EL PROBLEMA DE L'ORDENACIÓ NO LINIAL ÒPTIMA ÉS NP-COMPLET

J. DÍAZ

L'article descriu la reducció del Problema del Tall Màxim Simple al Problema de l'Ordenació no Lineal Òptima, la qual cosa implica la pertinença d'aquest últim a la classe NP-Complet.

1. INTRODUCCIÓ

Donat un graf $G(V,E)$ amb $|V|=n$, hi han $n!$ enumeracions possibles (una enumeració és una funció biunívoca $f:V\to\{1,2,\dots,n\}$).

El problema de l'Ordenació No Lineal Òptima (ONLO) consisteix a trobar l'enumeració f_i tal que es minimitzi

$$\sum_{\substack{u,v\in V\\ \{u,v\}\in E}} |f_i(u) - f_i(v)|^2 \leq k$$

per a una constant $k \in Z^+$.

Garey i Jonhson van demostrar que el cas lineal pertany a la classe NP-Complet /2/. Per a una exposició general de la teoria de la complexitat veure /3/ ó /1/.

En aquest treball, per a demostrar que ONLO pertany a NP-Complet seguirem una variant del mètode utilitzat per Garey i Johnson en /2/ per al cas lineal.

El Problema del Tall Màxim Simple (TMS) consisteix en: Donat un graf $G(V,E)$ i una constant $W\in Z^+$, trobar un subconjunt $S \subseteq V$ tal que:

$$\sum_{\substack{\{u,v\}\in E\\ u\in S,\, v\in V-S}} \{u,v\} \geq W$$

Garey i Johnson, també van demostrar que el TMS $\in$ NP-Complet, /2/.

Si tenim un graf Complet (cada vèrtex està connectat amb tots els altres vèrtexs), $G(V,E)$ amb $|V|=n$, i tenim una enumeració $f:V\to\{1,2..n\}$, estudiem el valor numèric de

$$\sum_{\{u,v\}\in E} |f(u) - f(v)|^2$$

Com que tots els vèrtexs estan connectats entre ells, tindrem:

$$|1-2|^2+|1-3|^2+\dots+|1-n|^2+|2-3|^2+|2-4|^2+\dots+$$

$$+|2-n|^2+\dots+|(n-1)-n|^2 = (n-1)(1)^2+(n-2)(2)^2+$$

$$\dots+(n-(n-1))(n-1)^2 = n(1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2)-$$

$$-(1^3+2^3+3^3+\dots+(n-1)^3) =$$

$$= n\sum_{i=0}^{n-1} i^2 - \sum_{i=0}^{n-i} i^3 = n\left(\frac{(n-1)\ n\ (2n-1)}{6}\right) - \left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2 =$$

$$= (n-1)\ n^2\left(\frac{2(2n-1)\ -\ (n-1)\ 3}{12}\right) = \frac{(n-1)n^2(n-1)}{2\cdot 3\cdot 1} =$$

$$= \frac{n}{2}\binom{n+1}{3}$$

En conseqüència podem dir, que per a un graf complet $G(V,E)$ tenim que:

$$\sum_{\{u,v\}\in E} |f(u) - f(v)|^2 = \frac{n}{2}\binom{n+1}{3} \tag{1}$$

Notem que:

$$\binom{n+1}{3} \leq \frac{n^3}{6}$$

2. L'ONLO ÉS NP-COMPLET

Per a demostrar que ONLO $\in$ NP-Complet, esta-

- J. Díaz del Centre de Càlcul de la UPB. Av. Dr. Gregorio Marañón, s/n. Barcelona - 28., i de la FIB, Dolcet, s/n. Barcelona - 34.
- Article rebut el Desembre de 1978.

blirem una reducció en temps polinòmic del -TMS a l'ONLO: TMS $\propto$ ONLO.

Si tenim un input per al TMS, un graf $G(V,E)$, i una constant $W\in Z^+$, hem de construir un input per a l'ONLO, o sia, un graf $G'(E',V')$ i una constant $K\in Z^+$ tal que

$\exists$ una partició $S,S'\subset V$, $(S\cap S'=\emptyset$ i $S\cup S'=V)$ amb

$$\sum_{\{u,v\}\in E} \{u,v\} \geq W$$

si i només si existeix una enumeració f de -V' tal que:

$$\sum_{\{u,v\}\in E'} |f(u) - f(v)|^2 \leq K$$

Construirem $G'(V',E')$ com segueix:

$$V' = V \cup \{u_1,u_2,u_3,\ldots,u_{n^5}\}$$

$$E' = \{\{u,v\}: u\in V', v\in V' \text{ però } \overline{\{u,v\}}\notin E\} \qquad (2)$$

on tenim que $u_1,u_2,\ldots,u_{n^5}$ són extravèrtexs que posem nosaltres.

