

LA PRUEBA DE KOLMOGOROV

C. POLO

Se expone la prueba de ajuste basada en el estadístico D de Kolmogorov en dos situaciones importantes: cuando la función de distribución hipotetizada es continua y completamente especificada, y cuando representa las distribuciones normal, exponencial y de Weibull y se estima el vector paramétrico a partir de los datos. Asimismo se enfoca el estudio del ajuste a distribuciones discretas.

1. INTRODUCCION

Uno de los problemas estadísticos más anti-
guos consiste en considerar si un conjunto -
de valores experimentales, relativos a una o
más características de un cierto fenómeno, -
es compatible con una función de distribución
determinada, válida para la población de la
que se han obtenido los datos; lo cual equi-
vale a investigar si el modelo teórico expli-
ca razonablemente el comportamiento del fenó-
meno considerado.

Este problema sólo tiene sentido cuando la -
subpoblación que forma el conjunto de las ob-
servaciones constituye una muestra aleatoria
de la población. Así, la cuestión se reduce
a decidir si la muestra es compatible con la
ley de probabilidad considerada: se trata, -
pues, de una prueba de hipótesis.

La metodología utilizada para elucidar esta
hipótesis abarca la conocida prueba de χ^2 , -
así como la de Kolmogorov y otras no tan di-
vulgadas (Cramér-von Mises, Kuiper, Watson,
Anderson-Darling, Green-Hegazy); éstas últi-
mas, junto a la de Kolmogorov, se referencian
como pruebas FDE ya que se basan en la compa-
ración de la Función de Distribución Empíri-
ca, $F_n(x)$, con la teórica, $F(x)$.

En el caso en que $F(x)$ es continua y se espe-
cifican sus parámetros, las pruebas FDE son,
en general, más potentes que la de χ^2 . El in-
conveniente radica en que no están, todavía,
suficientemente estudiadas en el caso de dis-

tribuciones discretas, ni cuando se tienen -
que estimar los parámetros que especifican -
 $F(x)$ a partir de la información aportada por
la muestra, si bien, en este caso, investiga-
ciones relativamente recientes permiten su -
utilización en la prueba de tres distribucio-
nes importantes: normal, exponencial y Wei-
bull.

Seguidamente pasamos a exponer la prueba de
Kolmogorov.

2. LA PRUEBA DE KOLMOGOROV

Sea $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$, una n-muestra
al azar de la variable aleatoria, (v.a.), X ,
cuya función de distribución, (f. de d.), es
 $F(x)$, y sea $F_n(x)$ la f. de d. empírica.

La función de los valores muestrales

$$D = \max_{x \in R} |F_n(x) - F(x)|$$

se denomina estadístico de Kolmogorov. Y las
funciones

$$D^+ = \max_{x \in R} (F_n(x) - F(x))$$

y

$$D^- = \max_{x \in R} (F(x) - F_n(x))$$

reciben la designación de estadísticos de --

- C. Polo, de la Càtedra d'Estadística de la E.T.S.E.I.B. Av. Diagonal, 647. Barcelona - 28.
- Article rebut el Novembre del 1979.

Smirnov.

Estos tres estadísticos son de distribución libre para cualquier f. de d. continua, es decir, no presuponen condicionamiento alguno, relativo a la f. de d. $F(x)$, salvo el de ser continua.

En efecto, es evidente que $D = \max(D^+, D^-)$. -- Sean, $Y_1, Y_2, \dots, Y_i, \dots, Y_n$, los n valores muestrales una vez ordenados, de menor a mayor, y definamos

$$Y_0 = -\infty$$

e

$$Y_{n+1} = +\infty$$

Entonces,

$$F_n(x) = i/n \quad \text{para} \quad Y_i \leq x < Y_{i+1}, \quad i=0,1,2,\dots,n$$

y, se tiene,

$$\begin{aligned} D^+ &= \max_{0 \leq i \leq n} \max_{Y_i \leq x < Y_{i+1}} (i/n - F(x)) = \\ &= \max_{0 \leq i \leq n} (i/n - \min_{Y_i \leq x < Y_{i+1}} F(x)), \end{aligned}$$

pero, dado que $F(x)$ es necesariamente no decreciente,

$$\begin{aligned} D^+ &= \max_{0 \leq i \leq n} (i/n - F(Y_i)) = \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} (i/n - F(Y_i)); 0 \right\} \end{aligned}$$

