V. 7, n.º 2 (juny 1983) pp. 451-458

SOLUCIÓN DEFINITIVA AL PROBLEMA DE LA MONEDA FALSA

JUAN DOMÍNGUEZ MONTES

Este trabajo trata un problema ya clásico y conocido por los expertos en Teoría de la Información: "Utilizando una balanza ordinaria, encontrar una moneda falsa, caracterizada por tener distinto peso, en un conjunto de ellas, con el menor número de pesadas e indicación de - si su peso es mayor o menor que las del resto".

El método aquí expuesto no sólo calcula el número mínimo de pesadas necesario, además indica la forma en que hay que realizarlas, es facilmente mecanizable y válido cualquiera que sea - el número de monedas.

DEFINITIVE SOLUTION TO THE PROBLEM OF FINDING ONE FALSE COIN IN A COLLECTION.

Keywords: FALSE COIN PROBLEM. INFORMATION THEORY.

1. INTRODUCCIÓN.

La teoría de la Información fué creada en -- 1948 por Claude Shannon. Esta teoría ha enriquecido notablemente el campo de las investigaciones matemáticas, económicas, biológicas, psicológicas, semánticas, etc. Como ejemplo podemos citar un aporte reciente de esta teoría a la programación lineal entera mixta. - /1/. En este trabajo vamos a mostrar la solución definitiva al problema de encontrar una moneda falsa en un conjunto de n, caracterizada por tener distinto peso, utilizando una balanza ordinaria, con el número mínimo de - pesadas. Este problema ha sido extensamente tratado por muchos autores sin que ninguno - de ellos haya dado con una solución sistemática. YAGLOM Y YAGLOM, entre otros, tratan - ampliamente este problema a la luz de la Teoría de la Información /2/. No obstante no -- ofrecen un método fácilmente mecanizable, ni generalizable, de conseguir el resultado.

2. MEDIDA DE LA CANTIDAD DE INFORMACIÓN.

La primera y más importante contribución a - la teoría de la información fué sugerida por Shannon y Wiener al poner de manifiesto la - naturaleza estadística de las comunicaciones. Según este punto de vista, tanto la radio, - como la televisión, los teletipos o cualquier otra fuente de información, seleccionan "al - azar", pero con una probabilidad dada, la secuencia de mensajes de un determinado vocabulario.

Así, pues, una vez recibido un mensaje, desconocemos cuál será el próximo, puesto que su - elección será aleatoria, pero conocemos la -- probabilidad de transmitir cada mensaje directamente. Si la selección fuera determinística, el mensaje carecería de información, pues su elección nos sería conocida de antemano.

De todo lo dicho, parece razonable suponer --

- Juan Dominguez Montes - Ingeniero de Telecomunicación de RENFE - Gabinete de Informática - Pº de las Delicias, nº 61 - Madrid - 7

- Article rebut el Setembre del 1983.

que nuestra búsqueda de una medida de la cantidad de información debe limitarse a buscar un parámetro estadístico asociado al esquema de probabilidades.

Relacionado con el concepto de información, se impone discutir también el de indeterminación. Cuando se recibe un mensaje la indeterminación o incertidumbre que existía previamente disminuye. La importancia de una información reside precisamente en esta disminución de la incertidumbre, puesto que tal disminución es numéricamente igual al aumento de la información.

Hablar de información o de indeterminación es, en definitiva, lo mismo, con la diferencia de que en un caso nos colocamos antes de realizar el experimento (necesitamos una cantidad de información), y en el otro después de haberlo realizado (se nos aporta una cantidad de información).

Supongamos que tenemos un conjunto E_{nm} de nm elementos $(x_1, x_2, \ldots, x_{nm})$. Tratamos de obtener la cantidad de información $I(x_k)$ asociada a la elección del elemento x_k del conjunto E_{nm}.

Esta cantidad de información podremos obtenerla mediante dos procedimientos.

1) Procedimiento directo.

   La cantidad de información de un elemento será, en general, función de la probabilidad de elección del mismo:

$$I(x_k) = f(P(x_k)) \tag{I}$$

   que en el caso de elección equiprobable, sería:

$$I(x_k) = f((\frac{1}{mn}))$$

2) Procedimiento indirecto.

