Pub. Mat. UAB
Vol. 28 Nº 1 Maig 1984

ARITMÈTICA I ANÀLISI FORMALMENT RECURSIVES

Francesc Tomàs

1. Introducció

Representem per $\mathbb{N}$ el conjunt dels naturals, el zero inclòs. Considerem funcions de $\mathbb{N}^r$ en $\mathbb{N}$, per tots els naturals r, entenent que una funció de $\mathbb{N}^0$ en $\mathbb{N}$ no és res més que un element de $\mathbb{N}$.

Si f és una funció de $\mathbb{N}^{n+1}$ en $\mathbb{N}$, representem per f_E la funció de $\mathbb{N}^n$ en $\mathbb{N}$ definida de la manera següent:

$$f_E(x_1,\ldots,x_n)=\begin{cases}1, \text{ si hi ha algun natural y tal que } f(x_1,\ldots,x_n,y)=0\\ 0, \text{ en cas contrari}\end{cases}$$

Si $f_E(x_1,\ldots,x_n)=1$ per cada col·lecció de naturals $x_1,\ldots,x_n$, aleshores definim la funció f_M de $\mathbb{N}^n$ en $\mathbb{N}$ com

$$f_M(x_1,\ldots,x_n)=\text{mínim natural } y \text{ tal que } f(x_1,\ldots,x_n,y)=0$$

Ens interessa considerar una classe de funcions, que denotarem per R', que és la mínima classe de funcions de $\mathbb{N}^r$ en $\mathbb{N}$, amb r no fix, que satisfà les condicions següents:

R'.1. Les funcions constants, la funció successor ($S(x)=x+1$) i les funcions projeccions ($p_i(x_1,\ldots,x_n)=x_i$) pertanyen a R'.

R'.2. Si $f:\mathbb{N}^n\to\mathbb{N}$ i $g:\mathbb{N}^{n+2}\to\mathbb{N}$ pertanyen a R' i la funció $h:\mathbb{N}^{n+1}\to\mathbb{N}$ té les propietats

$$h(x_1,\ldots,x_n,0)=f(x_1,\ldots,x_n)$$

$$h(x_1,\ldots,x_n,S(y))=g(x_1,\ldots,x_n,y,h(x_1,\ldots,x_n,y))$$

per cada $(x_1,\ldots,x_n,y)$ de $\mathbb{N}^{n+1}$, aleshores h també pertany a R'.

R'.3. Si $f:\mathbb{N}^n\to\mathbb{N}$ pertany a R' i, per $j=1,\ldots,n$, les funcions $g_j:\mathbb{N}^m\to\mathbb{N}$ pertanyen a R', aleshores la composició h, definida com

$$h(y_1,\ldots,y_m)=f(g_1(y_1,\ldots,y_m),\ldots,g_n(y_1,\ldots,y_m)),$$

també pertany a R'.

R'.4. Si $f(x_1,\ldots,x_n,y)$ pertany a R' i $f_E(x_1,\ldots,x_n)=1$ per cada $(x_1,\ldots,x_n)$, aleshores $f_M(x_1,\ldots,x_n)$ també pertany a R'.

R'.5. Si $f(x_1,\ldots,x_n,y)$ pertanya R', aleshores $f_E(x_1,\ldots,x_n)$ també pertany~~a~~ R'.

És un sobreentès que les funcions que s'obtenen de funcions de R' per permutacions de les variables són també funcions de R'. Convenim en que si $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ pertany a R' també hi pertany la funció g definida com $g(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})=f(x_1,\ldots,x_n)$.

La mñima classe de funcions que satisfà les tres primeres condicions és la de les <u>recursives primitives</u>. La mínima que satisfa les quatre primeres és la de les <u>recursives</u> o <u>diofàntiques</u> (vegi's, al respecte, l'article [2] de Davis, per exemple). És clar que totes les funcions recursives són computables. Té una gran acceptació la tesi de Church, que afirma que les funcions recursives són les úniques funcions computables de n-ades de naturals en naturals. També tenen gran importancia en la demostració del teorema d'incompletesa de Gödel.(Vegi's [1], per exemple).

En el present article es tracta de mostrar la importància que pot tenir la classe R' en relació a l'anàlisi recursiva i en problemes de fonamentació.

Recordem que l'anomenada aritmètica recursiva apareix, a mans de Skolem, com una manera de desenvolupar l'aritmètica sense fer ús no constructiu dels quantificadors lògics, amb la idea que aquest ús pot generar paradoxes. El resultat del treball de Skolem és una presentació de l'aritmètica desenrotllada constructivament (veure [3] o [4], per exemple). L'anàlisi recursiva consisteix en portar la mateixa idea a l'anàlisi, per a obtenir-ne un desenvolupament constructiu. Així, una successió recursiva de racionals no negatius serà una parella, f(n), g(n), de funcions recursives tal que $g(n)\neq 0$ per cada n. La successió sera

$$\frac{f(0)}{g(0)}, \frac{f(1)}{g(1)}, \frac{f(2)}{g(2)}, \ldots$$

Si no volem usar funcions que no siguin recursives, per a mostrar que una tal successió és de Cauchy haurem d'exhibir una funció recursiva h(n) tal que

$$\left|\frac{f(r)}{g(r)} - \frac{f(s)}{g(s)}\right| < \frac{1}{n} \qquad \text{sempre que } r>h(n) \text{ i } s>h(n)$$

Pero es dóna el cas (veure [6], per exemple) que hi ha successions com les anteriors que són creixents i afitades superiorment per a les quals no hi ha cap h(n) que sigui recursiva i satisfaci la condició de Cauchy. Això fa que l'anàlisi recursiva sigui insatisfactòria des del punt de vista matemàtic.

