Pub. Mat. UAB
Nº 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

CARACTERITZACIONS LÒGIQUES DE CERTES ÀLGEBRES

Ventura Verdú Solans

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

ABSTRACT:
Lattices, distributive lattices, Hilbert algebras, relatively pseudo-complemented lattices and boolean algebras are structures which often arise in mathematical logic by means of some axioms and Tarski-Lindembaum quotients, or by some valuations and later identifications. In this paper we characterize these structures from a logical point of view, using conditions connecting the operations with the consequence operator which defines the logic.

Sigui S un conjunt no buit i $\wedge$, $\vee$ dues operacions binàries definides en S.

Teorema 1 : $(S, \wedge, \vee)$ és un reticle , on $x \wedge y$ i $x \vee y$ són, respectivament, l'ínfim i el suprem de x,y, si i només si, existeix un operador conseqüència C sobre S tal que per tot $x,y \in S$ es compleix :

1. $C(x,y) = C(x \wedge y)$
2. $C(x) \cap C(y) = C(x \vee y)$
3. $C(x) = C(y) \Rightarrow x = y$ *

La condició 1 s'interpreta fàcilment ja que diu que $x \wedge y$ actúa, des del punt de vista deductiu, com la conjunció de x i y.

La condició 3 reflexa la idea de quocient de Tarski-Lindembaum.

Teorema 2 : $(S, \wedge, \vee)$ és un reticle distributiu on $x \wedge y$ i $x \vee y$ són respectivament, l'ínfim i el suprem de x i y, si, i només si, existeix un operador conseqüència C sobre S tal que per tot $x,y \in S$ i tot $\alpha \leqslant S$, card $(\alpha) \leqslant 1$, es compleix:

1. $C(x,y) = C(x \wedge y)$
2. $C(\alpha ,x) \cap C(\alpha ,y) = C(\alpha ,x \vee y)$
3. $C(x) = C(y) \Rightarrow x = y$ ☆

Les condicions "2" d'aquest teorema i de l'anterior són debilitacions de la condició que a [3] anomenàvem "principi fort de la disjunció", que en el cas en que C és finitari, implica l'existència d'una base de C que compleix un principi clàssic de disjunció, és a dir: si $B \in \mathfrak{B}$, aleshores $x \vee y \in B \Leftrightarrow$ $x \in B$ o bé $y \in B$.

Teorema 3 : $(S,\to,u)$ és una àlgebra de Hilbert si, i només si, existeix un operador conseqüència C sobre S tal que per tot $x,y \in S$ i tot $\alpha \leqslant S$, card $(\alpha) \leqslant 2$, es compleix :

1. $y \in C(\alpha,x) \Leftrightarrow x \to y \in C(\alpha)$
2. $C(x) = C(y) \quad x = y$ ☆

La condició 1 d'aquest teorema és una debilitació del conegut "teorema de la deducció", usual en Lògica Matemàtica.

L'element u és exactament $C(\emptyset)$, la classe de teoremes.

Teorema 4 : $(S,\to, \wedge, \vee)$ és un reticle relativament pseudocomplementat si, i només si, existeix un operador conseqüència C sobre S tal que per tot $x,y \in S$ i tot $\alpha \leqslant S$, card $(\alpha) \leqslant 1$ es compleix:

1. $C(x,y) = C(x \wedge y)$
2. $C(x) \cap C(y) = C(x \vee y)$
3. $y \in C(\alpha ,x) \Leftrightarrow x \to y \in C(\alpha)$
4. $C(x) = C(y) \Leftrightarrow x = y$ ☆

Noti's que és inmediat que $\forall x,y,t \in S$, $t \leqslant x \to y \Leftrightarrow x \to y \in C(t)$ $\Leftrightarrow y \in C(t,x) = C(t \wedge x) \Leftrightarrow t \wedge x \leqslant y$.

Sigui $'$ una operació monària definida en S .

Teorema 5 : $(S, \wedge, ')$ és una àlgebra de Boole on $x \wedge y$ és l'ínfim de x,y i x' és el complement de x si, i només si, existeix un operador conseqüència C sobre S tal que per tot $x,y \varepsilon S$ es compleix :

1. $C(x,y) = C(x \wedge y)$
2. $y \varepsilon C(x) \Longleftrightarrow C(x,y') = S$
3. $C(x) = C(y) \Rightarrow x = y$ ☆

La condició 2 d'aquest teorema és una debilitació del conegut " teorema de reducció a l'absurd" .

Teorema 6 : $(S,v,')$ és una àlgebra de Boole, on $x \vee y$ és el suprem de x,y i x' és el complement de x si, i només si, existeix un operador conseqüència C sobre S tal que per tot $x,y \varepsilon S$ i tot $\alpha \leqslant S$, card $(\alpha) \leqslant 2$, es compleix :

1. $C(x,\alpha) \cap C(y,\alpha) = C(x \vee y,\alpha)$
2. $y \varepsilon C(\alpha) \Longleftrightarrow C(\alpha, y') = S$
3. $C(x) = C(y) \Rightarrow x = y$ ☆

Teorema 7 : $(S,\rightarrow,')$ és una àlgebra de Boole si, i només si, existeix un operador conseqüència sobre S format per sistemes deductius (respecte de $\rightarrow$) tal que per tot $x,y \varepsilon S$ i tot $\alpha \leqslant S$, card $(\alpha) \leqslant 2$ es compleix :

1. $y \varepsilon C(\alpha,x) \Rightarrow x \rightarrow y \varepsilon C(\alpha)$
2. $y \varepsilon C(x) \Longleftrightarrow C(x,y') = S$
3. $C(x) = C(y) \Rightarrow x = y$ ☆

BIBLIOGRAFIA:

[1] BROWN,D - SUSZKO,P : "Abstract Logics". Dissertationes Mathematicae,CII Pgs. 9-40. Warszawa. 1973

[2] RASIOWA,H : "An algebraic approach to non-classical logics ". Studies in Logic .Vol 78.North-Holland , 1974.

[3] VERDU , B : Logiques distributives i booleanes". Stochastica Vol III. nº2. 1979.