   Consideremos descompuesto el conjunto E_{nm} en n subconjuntos, cada uno de ellos formado por m elementos:

$$E_{nm} = E_m^1 \cup E_m^2 \cup \ldots \cup E_m^n$$

   Para caracterizar el elemento x_k necesitaremos primeramente determinar en que subconjunto E_m^j $j = (1,2,3\ldots n)$ se encuentra para lo cual será precisa una cantidad de información:

$$I(j) = f(p(j)) \quad j = 1,2\ldots n \tag{II}$$

en donde $P(j)$ es la probabilidad de elegir E_m^j dentro del conjunto E_{mn}. En el caso equiprobable, tendríamos:

$$I(j) = f((\frac{1}{n})) \tag{IIa}$$

Una vez hallado el subconjunto E_m^j tendremos que determinar de cuál de sus elementos se trata. La cantidad de información necesaria será:

$$I(k) = f(P(k)) \quad k = 1,2\ldots m \tag{III}$$

en donde $P(k)$ representa la probabilidad de elegir x_k dentro del subconjunto E_m^j. Para el caso equiprobable se verificará que:

$$I(k) = f((\frac{1}{m})) \tag{IIIa}$$

Como mediante ambos procedimientos se ha seleccionado el mismo elemento, es lógico que las cantidades de información correspondientes sean iguales. Así, pués, igualando la expresión (I) a la suma de las (II) y (III), resulta:

$$f(P(x_k)) = f(P(j)) + f(P(k)) \tag{IV}$$

que en el caso equiprobable se convierte en:

$$\text{AX-1} \quad f(\frac{1}{mn}) = f(\frac{1}{m}) + f(\frac{1}{n}) \tag{IVa}$$

lo cual, para n=1, implica que:

$$f(1) = 0 \tag{IVb}$$

la fórmula (IVa) constituye el primer axioma que debe cumplir la función de medida que queremos definir.

Además, por lo expuesto hasta ahora, vemos la relación existente entre información y probabilidad, de tal manera que al aumentar la probabilidad de selección de un elemento, éste aporta menos cantidad de información.

Así, pues, en el caso equiprobable, la cantidad de información aportada por la elección de un elemento entre nm elementos será menor que la cantidad de información aportada por la elección de un elemento entre nm+1 elementos. De donde el segundo axioma será:

$$Ax - 2 \qquad f(\frac{1}{mn}) \le f(\frac{1}{mn+1})$$

es decir, la función decrece con la probabilidad P. Como se verifica que

$$0 \le P \le 1$$

ha de cumplirse que

$$f(0) \ge f(P) \ge f(1)$$

y teniendo en cuenta (IV b), deducimos que:

$$f(P) \ge 0$$

Es decir, la cantidad de información no puede ser negativa.

Por último, parece lógico introducir un tercer axioma que nos defina la unidad de medida. Elegimos en particular, como unidad, la cantidad de información que nos aporta la selección de un elemento entre α elementos --- equiprobables.

Tendremos, pues como tercer axioma:

$$Ax - 3 \qquad f(\frac{1}{\alpha}) = 1$$

Una función que cumple los tres axiomas exigidos y que tomaremos como función de medida de la cantidad de información es

$$f(\frac{1}{q}) = - \log_\alpha (\frac{1}{q})$$

donde $f(\frac{1}{q})$ es la cantidad de información que suministra la selección de un elemento entre q equiprobables.

Cuando elegimos la base de los logaritmos -- igual a 2 la selección de uno entre dos sucesos equiprobables (tirar una moneda) nos --- aportaría una cantidad de información

$$I = - \log_2 (\frac{1}{2}) = \log_2 2 = 1$$

unidad conocida comunmente con el nombre de bit.

Cuando la base de los logaritmos es 10, la - unidad de información corresponde a la selección de uno entre diez casos equiprobables y se denomina Hartley.

Shannon sugirió que la variable aleatoria -- $\log p(x_k)$ era una medida de la información - asociada a la ocurrencia del acontecimiento x_k. Mostró que el valor medio de esta fun-- ción es una buena indicación del valor medio de la incertidumbre que se tiene al realizar un experimento aleatorio. A esta cantidad media de información es la que se ha dado en - llamar Entropía.Se puede interpretar la en-- tropía como la cantidad media de información por símbolo emitida por una fuente./3/.

