

ALGEBRAS DE HOPF ADJUNTAS COMO MODULOS DE HOPF

M.A. López López

Dpto. de Algebra y Fundamentos  
 Universidad de Santiago de Compostela

Abstract Let  $H$  and  $K$  be adjoint Hopf algebras on a 2-Category object,  $H \dashv K$ ,  $K$  with antipode.  $H^\circ$  is a  $K$ -Hopf module.

Comunicación:

Los conceptos de álgebra de Hopf respecto a un cotriple en un objeto  $A$  de una 2-categoría, y de álgebras de Hopf adjuntas, aparecen en Algebras de Hopf respecto a un cotriple de M.A. López López [4]. Introducidas las nociones de  $H$ -módulo de Hopf y  $H$ -comódulo de Hopf sobre un  $A$ -álgebra de Hopf  $H$ , se demuestra que si  $H$  y  $K$  son adjuntas ( $H \dashv K$ ), las categorías de  $H$ -módulos de Hopf y  $K$ -comódulos de Hopf son equivalentes ([4]).

Si  $H \dashv K$ , la estructura de  $H$ -módulo de Hopf de  $H$  no induce, en general, una estructura de  $K$ -módulo de Hopf en  $H$ . El objeto de esta nota es demostrar que en dicha situación adjunta, si  $K$  tiene antípodo entonces  $H^\circ$  ([4]) es un  $K$ -módulo de Hopf.

Sean  $H = (\mathbb{T}, \mathbb{T}, \tau^C)$ , con  $\mathbb{T} = (C, \varepsilon_C, \delta_C)$ ,  $\mathbb{T} = (C, \eta_C, \mu_C)$  y  $K = (\mathbb{D}, \mathbb{S}, \tau^D)$  con  $\mathbb{D} = (D, \varepsilon_D, \delta_D)$ ,  $\mathbb{S} = (D, \eta_D, \mu_D)$ , álgebras de Hopf adjuntas ( $H \dashv K$ ), en el objeto  $A$  de una 2-categoría, siendo  $(C, D, \alpha, \beta)$  el par adjunto correspondiente. Entonces  $H^\circ$  es un  $K$ -comódulo por la derecha. En efecto,  $(C, \mu_C \cdot \tau_C^C)$  es un  $H^\circ$ -módulo por la izquierda, de lo que se deduce ([4]) que  $(C, \rho')$  es un  $K^\circ$ -comódulo por la izquierda, siendo  $\rho' = D(\mu_C^C \cdot \tau_C^C) \cdot \alpha C$ ; por tanto  $(C, \rho)$  es un  $K$ -comódulo por la derecha, siendo  $\rho = \tau_C^D \cdot \rho'$ .

Bajo las mismas hipótesis, si  $K$  es un álgebra de Hopf con antípodo  $\lambda$ , se define:  $\phi := (\beta C) \cdot (C \mu_D) \cdot (C \tau_D^D) \cdot (C \lambda D C) \cdot (C D \alpha)$

y se demuestra que  $(C, \phi)$  es un  $\mathbb{K}$ -módulo por la derecha.

A continuación se comprueba la condición de compatibilidad para que  $(C, \phi, \rho)$  sea un  $\mathbb{K}$ -módulo de Hopf:

$$\rho \cdot \phi = (\phi \mu) \cdot (C\tau_D^D) \cdot (\rho \delta_D)$$

con lo que queda demostrado que, si  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{K}$  son  $A$ -álgebras de Hopf adjuntas en el objeto  $A$  de una 2-categoría,  $\mathbb{H} = (C, \mathbb{T}, \tau^C)$ ,  $\mathbb{K} = (D, S, \tau^D)$ ,  $\mathbb{H} \dashv \mathbb{K}$ . Si  $\mathbb{K}$  tiene antípodo  $\lambda$ , entonces  $\mathbb{H}^\circ$  es un  $\mathbb{K}$ -módulo de Hopf por la derecha.