La constant K tindrà el valor:

$$K = \frac{(n+n^2)}{2}\left(\frac{n^2+n+1}{3}\right) - W\,n^6$$

<u>Teorema: TMS $\propto$ ONLO</u>

Demostració:

($\Rightarrow$) Si tenim que el TMS existeix llavors -- existeix una partició S_1, S_2 de V. Aleshores si tenim, per exemple, que

$S_1 = \{a_1,a_2,\ldots,a_t\}$ i

$S_2 = \{b_1, b_2,\ldots, b_{n-t}\}$, amb

$|S_1| = t$,

podem construir la següent enumeració:

$f(a_i) = i$ per $1\leq i\leq t$

$f(u_i) = t+i$ per $1\leq i\leq n^5$

$f(b_i) = t+n^5+i$ per $1\leq i\leq n-t$

Això serà una enumeració de V'.

Si mirem a (2), fàcilment podem veure -- que E' és el complement de E amb respecte als vèrtexs V', és a dir,

$$E \cup E' = \text{Graf complet en } V' \text{ vèrtexs}$$

Llavors tindrem:

$$\sum_{\{u,v\}\in E'} |f(u)-f(v)|^2 =$$

$$\sum_{\substack{\text{Graf Complet}\\ \text{en } V' \text{ vèrtexs}}} |f(u)-f(v)|^2 - \sum_{\{u,v\}\in E} |f(u)-f(v)|^2 \quad (3)$$

però $(1) \Rightarrow \displaystyle\sum_{\text{Graf Complet}} |f(u)-f(v)|^2 =$

$$= \frac{n^2+n}{2}\left(\frac{n^2+n+1}{3}\right) \qquad (4)$$

També tenim que per qualsevol dos $u,v\in E$,

$$|f(u) - f(v)|^2 > n^6$$

i com que el número d'arestes en G és -- més gran que W

$$\sum_{\{u,v\}} |f(u) - f(v)|^2 > Kn^6 \qquad (5)$$

Utilitzant (3), (4) i (5) tenim:

$$\sum_{\{u,v\}\in E'} |f(u) - f(v)|^2 \leq \frac{n^2+n}{2}\left(\frac{n^2+n+1}{3}\right) -$$

$$- Wn^6 = K$$

cosa que implica

$$\sum_{\{u,v\}\in E'} |f(u) - f(v)|^2 \leq K$$

o sia, que l'ONLO té solució, tal com ho volíem demostrar.

($\Leftarrow$) Assumint que l'entrada del ONLO té solució, hem de demostrar que amb l'entrada del SMT també nos dóna una solució del -TMS.

És a dir, tenim una enumeració

$f: V' \to \{1,2,\ldots,|V'|\}$ tal que:

$$\sum_{\{u,v\}\in E'} |f(u)-f(v)|^2 \leq W$$

per a una constant $W\in Z^+$ i hem de trobar una partició $S,S'\subset V$ i una constant $K\in Z^+$, tal que:

$$\sum_{\substack{\{u,v\}\in E\\ u\in S, v\in V}} \{u,v\} \geq K$$

Si $|V'|=n^5+n$ (per construcció), definirem

$F = \{f \mid f$ és una enumeració de $V'\}$ i

$$W^* = \max_{f\in F} \sum_{\{u,v\}\in E} |f(u) - f(v)|^2$$

Definim ara el conjunt

$$F^* = \{f\in F \mid \sum_{\{u,v\}\in E} |f(u) - f(v)|^2 = W\}$$

és a dir, F^* és el subconjunt de F format per les funcions amb màxima ordenació no lineal.

El nostre objectiu serà de trobar una funció $f\in F^*$ tal que f porti tots els $u_1 \ldots u_{n^5}$ cap una seqüència d'enters consecutius; d'aquesta manera podrem fer:

S_1 = {tots els vèrtexs $v \ni f(v)<f(u_i)$, on $f(u_i)$ és el valor mínim de $f(u_j)$ -- per $j\neq i$ i $1\leq j\leq n^5\}$, i

S_2 = {tots els vèrtexs $v \ni f(v)>f(u_i)\}$,

i tindrem una partició $S_1 S_2$ de V.

Triem una $f\in F^*$ i suposem que no porta els u's cap a enters consecutius.

Definim per

$S_f = \{v\in V \mid f(u_i)<f(v)<f(u_j)$ per a qualsevol u_i i $u_j\}$

Nosaltres volem un f tal que $|S_f| = 0$.

Per a tots els $f\in F$ tindrem que $|S_f|\in Z^+$; aleshores pel principi de l'ordenació perfecta dels enters, Z^+, podem triar un element mínim; diguem que aquest element és $|S_g|$ per a una funció específica $g\in F^*$.

És molt fàcil de veure que per a tal g -- tindrem que $|S_g| = 0$.

$$|S_g| = 0 \Rightarrow S_g=\emptyset \Rightarrow \{v\in V | g(u_i)<g(v)<g(u_j) \ \exists\ u_i\ u_j\} = \emptyset$$

Aleshores tindrem que g porta $u_1, u_2 \ldots u_{n^5}$ cap a consecutius enters.

