_{m\,20}(0.05)$	1.77	0.64	0.56	0.55	0.55	0.56	0.56	0.57	0.58

La razón de elegir el valor $m = 4$ para el tamaño muestral 20 es que el estadístico correspondiente tiene una región crítica mayor que si consideramos cualquier otro m. De esta forma, desde un punto de vista intuitivo, conseguiríamos mayor potencial del contraste.

Los valores para los estadísticos D, W^2, V, U^2, A^2 y W, basados en la función de distribución empírica, contra las alternativas propuestas provienen del artículo de Vasicek (1976).

Tabla 2

Potencias de contrastes a nivel $\alpha = 0.05$ $(n = 20)$

Alternativa	D	W^2	V	U^2	A^2	W	$\mathcal{T}_{mn}$
Exponencial	0.59	0.74	0.71	0.70	0.82	0.84	0.99
Gamma (1,2)	0.33	0.45	0.33	0.37	0.48	0.50	0.41
Uniforme	0.12	0.16	0.17	0.18	0.21	0.23	0.29
Beta (2,1)	0.17	0.23	0.20	0.23	0.28	0.35	0.65
Cauchy (1,0)	0.86	0.88	0.87	0.88	0.98	0.88	0.95

Es claro que ningún contraste es mejor para todas las alternativas que otro pero el contraste basado en el estadístico $\mathcal{T}_{mn}$ es mejor para tres de las cinco alternativas que cualquier otro contraste lo que indica que en muchos casos será preferido.

Por último, en la tabla 3 aparecen las potencias del contraste basado en el estadístico $\mathcal{T}_{mn}$ para una distribución χ^2 con 1, 3 y 5 grados de libertad para $n = 10, m = 3$ y $n = 20, m = 4$. Al igual que antes, el seleccionar de entre todos los valores posibles de m para $n = 10$ el valor 3 se debe a que parece razonable esperar que proporcione mayor potencia al contraste.

Tabla 3

Potencias para distribuciones $\chi^2(\alpha = 0.05)$

	$\chi^2(1)$	$\chi^2(3)$	$\chi^2(5)$
$n = 10$	0.815	0	0.148
$n = 20$	1	0.778	0.26

4. APLICACIÓN NUMÉRICA

En este apartado se analiza un ejemplo con datos reales sacados del libro de Mardia *et al.* (1979).

Ejemplo

Analizar si los siguientes 50 valores

5.1, 4.9, 4.7, 4.6, 5.0, 5.4, 4.6, 5.0, 4.4, 4.9, 5.4, 4.8, 4.8, 4.3, 5.8, 5.7, 5.4, 5.1, 5.7, 5.1, 5.4, 5.1, 4.6, 5.1, 4.8, 5.0, 5.0, 5.2, 5.2, 4.7, 4.8, 5.4, 5.2, 5.5, 4.9, 5.0, 5.5, 4.9, 4.4, 5.1, 5.0, 4.5, 4.4, 5.0, 5.1, 4.8, 5.1, 4.6, 5.3, 5.0

que indican la longitud del sépalo de flores de la especie *Iris Setosa* son normales.

El contraste se realizará con el estadístico $\mathcal{T}_{1\,50}$ ya que éste es el menor de los puntos críticos, $\mathcal{T}^*_{mn}(\alpha)$, para $n = 50$ y $\alpha = 0.05$ que vienen dados por:

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathcal{T}^*_{m\,50}(0.05)$	0.78	0.56	0.52	0.49	0.48	0.47	0.47	0.46	0.45

m	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\mathcal{T}^*_{m\,50}(0.05)$	0.45	0.44	0.45	0.46	0.47	0.47	0.48	0.48	0.49

m	19	20	21	22	23	24
$\mathcal{T}^*_{m\,50}(0.05)$	0.49	0.50	0.50	0.51	0.51	0.52

y como $\mathcal{T}_{1\,1\,50} = 0.4269 < 0.44$ aceptamos la hipótesis nula, es decir, nuestros datos provienen de una normal.

REFERENCIAS

[1] **García Carrasco, M.P.** (1982). "Criterio bayesiano para la comparación de experimentos basado en la maximización de la ganancia de energía informacional". *Actas XIII Reunión Nacional de Estadística*, **2**, 65–72.

[2] **Gil, M.A.** (1989). "A note on stratification and Gain in precision in estimating diversity from large Samples". *Commun. Statist. (Theory and Methods)*, **18** **(4)**, 1521–1526.