Si  $R$  es un anillo conmutativo, y  $P$  un  $R$ -módulo proyectivo de tipo finito, entonces  $- \otimes_R P \dashv - \otimes_R P^* \dashv - \otimes_R P$ , en donde  $P^* := \text{Hom}_R(P, R)$ . Si  $\mathbb{K} = (D, S, \tau^{\otimes_R P})$  es un  $\text{Mod}_R$ -álgebra de Hopf respecto al cotriple  $D = (- \otimes_R P, \epsilon, \delta)$ , existe una única estructura de  $\text{Mod}_R$ -álgebra de Hopf  $\mathbb{H} = (C, \mathbb{T}, \tau^{\otimes_R P^*})$  sobre  $- \otimes_R P^*$ , tal que  $\mathbb{H} \dashv \mathbb{K}$ . Por tanto [4],  $\mathbb{H}^\circ \dashv \mathbb{K}^\circ$ . La estructura de  $R$ -álgebra de Hopf inducida en  $P^*$  por  $\mathbb{H}^\circ$  coincide con la estructura de  $R$ -álgebra dual del álgebra de Hopf definida sobre  $P$  por  $\mathbb{K}$  [3]. Las  $R$ -álgebras de Hopf que son  $R$ -módulos proyectivos de tipo finito con antípodo reciben el nombre de álgebras de Hopf finitas [3].

El resultado aquí obtenido, se enuncia para  $\text{Mod}_R$ -álgebras de Hopf en la forma:

" Sea  $\mathbb{H}$  un  $R$ -álgebra de Hopf finita. Entonces  $\mathbb{H}^*$  (dual de  $\mathbb{H}$ ) es un  $\mathbb{H}$ -módulo de Hopf por la derecha" [5].

En un contexto mas general, si  $\mathcal{C}$  es una categoría cerrada simétrica [2], con igualadores y coigualadores, y  $\mathbb{T}$  es un triple en el objeto  $\mathcal{C}$  de la 2-categoría  $\mathcal{C}\text{-cat}$  (la 2-categoría de  $\mathcal{C}$ -categorías,  $\mathcal{C}$ -funtores y  $\mathcal{C}$ -transformaciones naturales) [1], entonces la categoría  $\mathbb{T}_{\mathcal{C}, \mathbb{T}}$  de  $\mathbb{T}$ -álgebras centralizadas es una categoría cerrada simétrica [1]. Si  $P$  es un  $\mathbb{T}$ -álgebra tal que el morfismo canónico

$$\nabla_{P, T, P} : \text{HOM}_{\mathbb{T}}(P, T) \otimes_{\mathbb{T}} P \longrightarrow \text{HOM}_{\mathbb{T}}(P, P)$$

es un isomorfismo de  $\mathbb{T}$ -álgebras por la izquierda y por la derecha, entonces se dice que  $P$  es un objeto profinito en  $\mathbb{T}_{\mathcal{C}, \mathbb{T}}$ . Para tales objetos se pueden obtener  $\mathcal{C}$ -adjunciones:

$$\begin{array}{c} \mathcal{C} ( P \otimes_{\mathbb{T}} - \quad \xrightarrow{\quad} \quad \text{HOM}_{\mathbb{T}}(P, T) \otimes_{\mathbb{T}} - ) \\ \mathcal{C} ( \text{HOM}_{\mathbb{T}}(P, T) \otimes_{\mathbb{T}} - \quad \xrightarrow{\quad} \quad P \otimes_{\mathbb{T}} - ) \end{array} \quad \text{,}$$

que generalizan las ya mencionadas para  $R$ -módulos [M.P. López López: Objetos de Galois sobre un álgebra de Hopf finita. (en preparación)].

El resultado aquí descrito, puede ser planteado en este marco, lo que destaca su naturaleza esencialmente no aditiva.

El original completo de este trabajo aparecerá publicado en Alxebra 26. Dept. Algebra y Fund. Santiago.

#### Bibliografía

- 1 Barja Pérez, J.M. Teoremas de Morita para triples en categorías cerradas. Alxebra 20.Dpt. Algebra y Fund. Santiago (1978).
- 2 Bunge, M. Relative functor categories and categories of algebras. J. of Algebra 2(1969),64-101
- 3 Chase, S.U. ; Sweedler, M.E. Hopf algebras and Galois theory. Lect. Not in Math.97 (1969)
- 4 López López, M.A. Algebras de Hopf respecto a un co-triple .Alxebra 17.Dept. Algebra y Fund. Santiago (1976).
- 5 Pareigis, B When Hopf algebras are Frobenius algebras. J.of Algebra 18(1971), 588-596.
- 6 Sweedler, M.E. Hopf algebras (1969) Benjamin N.Y.