Pub. Mat. UAB
Vol. 29 Nº 2-3 Nov. 1985

# UNA INTERPRETACION DE LOS GRUPOS $H_3(G)$ Y $H_5(G)$

Antonio G. Rodicio

ABSTRACT

In this paper we obtain for a free presentation $R \rightarrowtail F \twoheadrightarrow G$ of a group G, exact sequences which relate the (co)homology of G with the (co)homology of certains semidirect products obtained from the groups R and F. As an application we give combinatorial formulae for $H_3(G)$ and $H_5(G)$.

## 1.- INTRODUCCION

Sea G un grupo y $R \rightarrowtail F \twoheadrightarrow G$ una presentación libre de G. Para cada $n \geq 1$ se definen los grupos $R^{(n)}$ y $F^{(n)}$ del siguiente modo:

$$R^{(1)} = R,\ R^{(n)} = R \rtimes R^{(n-1)},\ F^{(1)} = F,\ F^{(n)} = R \rtimes F^{(n-1)}.$$

Para cada G-módulo A demostraremos que existe una sucesión exacta:

$$H_{2n}(G,A) \rightarrowtail H_n(R^{(n)},A) \otimes_G Z \longrightarrow H_n(F^{(n)},A) \twoheadrightarrow H_{2n-1}(G,A)$$

donde Z es el grupo de los números enteros con estructura de G-módulo trivial.

En el caso n = 2 y A = Z esta sucesión coincide con la obtenida por Modi (|2|, teorema 3.4).

Como aplicación daremos una interpretación de los grupos de homología entera $H_3(G)$ y $H_5(G)$.

Otras interpretaciones de $H_3(G)$ han sido dadas en |4| y |5|.

Se tiene también el resultado correspondiente para cohomología, esto es, para $n \geqslant 1$ y A G-módulo existe una sucesión exacta:

$$H^{2n-1}(G,A) \rightarrowtail H^n(F^{(n)},A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(Z,H^n(R^{(n)},A)) \twoheadrightarrow H^{2n}(G,A).$$

A la vista de estas sucesiones se puede afirmar que el cálculo de la (co)homología de cualquier grupo se reduce al cálculo de la (co)homología de productos semidirectos donde sólo intervienen grupos libres.

## 2.-LA EXACTITUD DE LA SUCESION

Lema 1: Se verifica:

$c.d.(R^{(n)}) \leqslant n$, $c.d.(F^{(n)}) \leqslant n$, donde c.d. denota dimensión cohomológica.

Demostración

Demostraremos sólo la primera parte ya que la otra es análoga. Para $n = 1$ es cierto ya que R es un grupo libre. Si suponemos que es cierto para $n-1$, entonces de la extensión $R \rightarrowtail R^{(n)} \twoheadrightarrow R^{(n-1)}$ se deduce:

$$c.d.(R^{(n)}) \leqslant c.d.(R) + c.d.(R^{(n-1)}) \leqslant 1+n-1 = n \;///.$$

Lema 2: Si A es un G-módulo y $n \geqslant 2$, se tienen isomorfismos:

a) $H_n(R^{(n)},A) \simeq H_1(R,H_{n-1}(R^{(n-1)},A))$

b) $H_n(F^{(n)},A) \simeq H_1(F,H_{n-1}(R^{(n-1)},A))$

donde las acciones están dadas del siguiente modo: se tiene una extensión $R^{(n)} \rightarrowtail F^{(n)} \twoheadrightarrow G$ con lo que A es un $F^{(n)}$-módulo y un $R^{(n)}$-módulo trivial. Además existe una acción de G sobre la homología de $R^{(n)}$ (ver, por ejemplo, |3|, pag. 307). Entonces cada $H_{n-1}(R^{(n-1)},A)$ es un F-módulo y un R-módulo trivial.

Demostración

Demostraremos sólo la parte a) pues b) se hace analogamente.

Para $n = 2$, consideremos la extensión $R \rightarrowtail R \rtimes R \twoheadrightarrow R$ y la sucesión espectral de Lyndon-Hochschild-Serre:

$$E^2_{r,s} = H_r(R, H_s(R,A)) \Longrightarrow H_k(R \quad R, A), \; k = r + s.$$

Por el lema 1 $E^2_{r,s} = 0$ si $r > 1$, $s > 1$. Luego la sucesión espectral degenera y se tiene un isomorfismo: $H_2(R \rtimes R, A) \simeq H_1(R, H_1(R,A))$.