[3] **Landry, L.** y **Lepage, Y.** (1992). "Empirical behaviour of some tests for normality". *Commun. Statist.-Simula*, **21** **(4)**, 971–999.

[4] **Lindley, D.V.** (1956). "On a Measure of Information provided by an Experiment". *Ann. Math. Statist.*, **27**, 986–1005.

[5] **Mardia, K.V.** (1980). "Tests of Univariate and Multivariate Normality". *P.R. Krishnaiah, ed., Handbook of Statistics*, **Vol. 1**. North-Holland Publishing Company, 279–320.

[6] **Mardia, K.V.; Kent, J.T.** y **Bibby, J.M.** (1979). "Multivariate Analisis". *Academic Press.*

[7] **Morales, D.; Pardo, L.** y **Quesada, V.** (1986). "La Energía Informacional como Medida de Información en un Proceso Puntual". *Estadística Española*, **107**, 5–14.

[8] **Onicescu, O.** (1966). "Energie Informationelle". *C.R. Acad. Sci. Paris.* **Ser. A**, 841–842.

[9] **Onicescu, O.** y **Stefanescu, V.** (1979). *Elemente de Statistica informationala eu aplicatii.* Editura Technica. Bucarest.

[10] **Pardo, L.** (1977). "La Energía Informacional como fundamento de una Teoría de la Información". Memoria presentada en el Instituto Universitario de Estadística e I.O. Madrid.

[11] **Pardo, L.** (1982). "Algunas consideraciones acerca de la Energía Informacional". *Estadística Española*, **94**, 113–122.

[12] **Pardo, L.** (1984). "Plan de muestreo secuencial basado en la Energía Informacional en el modelo de Bernouilli". *Estadística Española*, **104**, 27–49.

[13] **Pardo, L.** (1987). "Plan de muestreo Secuencial basado en la Energía Informacional". *Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid,* **LXXXI 1**, 102–115.

[14] **Pardo, J.A.** (1985). "Caracterización Axiomática de la Energía Informacional Útil". *Estadística Española*, **108**, 107–116.
[15] **Pardo, L. y Taneja, I.J.** (1991). "Information Energy and its Applications". In: *Advances in Eelectronic and Electron Physics*, **90**, 165–241.
[16] **Pardo, L.; Pardo, J.A. y Menéndez, M.L.** (1991). "Unified (r,s)–Entropy as an idex of Diversity". *Jour. of the Franklin Institute*, **329**, 907–921.
[17] **Petrica, I. y Stefanescu, V.** (1982). *Aspecte noi ale teorie informatiei.* Editora Academiei Republicii Socialiste Romania.
[18] **Quesada, V.; Pardo, L. y Morales, D.** (1985). "Plan de Muestreo Secuencial basado en la Energía Informacional para una población Exponencial". *Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa*, **36**, 233–242.
[19] **Theodorescu, A.** (1977). "Energie Informationelle et notions apparentees". *Trabajos de Estadística e I.O.*, **27**, 276–298.
[20] **Vasicek, O.** (1976). "A test of normality based on sample entropy". *J. Roy. Statist. Soc.,* **B 38**, 54–59.

ENGLISH SUMMARY:

A TEST FOR NORMALITY BASED ON THE INFORMATION ENERGY

Mª del Carmen Pardo

Let $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n \geq 3$, be drawn at random and with replacement from a population of size n with density function $f(x)$ and distribution function $F(x)$. Let Φ be the mean μ and variance σ^2 normal distribution function. We are interested in finding a statistic based on the Information Energy to test whether the $x_1, \ldots, x_n$ observations are consistent with the null hypothesis $H_0\colon F(x) = \Phi(x)$.

The Information Energy of a distribution F with a density function f is defined as

$$\mathfrak{E}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 \,\mathrm{d}x \tag{1}$$

If we express (1) in the form

$$\int_0^1 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}F^{-1}(p)\right)^{-1} \mathrm{d}p, \tag{2}$$

an estimate of (2) can be constructed by replacing the distribution function F by the empirical distribution function F, and using a difference operator in place of the differential operator. The derivative of $F^{-1}(p)$ is then estimated by $\left(x_{(i+m)} - x_{(i-m)}\right) n/(2m)$ for $(i-1)/n < p \le i/n$, $i = m+1, m+2, \ldots, n-1$, where $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \cdots \le x_{(n)}$ are the order statistics and m is a positive integer smaller than $n/2$. One-sided differences of the type $x_{(i+m)} - x_{(1)}$ or $x_{(n)} - x_{(i-m)}$ are used in place of $x_{(i+m)} - x_{(i-m)}$ when $p \le m/n$, $p > (n-m)/n$ respectively.