Siendo $F(Y_i)$ el i-ésimo valor ordenado de -- una n-muestra de una v.a. uniforme en el intervalo $[0;1]$, independientemente de $F(x)$, -- con tal que sea una f. de d. continua, ya -- que

$$1. \text{ Evidentemente, } 0 \leq F(Y_i) \leq 1, \text{ y}$$

2. Limitando la prueba, por simplicidad, al caso en que $F(\cdot)$ sea estrictamente creciente,

$$P(F(Y) \leq y) = F(Y \leq F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y,$$

se deduce que la distribución de D^+ es independiente de $F(x)$.

Semejantemente,

$$D^- = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} (F(Y_i) - (i-1)/n); 0 \right\}$$

luego, tal como se indicó, D , D^+ y D^- son estadísticos de distribución libre.

El estadístico D y sus análogos unilaterales (D^+ y D^-), permiten comprobar si una distribución empírica se ajusta razonablemente a -- una determinada f. de d. teórica, planteando la prueba de hipótesis:

Hipótesis nula,

$$H_0: F(x) = F_0(x) \quad \text{para todo } x$$

Hipótesis alternativa,

$$H_1: F(x) \neq F_0(x) \quad \text{para algún } x$$

$$(H_1: F(x) > F_0(x) \text{ con } D^+ \quad \text{para algún } x)$$

$$(H_1: F(x) < F_0(x) \text{ con } D^- \quad \text{para algún } x)$$

donde $F_0(x)$ representa la f. de d. continua, totalmente especificada, respecto a la cual se ensaya el ajuste.

La regla de decisión consiste en rechazar la hipótesis nula si $D > D_\alpha$, ($D^+ > D_\alpha^+$; $D^- > D_\alpha^-$), siendo D_α el valor extremo superior de la distribución del estadístico para el umbral de probabilidad α , riesgo de primera especie, que se considere oportuno especificar.

3. DISTRIBUCIONES DE LOS ESTADÍSTICOS

Los estadísticos D^+ y D^- tienen la misma distribución debido a su simetría, y esa función, en su forma límite, viene dada por el siguiente sistema /3 y 5/:

Teorema de Smirnov

$$P(\sqrt{n}D^+ \leq z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ 1 - \exp(-2z^2) & z > 0 \end{cases}$$

A su vez, el estadístico D presenta la siguiente distribución límite:

Teorema de Kolmogorov

$$P(\sqrt{n}D \leq z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \exp(-2k^2 z^2) & z > 0 \end{cases}$$

Para n finito, dada la simetría de D^+ y D^- , así como $D = \max(D^+, D^-)$, sólo se requiere deducir la distribución de un estadístico, ya -- que las de los otros dos son automáticas. -- Por ello estudiaremos únicamente la de D^+ .

Haciendo

$$U_i = F(Y_i),$$

queda

$$D^+ = \max_{1 \leq i \leq n} ((i/n - U_i); 0)$$

e interesa determinar la probabilidad del -- acontecimiento

$$D^+ \leq z \iff \forall i, \quad i/n - U_i \leq z;$$

además se verifica que

$$0 \leq U_1 \leq U_2 \leq \dots \leq U_i \leq \dots \leq U_n \leq 1,$$

por lo que

$$P(D^+ \leq z) = P\left(\bigcap_i (i/n - U_i \leq z)\right) = P\left(\bigcap_i (U_i \leq i/n - z)\right),$$

Siendo U una v.a. uniforme $[0;1]$, y $\{U_i\}$ una n -muestra ordenada, resulta

$$P(D^+ \leq z) = \int_{1-z}^1 \int_{\frac{n-1}{n}-z}^{u_n} \int_{\frac{n-2}{n}-z}^{u_{n-1}} \dots \int_{\frac{2}{n}-z}^{u_3} \int_{\frac{1}{n}-z}^{u_2} n! \Pi du_i$$

si $0 < z < 1/n$

$$= \int_{1-z}^1 \int_{\frac{n-1}{n}-z}^{u_n} \int_{\frac{n-2}{n}-z}^{u_{n-1}} \dots \int_{\frac{2}{n}-z}^{u_3} \int_0^{u_2} n! \Pi du_i$$

si $1/n \leq z < 2/n$

.....