Una raó per la que la classe R' pot ser important és que el fenomen anterior no es presenta si substituïm les funcions recursives per les de R'. Es a dir: si f i g pertanyen a R' i la successió és monotona i afitada, podem trobar la h que necessitem en la classe R'. Cal recordar, però, que la raó de voler desenvolupar l'anàlisi en base a les funcions recursives és que un tal desenvolupament és constructiu; i deixa de ser-ho si ens basem en les funcions de R', ja que aquestes no són, en general, computables. Malgrat això dedicarem una secció, la 3, a fer acceptable, des del punt de vista matemàtic, la idea de recolzar l'anàlisi en les funcions de R'. En la secció 4 reprendrem el punt de vista de la fonamentació i veurem els avantatges que pot tenir, pel que fa a consistència, un desenvolupament de l'anàlisi en base a R', en comparació amb altres desenvolupaments no constructius. El formalisme que es proposa a la secció 4 és de mena recursiva, cosa que justifica el títol de l'article. La secció 2 es dedica a obtenir una caracterització de la classe R'; les idees que s'usen a [2] per a caracteritzar les funcions recursives com a diofàntiques ens dónen facilment una caracterització de les funcions de R' com a "ultradiofàntiques" (abreujat UD)

La secció 4 és un refinament de [7]. Aquesta secció és independent de la 2 i la 3. No s'estudia quina és la relació que potser hi ha entre el formalisme que es proposa i l'anàlisi matemàtica constructiva de la que es parla a [8].

2. Conjunts i funcions ultradiofàntics

Com que ens referim a [2] cal dir que Davis considera el conjunt dels enters positius, en lloc de $\mathbb{N}$, de manera que les funcions que ell anomena recursives no són les mateixes que anomenem així a la introducció,perquè difereixen en domini i codomini. Pero l'article de Davis es pot repensar, per així dir-ho, posant naturals en lloc d'enters positius. D'altra banda, l'exposició que farem sera autosuficient, llevat de punts no essencials.

2.1. Definició. Un subconjunt A de $\mathbb{N}^n$ és diofàntic si hi ha algun $f(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)\in \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m]$ tal que

$$(x_1,\ldots,x_n)\in A \Leftrightarrow (\exists y_1,\ldots,y_n)[f(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)=0],$$

on s'entén que $y_1,\ldots,y_m$ han de ser naturals.

2.2. Definició. Una funció f de $\mathbb{N}^r$ en $\mathbb{N}$ és diofàntica si la seva gràfica és un conjunt diofàntic.

A [2] es demostra que les funcions recursives coincideixen amb les diofàntiques. No usarem aquest fet.

Ara volem definir una classe de conjunts que anomenarem ultradiofàntics, abreujat UD. Per a fer-ho haurem de parlar de predicats UD. Entendrem per predicats les afirmacions relatives a col·leccions finites de variables, susceptibles de ser verdaderes o falses cada vegada que aquestes variables són substituides per naturals. En el procés de definició dels predicats UD ens referirem a "expressions polinomials en $x_1,\ldots,x_n$" en lloc de referir-nos a "polinomis en $x_1,\ldots,x_n$". Així, direm que les expressions

$$(2x-y)y+(1-y)(2x+3)+zy^2-(3+2x),$$

$$zy^2-y(y+3),$$

són expressions polinomials diferents, a desgrat de ser expressions del mateix polinomi yz^2-y^2-3y. Aquest polinomi pot ser pensat com a polinomi en y i z, o en x, y i z, o en w, x, y, z, etc; pero en canvi podem afirmar que en la primera expressió hi apareixen les variables x, y i z, i cap altra, mentre que en la segona hi apareixen y i z, i només elles. Aquesta és la mena de distinció que volem fer. Si representem una expressió polinomial per $f(x_1,\ldots,x_n)$ estarem suposant que en l'expressió hi apareixen les variables $x_1,\ldots,x_n$, i cap altra.

Donarem a continuació la definició dels predicats UD, al mateix temps que direm en quins casos una variable apareix <u>lliure</u> en un tal predicat,i en quins casos hi apareix <u>lligada</u>.

2.3. <u>Definició</u>.

PUD.1. Si $f(x_1,\ldots,x_n)$ és una expressió polinomial amb coeficients enters, la formula $f(x_1,\ldots,x_n)=0$ és un predicat UD, en el que no hi apareix cap variable lligada i en el que totes les x_i, per $1\leq i\leq n$, hi apareixen lliures.

PUD.2. Si P és un predicat UD, la seva negació $\neg P$ és un predicat UD. Les variables que apareixen lliures (lligades) en $\neg P$ són les que apareixen lliures (lligades) en P.

PUD.3. Si P i Q són predicats UD i no hi ha cap variable que aparegui lliure en un d'ells i lligada en l'altre, aleshores $P\vee Q$, $P\&Q$ i $P\Rightarrow Q$ són predicats UD. Les variables que apareixen lliures (lligades) en qualsevol d'aquests són les que apareixen lliures (lligades) en P o en Q.

PUD.4. Si P és un predicat UD i la variable x no apareix lligada en P, aleshores $(\forall x)P$ i $(\exists x)P$ són predicats UD, si entenem que el domini dels quantificadors és $\mathbb{N}$. En cada un d'ells x hi apareix lligada; i les altres variables que hi apareixen lligades són les que apareixen lligades en P. Les variables que hi apareixen lliures són les variables diferents de x que apareixen lliures en P.