Definim la partició S_1, S_2 de V com:

$S_1 = \{v\in V \mid g(v)<g(u)\ \forall u\}$

$S_2 = \{v\in V \mid g(v)>g(u)\ \forall u\}$

Clarament $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ i $S_1 \cup S_2 = V$, cosa que implica que S_1, S_2 és una partició de V.

Aleshores tenim per a (2) que:

$$\sum_{\{u,v\}\in E'} |g(u)-g(v)|^2 + \sum_{\{u,v\}\in E} |g(u)-g(v)|^2 =$$

$$= \frac{n^3+n}{2}\binom{n^3+n+1}{3} \qquad (6)$$

Però sabem que

$$\sum_{\{u,v\}\in E'} |g(u)-g(v)|^2 \leq W = \frac{n^3+n}{2}\binom{n^3+n+1}{3} - Kn^6 \qquad (7)$$

(6) i (7) impliquen que

$$\sum_{\{u,v\}\in E} |g(u) - g(v)|^2 \geq Kn^6 \qquad (8)$$

Una altra manera d'escriure (8) és:

$$Kn^6 \leq \sum_{\{u,v\}\in E} |g(u)-g(v)|^2 =$$

$$= \sum_{\substack{u\in S_1\\ v\in S_1}} |g(u)-g(v)|^2 + \sum_{\substack{u\in S_2\\ v\in S_2}} |g(u)-g(v)|^2 +$$

$$+ \sum_{\substack{u\in S_1\\ u\in S_2}} |g(u)-g(v)|^2 \qquad (9)$$

Ara, tenim que:

$$\sum |g(u)-g(v)|^2 \leq \frac{n}{2}\binom{n+1}{3}$$

$$\sum |g(u)-g(v)|^2 \leq \frac{n}{2}\binom{n+1}{3}$$

$$\sum |g(u)-g(v)|^2 \leq (n^2+n)^2 |\{u,v\}\in E | u\in S_1, v\in S_2\}|$$

llavors tindrem que (9) podrà ésser escrita com

$$Kn^6 \leq \frac{n}{2}\binom{n+1}{3} + \frac{n}{2}\binom{n+1}{3} + (n^2+n)^2 .$$

$$\cdot |\{\{u,v\} | \{u,v\}\in E \text{ i } u\in S_1 \text{ i } v\in S_2\}| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Kn^6 \leq \frac{n \cdot n^3}{6} + n^2 \cdot |\{\{u,v\} | u \in S_1,\ v \in S_2\}| +$$

$$+ 2n^4 \cdot |\{\{u,v\} | u \in S_1,\ v \in S_2\}| +$$

$$+ n^6 \cdot |\{\{u,v\} | u \in S_1,\ v \in S_2\}| \qquad (10)$$

Si tenim un graf G(E,V) i una partició -- dels vèrtexs d'aquest graf, $S_1 \cup S_2 = V$, el - nombre màxim de vèrtexs entre els subconjunts de la partició, ocorrerà quan

$$|S_1| = |S_2|$$

Per tant, tindrem que

$$|\{\{u,v\} \ni \{u,v\} \in E,\ u \in S_1 \text{ i } v \in S_2\}| < \frac{n \cdot n}{2} = \frac{n^2}{2}$$

Cosa que implica que podem escriure (10) com:

$$Kn^6 \leq \frac{n^4}{6} + \frac{n^3}{2} + n^6 \cdot |\{\{u,v\} \ni u \in S_1,\ v \in S_2\}| <$$

$$\leq \frac{4n^4}{6} + n^6 \cdot |\{\{u,v\} \ni u \in S_1,\ v \in S_2\}| \text{ però}$$

$$n^6 \cdot (K - |\{\{u,v\} \ni u \in S_1,\ v \in S_2\}|) \leq \frac{n^4}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^6 \cdot (K - |\{\{u,v\} | u \in S_1,\ v \in S_2\}|) \leq \frac{1}{3}$$

i com que K i $|\{\{u,v\} | u \in S_1,\ v \in S_2\}|$ són enters, tindrem que

$$|\{\{u,v\} \ni u \in S_1,\ v \in S_2\}| \geq K$$

la qual cosa significa que tenim solució per al TMS si existeix solució a l'ONLO.

Per tant, l'ONLO pertany a la classe NP-Complet. És a dir, que té la mateixa dificultat de resolució que qualsevol altre problema -- d'aquesta classe.

3. BIBLIOGRAFIA

/1/ DIAZ CORT, J. "Complejidad Problemas Combinatorios". Qüestiió, vol. 2, nº 1, 1978.

/2/ GAREY, M.R., JOHNSON, D.S., STOCKMAYER, L. "Some simplified NP-Complete Graph -- Problems". Theoretical Computer Science, 1, 1976. pp. 137-167.

/3/ KARP, R. "Reducibility Among Combinatorial Problems". Complexity of Computer - Computations. Plenum Press. New York, -- 1972.