$$= \int_{1-z}^1 \int_0^{u_n} \int_0^{u_{n-1}} \dots \int_0^{u_3} \int_0^{u_2} n! \Pi du_i$$

si $(n-1)/n \leq z \leq 1$

Un procedimiento análogo recurre a la ley -- multinomial, imponiendo las condiciones

$$U_i \geq i/n - z,$$

$$U_{i-1} \leq U_i \leq U_{i+1},$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad (U_{n+1} \equiv 1),$$

que dividen el intervalo $[0;1]$ en un conjunto de subintervalos, $(n+1)$, en los que deben encontrarse los valores muestrales, y siendo la probabilidad correspondiente igual a la -- magnitud de esos intervalos.

Así, para $n=2$, resulta:

a) Si $0 < z < 1/2$, entonces

$$\begin{cases} 1/2 - z \leq U_1 \leq U_2 \\ 1 - z \leq U_2 \leq 1 \end{cases}$$

Es decir, de las dos observaciones de la v.a. U , una, necesariamente, ha de estar en el intervalo $[1/2-z;1]$, y la otra puede estar en ese mismo intervalo o en el -- $[1/2-z;1-z]$, luego

$$P(D^+ \leq z) = \frac{2!}{0!0!2!} z^2 + \frac{2!}{0!1!1!} \frac{1}{2} z = z(1+z)$$

b) Y si $1/2 \leq z \leq 1$,

$$\begin{cases} 0 \leq U_1 \leq U_2 \\ 1 - z \leq U_2 \leq 1 \end{cases}$$

$$P(D^+ \leq z) = \frac{2!}{0!2!} z^2 + \frac{2!}{1!1!} z(1-z) = 1 - (1-z)^2$$

quedando, para $n=2$,

$$P(D^+ \leq z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ z(1+z) & 0 < z < 1/2 \\ 1 - (1-z)^2 & 1/2 \leq z \leq 1 \\ 1 & z > 1 \end{cases}$$

Similarmemente, para $n=3$,

$$P(D^+ \leq z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ z(1+z)^2 & 0 < z < 1/3 \end{cases}$$

(para $n=3$)

$$P(D^+ \leq z) = \begin{cases} -2z^3 + z^2 + 5z/3 & 1/3 \leq z < 2/3 \\ 1 - (1-z)^3 & 2/3 \leq z \leq 1 \\ 1 & z > 1 \end{cases}$$

etc.

4. DISTRIBUCIONES SIMULADAS

Es frecuente, en la práctica, tener que estimar los parámetros que especifican la distribución teórica, mediante la información facilitada por la muestra. En estos casos no es aplicable la prueba de Kolmogorov, ya que -- las distribuciones de los estadísticos D que dan desvirtuadas; en efecto, la estimación de los parámetros implica una reducción de sus posibles valores, al especificar en la familia de funciones $F(x, \theta)$ aquella que, en cierto sentido, se adapta más a los valores experimentales. Dada la simplicidad de la prueba, potencia, y su posible aplicación -- con muestras reducidas, diversos autores, dadas las dificultades para determinar teóricamente las distribuciones de los estadísticos, han recurrido a su obtención mediante métodos de Monte-Carlo. Las distribuciones y valores críticos definidos así sólo son, naturalmente, aplicables en las condiciones simuladas, es decir, para las distribuciones específicas y estimando los parámetros mediante los procedimientos utilizados por el simulador.

En el Apéndice se dan las expresiones que -- permiten determinar los valores críticos en el caso general, así como los correspondientes a las leyes normal y exponencial cuando se han tenido que estimar sus parámetros. Para la ley de Weibull se dan los valores críticos en forma de tabla. También se indica, en su caso, la forma de estimar los parámetros.

5. CASO DE VARIABLES DISCRETAS

Como se comprobará, si la v.a. respecto a la cual se ensaya un ajuste es discreta, la prueba de Kolmogorov no es de distribución libre.