PUD.5. Un predicat és UD únicament per combinació de les raons anteriors.

Si $x_1,\ldots,x_n$ són totes les variables que apareixen lliures en un predicat ultradiofàntic P, és clar que P és un predicat relatiu a aquestes variables; pero P també és (o el podem pensar com) un predicat relatiu a $x_1,\ldots,x_n$, $x_{n+1},\ldots,x_m$, per qualssevol variables $x_{n+1},\ldots,x_m$. Per indicar que pensem en P com predicat relatiu a $x_1,\ldots,x_r$, l'escrivim $P(x_1,\ldots,x_r)$. L'única condició que ha de satisfer la col·lecció $x_1,\ldots,x_r$ és la de contenir totes les variables que apareixen lliures en P, encara que convé, per raons de claredat, que aquesta col·lecció no contingui cap variable que aparegui lligada en P.

Nota. El predicat $(\exists x)[y+1+x-z=0] \vee (\exists v)[x+1+v-z=0]$ no és UD, segons la definició que hem donat; pero és equivalent a $(\exists u)[y+1+u-z=0] \vee$ $(\exists v)[x+1+v-z=0]$, que si que n'és. Això mostra que la limitació que sembla imposar PUD.3 només és aparent.

2.4. Definició:

CUD. Un subconjunt A de $\mathbb{N}^n$ és UD si hi ha algun predicat ultradiofàntic $P(x_1,\ldots,x_n)$ tal que, per qualssevol naturals $a_1,\ldots,a_n$,

$$(a_1,\ldots,a_n)\in A \Leftrightarrow P(a_1,\ldots,a_n)$$

FUD. Una funció de $\mathbb{N}^n$ en $\mathbb{N}$ és UD si la seva gràfica és UD.

La caracterització que ens interessa és la seguent:

2.5. Teorema. La classe R' consta precisament de les funcions UD.

La demostració serà conseqüència d'un seguit de lemes i consideracions.

2.6. Lema. Les funcions suma i producte de naturals pertanyen a R'.

Tenim $a+0=a$ i $a+S(b)=S(a+b)$. Fem $f(x)=x$ i $g(x,y,z)=S(z)$. Per R'.1, $f\in R'$. Si $p(x,y,z)=z$, $p\in R'$, per R'.1; i, com que $g(x,y,z)= S(p(x,y,z))$ i $S\in R'$, tindrem que $g\in R'$, per R'.3. De manera que la suma pertany a R', per R'.2. De manera semblant, donat que $a\cdot 0=0$ i $a\, S(b)=(a\cdot b)+a$, podem veure que el producte pertany a R'.

2.7. <u>Lema</u>. La suma i el producte de dues funcions de R' (amb mateix domini) pertanyen a R'.

Efectivament, perque són les composicions d'aquestes funcions amb la suma i amb el producte, i pertanyen a R' per R'.3.

<u>Corol lari</u>. Cada polinomi amb coeficients naturals pertany a R'.

2.8. <u>Lema</u>. La funció P de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, definida com

$$P(x)=\begin{cases} x-1, & \text{si } x>0 \\ 0, & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

pertany a R'.

Tenim $P(0)=0$ i $P(S(y))=y$. Si, en R'.2, fem $n=0$, $f=0$ i $g(y,z)=y$ veurem fàcilment que P R'.

2.9. <u>Lema</u>. La funció $x\dot{-}y$, definida com

$$x\dot{-}y=\begin{cases} x-y, & \text{si } x\geq y \\ 0, & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

pertany a R'.

La demostració és tan fàcil com les anteriors, si observem que $x\dot{-}0=x$ i $x\dot{-}S(y)=P(x\dot{-}y)$.

<u>Corol lari</u>. Si f i g són funcions de R' amb el mateix domini, $f\dot{-}g\in R'$.

2.10. <u>Lema</u>. Si f i g són funcions de $\mathbb{N}^n$ en $\mathbb{N}$ que pertanyen a R', aleshores la funció $D_{f,g}$, definida com $D_{f,g}=(f\dot{-}g)+(g\dot{-}f)$, pertany a R' i tenim, per cada $(x_1,\ldots,x_n)$ de $\mathbb{N}^n$,

$$D_{f,g}(x_1,\ldots,x_n)=0 \Leftrightarrow f(x_1,\ldots,x_n)=g(x_1,\ldots,x_n)$$

La demostració és trivial.

2.11. <u>Lema</u>. Si $f(x_1,\ldots,x_n)$ és un polinomi amb coeficients enters, hi ha una funció D_f en R' tal que, per qualsevol $(x_1,\ldots,x_n)$ de $\mathbb{N}^n$,

$$D_f(x_1,\ldots,x_n)=0 \Leftrightarrow f(x_1,\ldots,x_n)=0$$

El polinomi f es pot expressar com $f=g-h$, on g i h són polinomis amb coeficients naturals. Podem escollir D_f com la $D_{g,h}$ del lema anterior.

Direm ara que una llista finita

$$A_1,\ldots,A_r,$$

on cada A_i és subconjunt de $\mathbb{N}^{n(i)}$, per algun $n(i)$, és una <u>construcció de conjunts</u> UD si cada A_i satisfa una de les condicions següents:

C.1. $A_i=\{(x_1,\ldots,x_{n(i)}):\ f(x_1,\ldots,x_{n(i)})=0\}$, per algun $f\in\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_{n(i)}]$.

C.2. $A_i=\{(x_1,\ldots,x_{n(i)}):\ (x_1,\ldots,x_{n(i)})\notin A_j\}$, per algun $j<i$.