This produces an estimate $\mathcal{E}_{mn}$ of $\mathfrak{E}(f)$

$$\mathcal{E}_{mn} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{2m}{n\left(x_{(i+m)} - x_{(i-m)}\right)},$$

where $x_{(i)} = x_{(1)}, i < 1$, and $x_{(i)} = x_{(n)}, i > n$.

The Information Energy of a normal distribution with variance σ^2 is given by

$$\mathfrak{E}(f) = \frac{1}{2\sigma\pi^{1/2}}.$$

Under the null hypothesis H_0, we have

$$\mathcal{E}_{mn} \xrightarrow{p} \frac{1}{2\sigma\pi^{1/2}} \text{ when } n \to \infty,\ m \to \infty,\ m/n \to 0.$$

Then defining the statistics $\mathcal{T}_{mn}$ as

$$\mathcal{T}_{mn} = \frac{2ms2^{1/2}}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\left(x_{(i+m)} - x_{(i-m)}\right)} \quad \text{with} \quad s^2 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

we have

$$\mathcal{T}_{mn} \xrightarrow{p} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \quad \text{when} \quad n \to \infty,\ m \to \infty,\ m/n \to 0.$$

Furthermore, it can be shown

$$\mathcal{T}_{mn} \geq \frac{1}{(2\pi)^{1/2}},$$

then using the $\mathcal{T}_{mn}$-statistic, the critical region for testing $H_0: F(x) = \Phi(x)$ is $\mathcal{T}_{mn} \geq \mathcal{T}^*_{mn}(\alpha)$ where $\mathcal{T}^*_{mn}(\alpha)$ are the critical points for the significance level α. It is difficult to calculate these values analytically so the Monte Carlo simulations were used to obtain them.

Table 1

$\mathcal{T}^*_{mn}(\alpha)$ values for $\alpha = 0.05$

	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$
$n = 3$	3.81				
4	7.18				
5	2.12	1.38			
6	6.89	1.42			
7	4.77	1.45	0.99		
8	4.55	1.22	0.95		
9	3.73	1.12	0.71		
10	3.70	0.93	0.87		
12	2.83	0.91	0.88		
14	2.31	0.87	0.73		
16	2.01	0.79	0.66	0.65	
18	1.62	0.69	0.57	0.54	
20	1.77	0.64	0.56	0.55	
25		0.70	0.59	0.53	0.51
30		0.52	0.50	0.49	0.48
35		0.61	0.55	0.52	0.50
40			0.56	0.52	0.50

Next, on the one hand the power of the test is estimated against several alternatives: Exponential, Gamma (1,2), Uniform (0,1), Beta (2,1) and Cauchy (0,1). And on the other hand the power of the $\mathcal{T}_{mn}$ test was compared with the power of other tests of normality against the same alternatives. The tests considered are: Kolmogorov-Smirnov D, Cramér-Von Mises W^2, Kniper V, Watson U^2, Anderson-Darling A^2 and Shapiro-Wilk W.

Table 2 lists power estimates of 0.05 size tests with sample size $n = 20$. We choose $m = 4$ because the maximum power is typically attained there.

Table 2

Powers of 0.05 test against some alternatives ($n = 20$)

Alternative	D	W^2	V	U^2	A^2	W	$\mathcal{T}_{mn}$
Exponential	0.59	0.74	0.71	0.70	0.82	0.84	0.99
Gamma (1,2)	0.33	0.45	0.33	0.37	0.48	0.50	0.41
Uniform	0.12	0.16	0.17	0.18	0.21	0.23	0.29
Beta (2,1)	0.17	0.23	0.20	0.23	0.28	0.35	0.65
Cauchy (1,0)	0.86	0.88	0.87	0.88	0.98	0.88	0.95

It is apparent from this table that none of the tests considered performs better than all other tests against all alternatives. Compared with any other test, however, the $\mathcal{T}_{mn}$ test shows higher power against three of the five alternative distributions. These results suggest that this test may be preferred in many situations.

Finally, Table 3 lists power estimates of 0.05 size tests against a chi-squared distribution with 1, 3 and 5 degrees of freedom. We choose $m = 3$ for $n = 10$ and $m = 4$ for $n = 20$.

Table 3

Powers for χ^2 distributions ($\alpha = 0.05$)

	$\chi^2(1)$	$\chi^2(3)$	$\chi^2(5)$
$n = 10$	0.815	0	0.148
$n = 20$	1	0.778	0.26