Sea X una v.a. discreta, que toma los valores $\{x_i\}$, con probabilidades $\{p_i\}$, $i=1,2,\dots$; y sea $X_1, X_2, \dots, X_n$ una n -muestra aleatoria. Ordenando y agrupando los valores muestrales obtendremos la distribución empírica $\{Y_i; n_i\}$; $i=1,2,\dots,r$; $n_i \geq 1$, $\sum n_i = n$, correspondencia entre los valores observados y sus efectivos. Definiendo

$$Y_0 = -\infty,$$

$$Y_{r+1} = +\infty,$$

y

$$n_0 = 0,$$

la f. de d. empírica será:

$$F_n(x) = \sum_{j=0}^i n_j/n \quad \text{para } Y_i \leq x < Y_{i+1}, \quad 0 \leq i \leq r$$

y el estadístico D^+ toma la forma

$$\begin{aligned} D^+ &= \max_{x \in R} (F_n(x) - F(x)) = \\ &= \max_{0 \leq i \leq r} \max_{Y_i \leq x < Y_{i+1}} (F_n(x) - F(x)) \\ &= \max_{0 \leq i \leq r} (F_n(x) - F(Y_i)) \\ &= \max \left[\max_{1 \leq i \leq r} \left(\sum_{j=1}^i n_j/n - F(Y_i) \right); 0 \right] \end{aligned}$$

Si X es una v.a. discreta, que toma sus valores en el conjunto $\{x_i\}$, $i=1,2,\dots$, y $F(x)$ -- su f. de d., $U=F(X)$ es, a su vez, una v.a. discreta ya que, evidentemente, sólo toma los valores $u_i=F(x_i)$ $i=1,2,\dots$, y tal que

$$P(U \leq u_i) = P(F(X) \leq F(x_i)) = P(X \leq x_i) = F(x_i) = u_i$$

es decir, el extremo izquierdo de cada tramo horizontal de su f. de d. queda en la primera bisectriz, véase figura 1-a) y 1-b).

Ello implica que:

a) la prueba no es de distribución libre, y

b) los estadísticos D^+ y D^- no son simétricos, excepto en el caso de que la distribución de la v.a. X sea simétrica, y, además, son v.a. discretas.

Para obtener la distribución de D^+ se debe - calcular la probabilidad del acontecimiento

$$D^+ \leq z \Leftrightarrow \forall i, \sum_{j=0}^i n_j/n - U_i \leq z,$$

cumpléndose, además, las desigualdades

$$0 \leq U_1 < U_2 < \dots < U_r \leq 1$$

Para ello modificaremos ligeramente la notación:

Sea X una v.a. que toma sus valores en el conjunto $\{x_i\}$, con probabilidades $\{p_i\}$, $i=1,2,\dots$; sea $\{n_i\}$, $i=1,2,\dots$, el efectivo asociado a x_i en una n -muestra aleatoria ($n_i=0,1,2,\dots,n$; $\sum n_i=n$); y designemos por P_i la probabilidad acumulada, asociada al valor x_i , es decir

$$P_i = \sum_{j=1}^i p_j$$

En estas condiciones, las desigualdades anteriores se pueden expresar de la forma:

$$\sum_{j=1}^i n_j \leq n(P_i+z), \quad i = 1, 2, \dots$$

Este conjunto de desigualdades nos proporcionará el sistema de vectores muestrales ($n_1, n_2, \dots, n_i, \dots$) que cumplen la condición $D^+ \leq z$, por lo que $P(D^+ \leq z)$ se determinará, entonces, obteniendo la probabilidad relativa a ese sistema incompatible de vectores.

Designando

$$N_i = \sum_{j=1}^i n_j, \quad 0 \leq N_i \leq n$$

tenemos $N_i \leq n(P_i+z)$, luego

$$N_i \leq \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq z < 1/n - P_i \\ 1 & 1/n - P_i \leq z < 2/n - P_i \\ \vdots & \\ i & i/n - P_i \leq z < (i+1)/n - P_i \\ \vdots & \\ n & 1 - P_i \leq z \leq 1 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots$$

Si, en particular, la v.a. X es finita, siendo s el número de sus posibles valores, se ha de cumplir, además,

$$N_s = \sum_{j=1}^s n_j = n$$

Al considerar $i=1,2,\dots$, las anteriores condiciones nos dividen el intervalo $[0;1]$ de posibles valores de z en unos subintervalos en los que $P(D^+ \leq z)$ es constante, los efectivos muestrales ($n_1, n_2, \dots, n_i, \dots$) están definidos y posibilitan la determinación de $P(D^+ \leq z)$, si bien por métodos de enumeración extraordinariamente laboriosos.