C.3. $A_i=A_j\cup A_k$, per alguns j, k menors que i.

C.4. $A_i=\{(x_1,\ldots,x_{n(i)}):\ (\exists y)\ (x_1,\ldots,x_{n(i)},y)\in A_j\}$, per algun $j<i$.

Volem demostrar que cada conjunt UD és membre d'alguna construcció de conjunts UD. Observem en primer lloc que tots els predicats UD es poden escriure sense usar els signes &, $\Rightarrow$ i $\forall$, degut a que P&Q és equivalent a $\neg(\neg P\vee\neg Q)$, $P\Rightarrow Q$ és equivalent a $\neg P\vee Q$ i $(\forall x)P$ és equivalent a $\neg(\exists x)(\neg P)$. Considerem, doncs, els predicats UD expressats usant únicament $\neg$, $\vee$, i $\exists$. Veurem que cada conjunt ultradiofàntic A és membre d'una construcció de conjunts UD per inducció sobre el nombre de vegades que apareixen signes lògics del conjunt $\{\neg,\vee,\exists\}$ en un predicat UD que defineixi A. Si en un tal predicat P no apareix cap d'aquests signes, $A=\{(x_1,\ldots,x_n):\ f(x_1,\ldots,x_n)=0\}$, per algun $f\in\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]$, i A és el membre únic d'una construcció de conjunts UD. En cas contrari P és d'alguna de les formes

$$\neg Q,\ P_1\vee P_2,\ (\exists x)Q$$

En el primer cas, en Q apareixen menys signes logics que en $\neg Q$, i per hipotesi qualsevol conjunt A' definit per Q és membre d'una construcció de conjunts UD. Si pensem $\neg Q$ com predicat en $x_1,\ldots,x_n$, pensem també a Q com a predicat en aquestes variables, i el conjunt A serà el complement de A'. Si A' és membre de la construcció $A_1,\ldots,A_r$, aleshores $A_1,\ldots,A_r,A$ també és una construcció (de conjunts UD), segons C.2. Els altres casos es tracten amb la mateixa facilitat.

2.12. <u>Lema</u>. Si A és un subconjunt UD de $\mathbb{N}^n$, hi ha en R' alguna funció f tal que

$$A=\{(x_1,\dots,x_n):\ f(x_1,\dots,x_n)=0\}$$

Per les observacions anteriors és suficient el demostrar que cada membre de qualsevol construcció de conjunts UD té aquesta propietat. Considerem la construcció

$$A_1,\dots,A_r.$$

Farem la demostració per inducció sobre l'index i de A_i. Posarem n en lloc de n(i). Tenim, per començar,

$$A_1=\{(x_1,\dots,x_n):\ f(x_1,\dots,x_n)=0\},$$

on $f\in\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$. Segons el lema 2.11,

$$A_1=\{(x_1,\dots,x_n):\ D_f(x_1,\dots,x_n)=0\},$$

i $D_f\in R'$. Suposem que $A_1,\dots,A_{i-1}$ tenen la propietat del lema, i considerem A_i. Si $A_i=\{(x_1,\dots,x_n):\ g(x_1,\dots,x_n)=0\}$, on $g\in\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$, procedim com per A_1. Si $A_i=\{(x_1,\dots,x_n):\ (x_1,\dots,x_n)\notin A_j\}$ per algun $j<i$ tal que $A_j\in\mathbb{N}^n$, sabem per hipòtesi d'inducció que $A_j=\{(x_1,\dots,x_n):\ f(x_1,\dots,x_n)=0\}$ per alguna f de R', i aleshores $A_i=\{(x_1,\dots,x_n):\ 1\dot{-}f(x_1,\dots,x_n)=0\}$; i $1\dot{-}f\in R'$. Si $A_i=A_j\cup A_k$, on j i k són menors que i, tindrem $A_j=\{(x_1,\dots,x_n):\ f(x_1,\dots,x_n)=0\}$, $A_k=\{(x_1,\dots,x_n):\ g(x_1,\dots,x_n)=0\}$, per certes f i g de R', i aleshores $A_i=\{(x_1,\dots,x_n):\ f(x_t)g(x_t)=0\}$; i ja sabem que $fg\in R'$. Si, finalment,

$$A_i=\{(x_1,\dots,x_n):\ (\exists y)\,[(x_1,\dots,x_n,y)\in A_j]\}$$

per algun $j<i$, sabrem que

$$(x_1,\dots,x_n,y)\in A_j\Leftrightarrow h(x_1,\dots,x_n,y)=0$$

per una certa h de R', i llavors

$$A_i=\{(x_1,\dots,x_n):\ h_E(x_1,\dots,x_n)=1\}=\{(x_1,\dots,x_n):\ 1\dot{-}h_E(x_1,\dots,x_n)=0\},$$

i ja sabem que h_E pertany a R' i $1\dot{-}h_E$ també.

Ara ja podem demostrar que cada funció UD és de la classe R'. Si f és UD tenim, segons el lema 2.12, per alguna g de R',

$$y=f(x_1,\dots,x_n)\Leftrightarrow(x_1,\dots,x_n,y)\in[\text{gràfica de } f]\Leftrightarrow g(x_1,\dots,x_n,y)=0$$

Observem que per cada $(x_1,\ldots,x_n)$ la última igualtat es satisfa per un y, i només per un. Tenim, per tant, que $g_E(x_1,\ldots,x_n)=1$ per cada $(x_1,\ldots,x_n)$, i $g_M \in R'$, per R'.4. I com que $g(x_1,\ldots,x_n,g_M(x_1,\ldots,x_n))=0$ tenim que

$$g_M(x_1,\ldots,x_n)=f(x_1,\ldots,x_n) \text{ per cada } (x_1,\ldots,x_n),$$

i, per tant, $f \in R'$.