3. CÓDIGOS HAMMING CAPACES DE CORREGIR UN ÚNICO ERROR.

Este procedimiento de codificación muestra - como es posible hacer realidad la transmisión de información en presencia de ruido ateniéndose a los mínimos de redundancia predichos - por la Teoría de la Información.

Imaginemos un mensaje binario de n posiciones. La cantidad de información necesaria para descubrir cual de los n elementos de valor 0,1 - es el erróneo, sería:

$$Ie = - \log \frac{1}{n+1} = \log (n+1)$$

Es decir, la elección de 1 entre n+1 elemen-- tos equiprobables. Un número n de posibles situaciones distintas para el error, y una posición adicional para indicar que el mensaje es correcto.

Un número K de elementos binarios 0,1 de re-- dundancia o de paridad aportan una cantidad - de información:

$$Ip = -K \log 1/2 = \log 2^k$$

Evidentemente la cantidad de información aportada por los dígitos de paridad debe ser suficiente para saber donde se encuentra el error de donde:

$$Ip \ge Ie$$

o bien

$2^k \geq n+1$

Imaginemos que queremos transmitir un mensaje binario de 7 posiciones. El número de bits de entre ellos, que han de ser utilizados como bits de paridad ha de ser al menos de tres ya que:

$2^3 = 7+1$

La manera más sencilla de implementar un procedimiento de codificación que cumpla el anterior requisito es elegir como bits de paridad los que ocupan los lugares 1,2 y 4 y las ecuaciones de paridad (el signo + indica la suma módulo 2) las siguientes

$x_1+x_3+x_5+x_7$ = par $\quad S_1$

$x_2+x_3+x_6+x_7$ = par $\quad S_2$

$x_4+x_5+x_6+x_7$ = par $\quad S_3$

Con las ecuaciones de paridad anteriores se puede decidir fácilmente cuál es el bit erróneo. Por ejemplo si falla:

S_1 el error es el bit x_1

S_2 " " x_2

S_3 " " x_4

Si fallan:

S_1 y S_2 el error es el bit x_3

S_1 y S_3 " " x_5

S_2 y S_3 " " x_6

S_1 S_2 y S_3 " " x_7

Las relaciones de paridad anteriores se muestran de una manera más compacta mediante la matriz de paridad H.

$$\begin{array}{c|ccccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \\ & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & S_1 \\ H = & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & S_2 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & S_3 \end{array}$$

Cada columna de la matriz es la representación binaria del número de orden de dicha columna y cada fila una relación de paridad. El hecho de elegir los bits que ocupan los lugares 1,2 y 4 como los de paridad se debe a que al figurar sólo una vez en las relaciones de paridad pueden ser deducidos fácilmente en función de los bits de información. Por ejemplo: después de codificar el mensaje 1100 con los correspondientes bits de paridad éste se convertirá en el mensaje x_1 x_2 1 x_4 100 y los bits x_1, x_2 y x_4 se obtendrán de las relaciones:

$x_1 = x_3+x_5+x_7 = 1+1+0 = 0 \quad S_1$

$x_2 = x_3+x_6+x_7 = 1+0+0 = 1 \quad S_2$

$x_4 = x_5+x_6+x_7 = 1+0+0 = 1 \quad S_3$

quedando el mensaje completo:

0111100

Si por ejemplo el quinto bit fuera erróneo el mensaje recibido sería el 0111000 y fácilmente puede comprobarse que el vector binario S_3 S_2 S_1 sería 1,0,1 que en la matriz corresponde al lugar de orden número 5:

$x_1+x_3+x_5+x_7 = 0+1+0+0 = 1 \quad S_1$

$x_2+x_3+x_6+x_7 = 1+1+0+0 = 0 \quad S_2$

$x_4+x_5+x_6+x_7 = 1+0+0+0 = 1 \quad S_3$

Así mismo se operaría con un error en otra posición cualquiera.