Podemos razonar ahora por inducción sobre n. Se tiene una extensión $R \rightarrowtail R^{(n)} \twoheadrightarrow R^{(n-1)}$ y la correspondiente sucesión espectral

$$E^2_{r,s} = H_r(R^{(n-1)}, H_s(R,A)) \Longrightarrow H_k(R^{(n)}, A), \; k = r + s.$$

La degeneración de esta sucesión produce un isomorfismo

$$H_n(R^{(n)}, A) \simeq H_{n-1}(R^{(n-1)}, H_1(R,A)).$$

Por inducción este último grupo es isomorfo a

$$H_1(R, H_{n-2}(R^{(n-2)}, H_1(R,A))).$$

Para terminar es suficiente demostrar:

$$H_{n-2}(R^{(n-2)}, H_1(R,A)) \simeq H_{n-1}(R^{(n-1)}, A).$$

Consideremos la extensión $R \rightarrowtail R^{(n-1)} \twoheadrightarrow R^{(n-2)}$. La degeneración de la sucesión espectral asociada:

$$E^2_{r,s} = H_r(R^{(n-2)}, H_s(R,A)) \Longrightarrow H_k(R^{(n-1)}, A), \; k = r + s$$

da lugar al isomorfismo buscado ///.

Demostraremos ahora la exactitud de la sucesión mencionada en la introducción.

Consideremos la sucesión de cinco términos (|3|, teorema 11.6) asociada a la extensión $R \rightarrowtail F \twoheadrightarrow G$ y al F-módulo $H_{n-1}(R^{(n-1)}, A)$:

$$H_2(F,H_{n-1}(R^{(n-1)},A)) \longrightarrow H_2(G,H_{n-1}(R^{(n-1)},A)\otimes_R Z) \longrightarrow$$
$$H_1(R,H_{n-1}(R^{(n-1)},A))\otimes_G Z \longrightarrow H_1(F,H_{n-1}(R^{(n-1)},A)) \longrightarrow$$
$$H_1(G,H_{n-1}(R^{(n-1)},A)\otimes_R Z) \longrightarrow 0$$

El primer término de la sucesión es nulo por ser F un grupo libre. Por otra parte $H_{n-1}(R^{(n-1)},A)\otimes_R Z \simeq H_{n-1}(R^{(n-1)},A)$ puesto que la acción de R sobre $H_{n-1}(R^{(n-1)},A)$ es trivial. Teniendo en cuenta el lema 2 es suficiente demostrar:

$H_2(G,H_{n-1}(R^{(n-1)},A)) \simeq H_{2n}(G,A)$

$H_1(G,H_{n-1}(R^{(n-1)},A)) \simeq H_{2n-1}(G,A)$.

Considerando la sucesión espectral asociada a la extensión $R \rightarrowtail F \twoheadrightarrow G$ y al F-módulo $H_{n-2}(R^{(n-2)},A)$, por ser R un grupo libre, se deduce (|3|, Ej. 11.31)

$H_4(G,H_{n-2}(R^{(n-2)},A) \simeq H_2(G,H_1(R,H_{n-2}(R^{(n-2)},A)))$.

Por el lema 2 este último grupo es isomorfo a

$$H_2(G,H_{n-1}(R^{(n-1)},A)).$$

Analogámente: $H_1(G,H_{n-1}(R^{(n-1)},A)) \simeq H_3(G,H_{n-2}(R^{(n-2)},A))$. Repitiendo este razonamiento n veces se obtienen los isomorfismos buscados.

3.-<u>UNA INTERPRETACION DE</u> $H_3(G)$ <u>Y</u> $H_5(G)$

Para n = 1 y A = Z la sucesión se convierte en

$$H_2(G) \rightarrowtail R_{ab}\otimes_G Z \longrightarrow F_{ab} \twoheadrightarrow G_{ab}.$$

Dado que $R_{ab}\otimes_G Z \simeq R/[F,R]$, se obtiene la fórmula de Hopf:

$$H_2(G) \simeq \frac{R \cap [F,F]}{[F,R]}.$$

Consideremos ahora el caso n = 2, A = Z:

$$H_4(G) \rightarrowtail H_2(R \wr R)\otimes_G Z \longrightarrow H_2(F \wr F) \twoheadrightarrow H_3(G).$$