Resta ara per demostrar que cada funció de classe R' és UD.

Hi ha funcions que serveixen per a representar successions finites de naturals. En definirem una, adaptant el procediment de [2]. Considerem la funció

$$T(n)=\sum_{i=0}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$$

Donat qualsevol natural z hi ha un sol natural n tal que

$$T(n)\leq z < T(n+1)$$

Definim $P_2(z)=z-T(N)$, si n té aquesta propietat. Resulta que $0 \leq P_2(z)\leq n$, i definim $P_1(z)=n-P_2(z)$. Fem també $P(x,y)=T(x,y)+y$ i tindrem que

$$P(P_1(z),P_2(z))=z;\ P_1(P(x,y))=x;\ P_2P((x,y))=y.$$

Definim, per naturals i,j,

$C_1(i,j)=w$ si w és l'únic natural tal que

$$w\equiv P_1(j) \bmod 1+iP_2(j)$$

$$w<1+iP_2(j)$$

2.13. <u>Lema</u>. Donada qualsevol successió finita de naturals, $a_1,\ldots,a_n$, existeix algun u tal que

$$C_1(i,u)=a_i,\ \text{per } i=1,\ldots,r$$

Escollim qualsevol natural y més gran que tots els a_i, i divisible entre tots els naturals des de 1 fins a r. Els naturals 1+y, 1+2y,..., 1+ry són primers dos a dos, perquè

$$j<k\&d|1+jy\&d|1+ky \Rightarrow d|1+jy\&d|k(1+jy)-j(1+ky)=k-j<r$$

$$\Rightarrow d|1+jy\&d|y \Rightarrow d=1$$

Per tant hi ha un natural x tal que

$$x\equiv a_i \bmod 1+iy, \text{ per } i=1,\ldots,r$$

Fem ara $u=P(x,y)$. Tindrem $x=P_1(u)$, $y=P_2(u)$,

$$a_i\equiv P_1(u) \bmod 1+iP_2(u), \text{ si } 1\le i\le r$$

$$a_i< y=P_2(u)<1+iP_2(u), \text{ si } 1\le i\le r$$

Per tant $a_i=C_1(i,u)$, per $i=1,\ldots,r$.

Definim ara $C(i,j)=C_1(i+1,j)$ i tindrem

2.14. <u>Lema</u>. Donada qualsevol successió finita de naturals, $a_0,a_1,\ldots,a_r$, existeix algun u tal que

$$C(i,u)=a_i, \text{ per } i=0,\ldots,r$$

2.15. <u>Lema</u>. $C(i,j)$ és UD.

Efectivament:

$$w=C(i,u) \Leftrightarrow w=C_1(i+1,u) \Leftrightarrow w\equiv P_1(u) \bmod 1+(i+1)P_2(u) \ \& \ w<1+(i+1)P_2(u)$$

$$\Leftrightarrow (\exists y_1,y_2,y_3,y_4)[w=y_1\pm y_3(1+(i+1)y_2) \ \& \ u=P(y_1,y_2) \ \& \ w+y_4=(i+1)y_2]$$

$$\Leftrightarrow (\exists y_1,y_2,y_3,y_4)[(w-y_1)^2=y_3^2(1+(i+1)y_2)^2 \ \& \ u=\tfrac{1}{2}(y_1+y_2)(y_1+y_2+1) \ \& \ w+y_4=(1+i)y_2]$$

$$\Leftrightarrow (\exists y_1,y_2,y_3,y_4)[((w-y_1)^2-y_3^2(1+(i+1)y_2)^2)^2 + (2u-(y_1+y_2)(y_1+y_2+1)-2y_2)^2+(w+y_4-(i+1)y_2)^2=0]$$

i aixo mostra que $C(i,j)$ és UD (de fet, és diofàntica).

Diguem ara que una successió de funcions

$$f_1,f_2,\ldots,f_r$$

és una <u>construcció de funcions de classe</u> R' si cada f_i satisfà alguna de les condicions següents:

F.1. f_i és la funció successor, una funció constant o una projecció.

F.2. Hi ha funcions f_j i f_k anteriors a f_i tals que, per qualssevol $x_1,\ldots,x_n,y$,

$$f_i(x_1,\ldots,x_n,0)=f_j(x_1,\ldots,x_n)$$

$$f_i(x_1,\ldots,x_n,S(y))=f_k(x_1,\ldots,x_n,y,f_i(x_1,\ldots,x_n,y))$$

F.3. Hi ha funcions f_j, $f_{s(1)},\dots,f_{s(m)}$, anteriors a f_i, tals que, per qualsevol $(y_1,\dots,y_n)$,

$$f_i(y_1,\dots,y_n)=f_j(f_{s(1)}(y_1,\dots,y_n),\dots,f_{s(m)}(y_1,\dots,y_n))$$