Con otro bit de paridad en la posición ocho podríamos construir códigos capaces de detactar y corregir un error en mensajes de longitud 15 y así sucesivamente. No existen códigos con esta capacidad de corrección y menos redundancia que los de Hamming, denominándose, por ello, códigos perfectos. /4/

4. EL PROBLEMA DE LA MONEDA FALSA.

Sean n monedas todas del mismo peso excepto una que puede pesar más o menos. Determinar el número mínimo de pesadas que hay que realizar en una balanza para identificar si existe dicha moneda y decidir en este caso si es más o menos pesada que el resto.

La balanza tiene tres posiciones: que se incline el plantillo izquierdo, que lo haga el derecho o que quede en equilibrio.

Por esta razón la cantidad de información obtenida en cada pesada será:

$$I_p = \log 3$$

Si hacemos x pesadas la información total recibida valdrá:

$$xI_p = \log 3^x$$

Por otra parte debemos determinar qué moneda entre las n es la diferente. Para lo cual se necesitará una cantidad de información:

$$I_1 = \log n$$

y como además la moneda puede pesar más o menos:

$$I_2 = 7 \log 2$$

La cantidad total de información necesaria para determinar qué moneda es la falsa y además si es más o menos pesada que el resto será:

$$I_1 + I_2 = \log 2n$$

Si además aceptamos el caso adicional que puedan ser todas buenas necesitaremos una información suplementaria equivalente al aumento que se origina al pasar de la selección de una entre 2n a una entre 2n+1. La cantidad de información total necesaria I_T será:

$$I_T = \log (2n+1)$$

De las x pesadas deberemos obtener una información suficiente para decidir si existe una moneda falsa e indicar en este caso si es más o menos pesada que el resto, así se deberá cumplir:

$$xI_p \geq I_T$$

es decir

$$3^x \geq 2n+1 \qquad (V)$$

Para el caso en que el número n de monedas sea doce el valor de x deberá ser de al menos 3 ya que:

$$3^3 \geq 24+1$$

5. PROCEDIMIENTO DE PESADA PARA IDENTIFICAR LA MONEDA FALSA.

La analogía entre los códigos Hamming capaces de detectar y corregir un error en un mensaje y la búsqueda de una moneda falsa entre un conjunto de n monedas es evidente.

Si queremos llevar la analogia a sus últimas consecuencias deberemos primero construir un código Hamming en el que cada relación lineal de redundancia deberá representar una pesada.

Dado que el resultado de una pesada en la balanza puede adquirir tres estados podemos representar éstos por 0, 1 y 2. Convenimos en el 0 para la posición del equilibrio y el 1 y el 2 para las posiciones de izquierda y derecha.

De igual manera cada moneda puede ser del mismo, de mayor o de menor peso. De nuevo nos encontramos con tres valores.

De acuerdo con ésto el código Hamming a construir deberá servir para detectar y corregir un error en un mensaje escrito en base 3. En adelante las operaciones de suma y producto serán por tanto en módulo 3 /5/.

En el caso de la matriz H, de paridad binaria anteriormente descrito, era trivial que la suma de dos vectores columnas nunca podría dar un resultado nulo. En el caso de que los dígitos estén escritos en base 3 puede ocurrir que la suma de elementos tales como (2,1) y (1,2) den por resultado (0,0). Esta dificultadpuede obviarse si todos "los primeros elementos" distintos de cero de cada una de las columnas de la matriz de chequeo H vale 1. -- Así ninguna pareja de columnas dependen li--- nealmente entre sí y esta matriz es válida para construir códigos capaces de detectar y corregir un error.

Del número total de columnas que se puede escribir con x filas en base 3; $3^x - 1$, habrá -- que elegir sólo la fracción 1/(3-1) que tie-- nen su primer elemento no nulo igual a 1. El máximo número de columna que se pueden obte-- ner de esta manera es:

$$\frac{3^x - 1}{2} \qquad \text{(VI)}$$

y este número deberá ser igual o superior al de monedas:

$\frac{3^x - 1}{2} \geq n$; Según ésto, para n=12 monedas,- el número de pesadas o relaciones lineales o filas de la matriz H, deberá ser igual o mayor que 3. La matriz de chequeo para x=3 es:

Primera pesada S_1

$$x_5\ x_6\ x_7\ x_8 <> x_9\ x_{10}\ x_{11}\ x_{12}$$

el resultado de esta comparación dará un va-- lor para S_1 que podrá ser 0,1 ó 2 según quede la balanza en equilibrio, se desplace a la izquierda o se desplace a la derecha. Estas dos últimas asignaciones son "arbitrarias" pudiendo invertirse los valores.