Teniendo en cuenta el epimorfismo canónico

$$H_2(R \rtimes R) \twoheadrightarrow H_2(R \rtimes R) \otimes_G Z$$

se obtiene una sucesión exacta por la derecha:

$$H_2(R \rtimes R) \longrightarrow H_2(R \rtimes F) \twoheadrightarrow H_3(G).$$

Sea $K \rightarrowtail L \twoheadrightarrow R \rtimes F$ una presentación libre de $R \rtimes F$ y consideremos el diagrama cartesiano:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & S \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\blacksquare" near start] & R \rtimes R \arrow[d, tail] \\
K \arrow[r, tail] & L \arrow[r, two heads] \arrow[dr] & R \rtimes F \arrow[d] \\
 & & G
\end{tikzcd}$$

Utilizando la fórmula de Hopf:

$$H_2(R \rtimes R) \simeq \frac{K \cap [S,S]}{[S,K]} \ , \quad H_2(R \rtimes F) \simeq \frac{K \cap [L,L]}{[L,K]}.$$

$H_3(G)$ es el conucleo del homomorfismo inducido entre estos dos grupos. Por tanto:

$$H_3(G) \simeq \frac{K \cap [L,L]}{(K \cap [S,S])[L,K]}.$$

Consideremos ahora la sucesión para $n = 3$ y $A = Z$:

$$H_6(G) \rightarrowtail H_3(R \rtimes (R \rtimes R)) \otimes_G Z \longrightarrow H_3(R \rtimes (R \rtimes F)) \twoheadrightarrow H_5(G).$$

Por la misma razón que antes existe una sucesión exacta por la derecha:

$$H_3(R \rtimes (R \rtimes R)) \longrightarrow H_3(R \rtimes (R \rtimes F)) \twoheadrightarrow H_5(G).$$

Sea $K \rightarrowtail L \twoheadrightarrow R \rtimes (R \rtimes F)$ una presentación libre de $R \rtimes (R \rtimes F)$ y consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & S \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\blacksquare"] & R \wr (R \wr R) \arrow[d, tail] \\
K \arrow[r, tail] & L \arrow[r, two heads] \arrow[dr] & R \wr (R \wr F) \arrow[d] \\
 & & G
\end{tikzcd}$$

De la extensión $K \rightarrowtail S \twoheadrightarrow R \wr (R \wr R)$ se obtiene una sucesión exacta por la derecha

$$H_2(K \wr K) \longrightarrow H_2(K \wr S) \twoheadrightarrow H_3(R \wr (R \wr R))$$

y de la extensión $K \rightarrowtail L \twoheadrightarrow R \wr (R \wr F)$ una sucesión exacta por la derecha

$$H_2(K \wr K) \longrightarrow H_2(K \wr L) \twoheadrightarrow H_3(R \wr (R \wr F)).$$

De estas dos sucesiones se obtiene fácilmente la sigiente:

$$H_2(K \wr S) \longrightarrow H_2(K \wr L) \twoheadrightarrow H_5(G).$$

Sea $K' \rightarrowtail L' \twoheadrightarrow K \wr L$ una presentación libre de $K \wr L$ y consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
K' \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & S' \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\blacksquare"] & K \wr S \arrow[d, tail] \\
K' \arrow[r, tail] & L' \arrow[r, two heads] \arrow[dr] & K \wr L \arrow[d] \\
 & & G
\end{tikzcd}$$

Calculando los grupos $H_2(K \wr S)$ y $H_2(K \wr L)$ mediante la fórmula de Hopf y el conucleo del homomorfismo inducido se deduce:

$$H_5(G) \simeq \frac{K' \cap [L', L']}{(K' \cap [S', S'])[L', K']}.$$

REFERENCIAS

1. HILTON, P.J., STAMMBACH, U. A Course in Homological Algebra. G.T.M. 4. Springer, 1970.
2. MODI, K. Simplicial Methods and the Homology of Groups. Ph. D. Thesis. Queen Mary College. Univ. of London, 1976.
3. ROTMAN, J. An Introduction to Homological Algebra. Academic Press, 1979.
4. BROWN, R., LODAY, J.L. Excision Homotopique in Basse Dimension. C. R. Acad. Sc. Paris, T. 298, série I, n°15 (1984) 353-356.
5. SIERADSKI, A.J. A Combinatorial Interpretation of the Third Integral Homology of a Group. J. Pure Appl. Alg. 33 (1984) 81-96.

*Rebut el 24 d'abril del 1985*

Departamento de Algebra y Fundamentos
Facultad de Matemáticas
Universidad de Santiago de Compostela
ESPAÑA