F.4. Hi ha alguna f_j anterior a f_i tal que $(f_j)_E(x_1,\dots,x_n)=1$ per cada $(x_1,\dots,x_n)$ i

$$f_i(x_1,\dots,x_n)=(f_j)_M(x_1,\dots,x_n) \text{ per cada } (x_1,\dots,x_n)$$

F.5. Hi ha alguna f_j anterior a f_i tal que, per cada $(x_1,\dots,x_n)$,

$$f_i(x_1,\dots,x_n)=(f_j)_E(x_1,\dots,x_n)$$

F.6. Hi ha alguna f_j anterior a f_i, i alguna funció injectiva t de $1,\dots,m$ en $1,\dots,n$, tals que, per cada $(x_1,\dots,x_n)$,

$$f_i(x_1,\dots,x_n)=f_j(x_{t(1)},\dots,x_{t(m)})$$

És clar que cada funció de R' és membre d'una construcció de funcions de classe R'. Per a demostrar que cada funció de classe R' és UD només caldrà veure que cada membre d'una tal construcció $f_1,\dots,f_r$ és UD, cosa que farem per inducció sobre l'índex i. La funció f_1 ha de satisfer F.1. Si $f_1(x)=S(x)$, tenim que $y=f_1(x) \Leftrightarrow y-x-1=0$, i f_1 és UD; si $f_1(x_1,\dots,x_n)=c$ (cOnstant), $y=f_1(x_1,\dots,x_n) \Leftrightarrow y-c=0$, i f_1 és UD; si $f_1(x_1,\dots,x_n)=x_i$, $y=f_1(x_1,\dots,x_n) \Leftrightarrow y-x_i=0$, i f_1 és UD. Suposem que sabem que $f_1,\dots,f_{i-1}$ són UD, i considerem f_i. Si f_i satisfa F.1 procedim com per f_1. Si f_i satisfa F.2 tenim certs predicats UD, P i Q, que, amb la notació de F.2 satisfan

$$u=f_j(x_1,\dots,x_n) \Leftrightarrow P(x_1,\dots,x_n,u)$$

$$v=f_k(x_1,\dots,x_n,y,z) \Leftrightarrow Q(x_1,\dots,x_n,y,z,v)$$

Tindrem aleshores, segons el lema 2.14,

$$\begin{aligned}
w=f_i(x_1,\dots,x_n,y) \Leftrightarrow (\exists m)\Big[&C(0,m)=f_j(x_1,\dots,x_n)\\
&\& \ (\forall j)\big[j \geqslant y \vee C(S(j),m)=f_k(x_1,\dots,x_n,j,C(j,m)\big]\\
&\& \ C(y,m)=w\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow (\exists m)\Big[P(x_1,\dots,x_n,C(0,m)) \ \& \ (\forall j)\big[&(\exists t)[y+t-j=0]\\
&\vee \ Q(x_1,\dots,x_n,j,C(j,m),C(S(j),m))\big] \ \& \ w=C(y,m)\Big]
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (\exists m)\left[(\exists p)\left[p=C(0,m) \ \& \ P(x_1,\dots,x_n,p)\right] \ \& \ (\forall j)\left[(\exists t)\left[y+t-j=0\right]\right.\right.$$

$$\left.\left. \vee \ (\exists q)(\exists r)\left[q=C(j,m) \ \& \ r=C(S(j),m) \ \& \ Q(x_1,\dots,x_n,j,q,r)\right]\right] \& \ w=C(y,m)\right]$$

i aquest predicat és UD, de manera que f_i és UD.

Si f_i satisfa F.3, tenim, per certs P i Q_j que són UD,

$$u=f_j(x_1,\dots,x_m) \Leftrightarrow P(x_1,\dots,x_m,u)$$

$$v=f_{s(j)}(y_1,\dots,y_n) \Leftrightarrow Q_j(y_1,\dots,y_n,v)$$

Aleshores

$$w=f_i(y_1,\dots,y_n) \Leftrightarrow (\exists v_1,\dots,v_m)\left[P(v_1,\dots,v_m,w)\right.$$

$$\left.\& \ Q_1(y_1,\dots,y_n,v_1) \ \& \ \dots \ \& \ Q_m(y_1,\dots,y_n,v_m)\right]$$

i és clar que f_i és UD.

Si f_i satisfa F.4 sabem, per algun P que és UD, que

$$z=f_j(x_1,\dots,x_n,y) \Leftrightarrow P(x_1,\dots,x_n,y,z)$$

i, per tant,

$$y= f_i(x_1,\dots,x_n,y) \Leftrightarrow y=(f_j)_M(x_1,\dots,x_n)$$

$$\Leftrightarrow f_j(x_1,\dots,x_n,y)=0 \ \& \ (\forall t)\left[(\exists k)\left[y+k-t=0\right] \vee f_j(x_1,\dots,x_n,t)\neq 0\right]$$

$$\Leftrightarrow f_j(x_1,\dots,x_n,y)=0 \ \& \ (\forall t)\left[(\exists k\left[y+k-t=o\right] \vee \neg P(x_1,\dots,x_n,t,0)\right]$$

Si f_i satisfa F.5 tindrem, per algun P ultradiofantic,

$$z=f_j(x_1,\dots,x_n,y) \Leftrightarrow P(x_1,\dots,x_n,y,z),$$

$$w=f_i(x_1,\dots,x_n) \Leftrightarrow w=(f_j)_E(x_1,\dots,x_n)$$

$$\Leftrightarrow \left[w=0 \ \& \ (\forall y)\left[\neg P(x_1,\dots,x_n,y,0)\right]\right] \vee \left[w-1=0 \ \& \ (\exists y)\left[P(x_1,\dots,x_n,y,0)\right]\right]$$

Finalment, si es satisfa F.6, i si

$$y=f_j(x_1,\dots,x_m) \Leftrightarrow P(x_1,\dots,x_m,y),$$

tindrem

$$y=f_i(x_1,\dots,x_n) \Leftrightarrow P(x_{t(1)},\dots,x_{t(m)},y)$$

$$\Leftrightarrow (\exists y_1,\dots,y_m)\left[P(y_1,\dots,y_m,y) \ \& \ y_1=x_{t(1)} \ \& \ \dots \ \& \ y_m=x_{t(m)}\right]$$

Amb això s'acaba la demostració del teorema 2.5.