Para realizar la segunda pesada nos valdremos también de la matriz H. Los elementos distintos de cero en la segunda fila de la matriz H indicarán las monedas que deberán figurar en la segunda pesada. Habrá que tener en cuenta además, que las monedas que aparecen en la - relación lineal S_2 con un 2, deberán cambiar de platillo; así ocurre con las monedas 11 y 12 que deberán figurar en el platillo izquierdo puesto que en la primera pesada figuraban en el derecho. Así:

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\
H = & \left|\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right. & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 2 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} & \left.\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 2 \end{array}\right| \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array}
\end{array}$$

La corrección de errores se hará de análoga forma al caso binario. Se comprueba si las - relaciones de chequeo S_1 S_2 y S_3 se cumplen todas en cuyo caso no hay error o lo que es lo mismo no hay moneda falsa. Si alguna deja de cumplirse el primer valor de S_1 ó S_2 ó S_3 no nulo indicará el error b y el vector ---- $(S_1/b,\ S_2/b,\ S_3/b)$ la posición del mismo.

Apliquemos la matriz de chequeo anterior al problema de las pesadas. En primer lugar olvidaremos la columna 13 porque se trata de - sólo 12 monedas. La relación lineal S_1 indicará qué monedas deberán intervenir en la -- primera pesada. Esta podrá ser la comparación de las monedas x_5, x_6, x_7, x_8 a un lado "arbitrario" de la balanza, por ejemplo el izquierdo, con las monedas $x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}$ al derecho; el valor cero lo interpretaremos como que no deberán figurar dichas monedas en la pesada. -- Así:

Segunda pesada S_2

$$x_{11}\ x_{12}\ x_8\ x_2 <> x_9\ x_{10}\ x_3\ x_4$$

y siguiendo el mismo convenio para la tercera pesada ésta podrá ser:

Tercera pesada S_3

$$x_1\ x_4\ x_6\ x_{10} <> x_3\ x_9\ x_{12}\ x_7$$

Los valores obtenidos en la primera S_1, segunda S_2 y tercera pesada S_3, será los componentes del vector S_1, S_2, S_3 a través del cual se deberá identificar la moneda falsa si la - hubiere y en caso afirmativo si es más o me-- nos pesada que el resto. Las etapas a seguir para su identificación serán:

A) Si S_1 es distinto de 0 anotar dicho valor como divisor b y obtener el vector cociente S_1/b, S_2/b, S_3/b y pasar a la etapa B. En caso contrario continuar en M.

M. Si S_2 es distinto de 0 anotar dicho valor como divisor b y obtener el vector cociente S_1/b, S_2/b, S_3/b y pasar a la etapa B. En caso contrario continuar en N.

N. Si S_3 es distinto de 0 anotar dicho valor como divisor b y obtener el vector cociente S_1/b. S_2/b, S_3/b y pasar a la etapa B. En caso contrario todas las monedas son buenas y parar.

B) El resultado de la etapa A nos da un vector cociente S'_1 S'_2 S'_3 y un divisor cuyo valor puede ser 1 ó 2. Con el vector cociente se identificará en la matriz H el lugar ocupado por la moneda falsa y se pasará a la etapa C.

C) El valor 1 ó 2 del divisor obtenido en la etapa A sirve para decidir si la moneda es más o menos pesada. Dado que arbitrariamente se ha asignado el valor 2 para el desplazamiento de la balanza a la derecha y de un modo también arbitrario se han distribuido las monedas entre los platillos derecho e izquierdo en la primera pesada, debemos dar una interpretación al divisor 2. En nuestro caso anterior de asignación y distribución arbitrarios éste valor 2 indica que la moneda es más pesada si la falsa resulta ser - - - - - - - - - x_9 x_{10} x_{11} x_{12} x_3 x_4 porque la primera vez que han figurado en una pesada estaban en el platillo derecho y menos pesada si la falsa resulta ser x_1 x_2 x_5 x_6 x_7 x_8. Por el contrario si el divisor es 1 indicará menos peso para las monedas 9,10,11,12,3 y 4 y más peso para las 1,2,5,6,7 y 8.