Sea por ejemplo, la v.a. X que toma sus valores en el conjunto $\{1,2,3,4,5,6\}$ con equiprobabilidad.

Si $n=2$, las condiciones $N_i \leq n(P_i+z)$ imponen

$$N_1 \leq \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq z < 2/6 \\ 1 & 2/6 \leq z < 5/6 \\ 2 & 5/6 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

$$N_2 \leq \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq z < 1/6 \\ 1 & 1/6 \leq z < 4/6 \\ 2 & 4/6 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

$$N_3 \leq \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq z < 3/6 \\ 2 & 3/6 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

$$N_4 \leq \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq z < 2/6 \\ 2 & 2/6 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

$$N_5 \leq \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq z < 1/6 \\ 2 & 1/6 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

$$N_6 = 2 \quad \text{para todo } z$$

Entonces, en el intervalo $0 \leq z < 1/6$, más pequeño de todos los obtenidos, a partir del origen, se ha de cumplir, para que $D^+ \leq z$, las condiciones siguientes

$$n_1 = n_2 = 0$$

$$n_3 = \{0;1\}$$

$$n_4 = \{0;1\}$$

$$n_5 = \{0;1\}$$

y

$$n_6 = \{1;2\}$$

verificadas por los vectores muestrales

$(0;0;0;0;1;1), (0;0;0;1;0;1), (0;0;1;0;0;1)$

y $(0;0;0;0;0;2),$

luego $P(D^+ \leq z) = 7/36$ si $0 \leq z < 1/6$.

Similarmente,

$$P(D^+ \leq z) = \begin{cases} 16/36 & \text{si } 1/6 \leq z < 2/6 \\ 27/36 & 2/6 \leq z < 3/6 \\ 32/36 & 3/6 \leq z < 4/6 \\ 35/36 & 4/6 \leq z < 5/6 \\ 1 & 5/6 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

Para $n=3$, se obtiene:

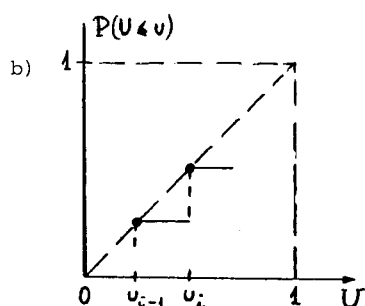
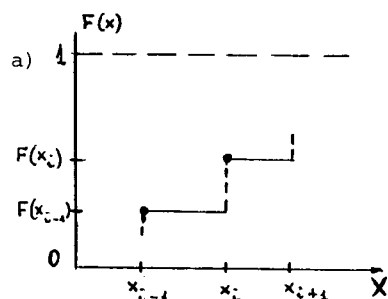


Fig. 1

- a) Función de distribución experimental
b) Función de distribución de la muestra ordenada

$$P(D^+ \leq z) = \begin{cases} 61/3^3 & \text{si } 0 \leq z < 1/6 \\ 128/6^3 & \text{si } 1/6 \leq z < 2/6 \\ 180/6^3 & 2/6 \leq z < 3/6 \\ 208/6^3 & 3/6 \leq z < 4/6 \\ 215/6^3 & 4/6 \leq z < 5/6 \\ 1 & 5/6 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

etc.

Siendo discreta la distribución del estadístico D^+ , la determinación de la región crítica de tamaño α , precisaría de un mecanismo de aleatorización.

Si bien, pues, en el caso discreto, el problema está resuelto conceptualmente, su aplicación práctica queda lejos de ser operativa.