Farem una observació sobre els conjunts UD. És clar que podriem donar un procediment sistemàtic per anar escrivint tots els predicats UD. Això fa que la col·lecció d'aquests predicats sigui numerable i que, per tant, també ho sigui la dels conjunts UD. Pero podem fer la seguent observació, que explicarem a continuació:

2.16. Observació. La col·lecció de conjunts UD no és numerable "ultradiofànticament".

Per explicar i justificar la observació associem a cada conjunt A de $\mathbb{N}$ la seva funció característica

$$f_A(n)=\begin{cases}1, \text{ si } n \text{ pertany a } A\\ 0, \text{ si no}\end{cases}$$

És fàcil veure que una funció de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que només pren els valors 0 i 1 és la funció característica d'un conjunt UD si i només si la funció és UD. Preguntem-nos ara si hi ha alguna $f(i,j)$ ultradiofàntica tal que les funcions $f(0,j)$, $f(1,j)$,... siguin totes les funcions característiques de subconjunts UD de $\mathbb{N}$. Veurem que no existeix tal f. Considerem doncs qualsevol $f(i,j)$ ultradiofàntica que només prengui els valors 0 i 1, i definim

$$g(i)=\begin{cases}0, \text{ si } f(i,i)=1\\ 1, \text{ si } f(i,i)=0\end{cases}$$

És clar que g no és cap de les funcions $f(0,j)$, $f(1,j)$, etc, i és facil veure que g és UD.

3. Consideracions no formals sobre l'analisi UD

3.1. El cos $\mathbb{R}^{UD}$. Considerem tres funcions, f, g, h, de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, amb $h(n)$ sempre diferent de zero. Llavors

$$\left\{\frac{f(n)-g(n)}{h(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

és una successió de racionals. Cada successió de racionals es pot pensar d'aquesta manera. Usarem, sempre que ens convingui, la notació

$$(f-g/h)(n)=\frac{f(n)-g(n)}{h(n)}$$

És clar, per naturals b i c, que

$$|b-c|=(b\dot{-}c)+(c\dot{-}b)$$

$$b<c \Leftrightarrow (b+1)\dot{-}c=0$$

En les consideracions següents tots els quantificadors tenen a $\mathbb{N}$ com domini.

Suposarem, per no haver de fer excepcions, que $t<\frac{1}{0}$ per tots els racionals t.

Observem:

$$\{(f-g/h)(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ és de Cauchy}$$

$$\Leftrightarrow (\forall n)(\exists m)(\forall r)\left[\,|(f-g/h)(m+r)-(f-g/h)(m)|<\frac{1}{n}\,\right]$$

El predicat que apareix entre claudàtors és equivalent a

$$n\,|f(m+r)h(m)+g(m)h(m+r)-(g(m+r)h(m)+f(m)h(m+r))|<h(m)h(m+r)$$

Per tant, si fem

$$d_1(n,m,r)=(f(m+r)h(m)+g(m)h(m+r))\dot{-}(g(m+r)h(m)+f(m)h(m+r))$$

$$d_2(n,m,r)=(g(m+r)h(m)+f(m)h(m+r))\dot{-}(f(m+r)h(m)+g(m)h(m+r))$$

$$d_3(n,m,r)=[n(d_1(n,m,r)+d_2(n,m,r))+1]\dot{-}[h(m+r)h(m)]$$

$$d_4(n,m,r)=1\dot{-}d_3(n,m,r)$$

tindrem

$$\{(f-g/h)(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ és de Cauchy} \Leftrightarrow (\forall n)(\exists m)(\forall r)[d_3(n,m,r)=0]$$

$$\Leftrightarrow (\forall n)(\exists m)(\forall r)[d_4(n,m,r)=1] \Leftrightarrow (\forall n)(\exists m)[(d_4)_E(n,m)=0]$$

$$\Leftrightarrow (\forall n)[((d_4)_E)_E(n)=1] \Leftrightarrow (((d_4)_E)_E)_E=0 \Leftrightarrow c(f-g/h)=0,$$

si convenim en que $c(f-g/h)=(((d_4)_E)_E)_E$.

Si $c(f-g/h)=0$, en el qual cas $((d_4)_E)_E(n)$ és sempre 1, considerem també la funció $d(f-g/h)$, definida com

$$d(f-g/h)(n)=((d_4)_E)_M(n),$$

que és, per cada n, el mínim m tal que $(d_4)_E(n,m)=0$, o que $(\forall r)[d_4(n,m)=1]$; això és, el mínim m tal que

$$(\forall r)\left[\,|(f-g/h)(m+r)-(f-g/h)(m)|<\frac{1}{n}\,\right]$$

Hem demostrat, doncs:

3.1.1. <u>Lema</u>. a) La successió $\{(f-g/h)(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ és de Cauchy si i només si

$c(f-g/h)=0$. En aquest cas

$$(\forall n)(\forall r)\left[\left|(f-g/h)(d(f-g/h)(n)+r)-(f-g/h)(d(f-g/h)(n)\right|<\frac{1}{n}\right]$$

i $d(f-g/h)(n)$ és el mínim natural amb aquesta propietat.

b) Si f, g i h són UD i $c(f-g/h)=0$, la funció $d(f-g/h)$ és UD.