Ejemplo 1:

Supongamos que el resultado de las tres pasadas es el siguiente:

Primera pesada
desplazamiento a la derecha $S_1 = 2$

Segunda pesada
desplazamiento a la derecha $S_2 = 2$

Tercera pesada
desplazamiento a la derecha $S_3 = 2$

En la etapa A obtenemos el vector cociente 1,1,1, y el divisor 2.

En la etapa B comprobamos a través de la matriz H que el vector 1,1,1, indica la posición 9 y por tanto que esta es la moneda falsa.

La etapa C indica que el divisor 2 obtenido en la etapa A indica para la moneda x_9 que es más pesada.

Ejemplo 2:

Supongamos que el resultado de las pesadas hubiera sido:

Primera pesada en equilibrio $S_1 = 0$
Segunda pesada en equilibrio $S_2 = 0$
Tercera pesada desplazamiento
a la derecha $S_3 = 2$

En la etapa A obtenemos el vector cociente 0,0,1 y el divisor 2.

En la etapa B comprobamos a través de la matriz H que el vector 0,0,1 corresponde a la moneda que ocupa el lugar número 1.

En la etapa C comprobamos que el divisor 2 obtenido en la etapa A significa para la primera moneda x_1 que es menos pesada.

Ejemplo 3:

Supongamos que el resultado de las pesadas hubiera sido:

Primera pesada a la izquierda $S_1 = 1$
Segunda pesada a la izquierda $S_2 = 1$
Tercera pesada en equilibrio $S_3 = 0$

En la etapa A obtenemos el vector cociente (1,1,0) y el divisor 1.

En la etapa B comprobamos a través de la matriz H que el vector (1,1,0) corresponde a la posición 8. Es decir la moneda falsa será la número 8.

En la etapa C podemos comprobar que el divisor 1 significa más pesada para la moneda 8.

6. GENERALIZACIÓN.

La generalización del procedimiento para cualquier número de monedas n es inmediato. Basta construir una matriz de chequeo cuyo primer elemento no nulo es igual a 1 en cada columna. Cada fila correspondiente a una relación lineal o pesada, y el número x de éstas es un valor tal que cumpla la desigualdad:

$$3^x - 1 \geq 2n$$

donde n será el número de columnas o de monedas. Hemos mostrado anteriormente que siempre es posible construir tal matriz.

Existe una restricción adicional al aplicar la matriz de chequeo de Hamming, al problema de las monedas y la balanza, derivadas del hecho de que el número de monedas que deben participar en cada pasada ha de ser par. Si elegimos el signo igual en la inecuación anterior el valor de n indicará el máximo número de columnas entre las que puede ser seleccionada la moneda falsa con x pesadas:

$$n = \frac{3^x-1}{2}$$

Ahora bien para que sea factible realizar las pesadas, este número ha de ser multiplo de 3, lo que no ocurre para el valor n anterior, pero si para el inmediato inferior n':

$$n' = n-1 = \frac{3^x-3}{2} = 3\,\frac{(3^{x-1}-1)}{2} = 3k$$

Ya que k es siempre un número entero, para cualquier valor entero de x superior a 1.

Esto quiere decir que para x = 3 el máximo número de monedas es de 12. De la misma forma para x = 4 pesadas el máximo número de monedas es de 39, para x = 5 será 120 etc.

7. BIBLIOGRAFÍA.

/1/ DOMINGUEZ Y BARREIRO, "Una aportación de la Teoría de la Información a la programación lineal entera mixta" - Revista Chip nº 14 de mayo de 1982.

/2/ YAGLOM y YAGLOM, "Probabilité et Information", Editorial Dunod (1969).

/3/ GASCO Y DOMINGUEZ, "Introducción a la teoría de la Información". Proceso de Datos, mayo 1968.

/4/ REZA, "An introduction to information theory". Mac Graw-Hill (1961)

/5/ PETERSON-WELDON, "Error-correcting codes". Editorial The MIT Press.