6. BIBLIOGRAFIA

- /1/ BIRNBAUM, Z.W. y TINGEY, F.H., "One-sided confidence contours for probability distributions functions", Ann. Math. Stat., v.22, 1951, pp. 592-596.
- /2/ BIRNBAUM, Z.W., "Numerical Tabulation of the Distribution of the Kolmogorov's Statistic for Finite Sample Size", Journal. Amer. Statist. Ass., v.17, 1952, pp. 425-441.
- /3/ DUGUE, D., "Traité de Statistique Theorique et Appliquée", Masson et Cie. Editeurs, Paris, 1958, pág. 110.
- /4/ FERIGNAC, P., "Prueba de Kolgomorov-Smirnov sobre la validez de una función de distribución", Cuadernos de Est. Aplic. e Inv. Oper., v.2 (3), 1963, pp.189-208.
- /5/ HENNEQUIN, P.L. y TORTRAT, A., "Theorie des probabilités et quelques applications", Masson et Cie. Editeurs, Paris, 1965, -- pág. 331.
- /6/ MOTHES, J. y TORRENS-IBERN, J., "Estadística aplicada a la Ingeniería", Ediciones Ariel, Barcelona, 1970.

/7/ POLO, C., "De la prueba de Kolmogorov",
Novatecnica, v.6, 1971, pp. 21-25.

7. APENDICE

/8/ ROHATGI, V.K., "An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics", John Wiley & Sons, Londres, 1976.

/9/ STEPHENS, M.A., "EDF Statistics for Goodness of Fit and Some Comparisons", Journal Amer. Statist. Ass., v.69, 1974, pp. 347 y 730-737.

Reproducimos, seguidamente, las expresiones, debidas a M.A. Stephens /9/, para la determinación de los valores críticos de los estadísticos D , D^+ y D^- para el caso general, y los particulares relativos a las leyes normal y exponencial, cuando se estiman los correspondientes parámetros. Presentamos, también, una tabla de valores críticos, obtenidos por el autor, específicamente para la ley de Weibull, válida en aquellas ocasiones en que se estiman los parámetros.

Tabla 1
Valores críticos según M.A. Stephens

Estadístico	Medida de la prueba, α			
	0,10	0,05	0,025	0,01
- Valores críticos cuando $F(x)$ es continua y totalmente especificada.				
$D^+ (D^-)$ $D_\alpha^+ (\sqrt{n+0,12+0,11/\sqrt{n}}) =$	1,073	1,224	1,358	1,518
D $D_\alpha (\sqrt{n+0,12+0,11/\sqrt{n}}) =$	1,224	1,358	1,480	1,628
- Valores críticos para la distribución normal; μ y σ^2 estimados por $\bar{x}$ y $s^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 / (n-1)$.				
D $D_\alpha (\sqrt{n-0,01+0,85/\sqrt{n}}) =$	0,819	0,895	0,955	1,035
- Valores críticos para la ley exponencial, $F(x)=1-\exp(-\theta x)$, estimado el parámetro θ por $1/\bar{x}$.				
D $(D_\alpha - 0,2/n) (\sqrt{n+0,26+0,5/\sqrt{n}}) =$	0,990	1,094	1,190	1,308

- Valores críticos para la ley de Weibull, $F(x)=1-\exp(-\alpha x^\beta)$, α y β desconocidos.
En este caso, para estimar los parámetros se ha recurrido a la transformación $\lg \lg(1/(1-F(x))) = \lg \alpha + \beta \lg x$, donde, para cada valor muestral, x , se ha estimado $F(x)$ por $i/(n+1)$, y los parámetros α y β por mínimos cuadrados. En estas condiciones, para obtener la distribución del estadístico D se han simulado 2000 muestras para $n=3, 4$ y 5 , y 1000 para las muestras de mayor tamaño. Esa misma tabla se puede utilizar para los estadísticos D^+ y D^- reduciendo a la mitad los valores de α especificados.

Tabla 2
Valores críticos para la ley de Weibull

Tamaño de la muestra	Medida de la prueba: α				
	10%	7,5%	5%	2,5%	1%
3	.353	.356	.362	.368	.371
4	.329	.339	.351	.363	.378
5	.312	.323	.335	.351	.371
6	.292	.303	.311	.329	.347
7	.281	.289	.305	.319	.339
8	.270	.278	.285	.305	.330
9	.260	.271	2.78	.293	.326
10	.250	.260	.272	.289	.316
11	.239	.247	.263	.276	.298
12	.229	.240	.253	.271	.294