Corol·lari. Si f, g i h són UD i la succesió $(f-g/h)(n)$ és creixent i afitada superiorment, aleshores la funció $d(f-g/h)$ que la exhibeix com de Cauchy també és UD.

Com deiem en la introducció, es dóna el cas que f, g i h siguin recursives i que $\{(f-g/h)(n)\}$ sigui creixent i afitada mentre que $d(f-g/h)$ no és recursiva. El corol·lari mostra que el fenomen anàleg no es presenta en el cas UD.

Ens interessa ara considerar successions de límits de successions de naturals. Comencarem per considerar successions de successions de naturals, que no seran res més que ternes de funcions, $f(i,n)$, $g(i,n)$, $h(i,n)$, de $\mathbb{N}^2$ en $\mathbb{N}$ tals que $h(i,n)$ és sempre diferent de zero. Pensem en qualsevol d'aquestes ternes com en la successió de successions

$$\left\{\frac{f(0,n)-g(0,n)}{h(0,n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\quad,\quad\left\{\frac{f(1,n)-g(1,n)}{h(1,n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\quad,\ \ldots$$

Fem $f_i(n)=f(i,n)$, $g_i(n)=g(i,n)$, $h_i(n)=h(i,n)$.

Si cada una de les $(f_i-g_i/h_i)(n)$ és de Cauchy, és clar que la successió dels seus límits és de Cauchy si i només si és de Cauchy la successió

$$(f_0-g_0/h_0)(d(f_0-g_0/h_0)(0)),\ (f_1-g_1/h_1)(d(f_1-g_1/h_1)(1)),\ \ldots$$

i en cas afirmatiu el límit d'aquesta successió és

$$\lim_i \lim_n \frac{f(i,n)-g(i,n)}{h(i,n)}$$

Definim, en aquest cas,

$$f_D(n)=f_n(d(f_n-g_n/h_n)(n))$$

$$g_D(n)=g_n(d(f_n-g_n/h_n)(n))$$

$$h_D(n)=h_n(d(f_n-g_n/h_n)(n))$$

i tindrem:

3.1.2. <u>Lema</u>. Amb la notació anterior, suposem que cada $(f_i-g_i/h_i)(n)$ és de Cauchy. Aleshores:

a) La successió $\{\lim_n (f_i-g_i/h_i)(n)\}_{i\in\mathbb{N}}$ és de Cauchy si i només si $c(f_D-g_D/h_D)=0$, i en aquest cas

$$\lim_i \lim_n \frac{f(i,n)-g(i,n)}{h(i,n)} = \lim_j \frac{f_D(j)-g_D(j)}{h_D(j)}$$

b) Si les funcions $f(i,n)$, $g(i,n)$ i $h(i,n)$ són UD, les funcions $f_D(i)$, $g_D(i)$ i $h_D(i)$ també ho són.

Resta per comprovar únicament la part b). Amb aquesta finalitat reconstruïm les definicions de f_D, g_D i h_D. Si revisem la definició de $d(f-g/h)$, bo i posant f_j, g_j i h_j en lloc de f, g, i h, tindrem

$d_1(j,n,m,r)=(f(j,m+r)h(j,m)+g(j,m)h(j,m+r))\dot{-}(g(j,m+r)h(j,m)+f(j,m)h(j,m+r))$

$d_2(j,n,m,r)=(g(j,m+r)h(j,m)+f(j,m)h(j,m+r))\dot{-}(f(j,m+r)h(j,m)+g(j,m)h(j,m+r))$

$d_3(j,n,m,r)= n(d_1(j,n,m,r))+d_2(j,n,m,r))+1 \dot{-} h(j,m+r)h(j,m)$

$d_4(j,n,m,r)=1\dot{-}d_3(j,n,m,r)$

$d(f_j-g_j/h_j)(n)=((d_4)_E)_M(j,n)$

És clar que $((d_4)_E)_M(j,n)$ és UD. Si fem $p(j,n)=n$ tenim

$$d(f_n-g_n/h_n)(n)=((d_4)_E)_M(n,n)=((d_4)_E)_M(p(j,n),p(j,n))$$

i aquesta funció és UD perque és composició de funcions UD. Per tant f_D, g_D i h_D són UD.

També podem observar que $c(f_i-g_i/h_i)$ és UD com a funció de i (si f, g i h ho són).

Diguem ara:

3.1.3. <u>Definició</u>. Una successió $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de racionals és UD si existeixen funcions, f, g, h, de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que són UD i tals que $s_n=(f-g/h)(n)$ per cada n.

3.1.4. <u>Definició</u>. Un nombre real és UD si és límit d'alguna successió UD de racionals.

3.1.5. <u>Definició</u>. Una successió $a_0, a_1, \ldots$ de reals UD és una successió UD si existeixen f, g i h, funcions UD de $\mathbb{N}^2$ en $\mathbb{N}$, tals que

$$a_i=\lim_n \frac{f(i,n)-g(i,n)}{h(i,n)} \text{, per cada } i$$

Així, doncs, tots els membres d'una successió UD de reals són reals UD; però és possible que una successió de reals UD no sigui una successió UD.

Denotarem per $\mathbb{R}^{UD}$ el conjunt de reals UD.

3.1.6. <u>Teorema</u>.

a) $\mathbb{R}^{UD}$ és un cos

b) Si la successió de reals $a_0, a_1, \ldots$ és UD i de Cauchy, aleshores

$$\lim a_i \in \mathbb{R}^{UD}$$

La part b) del teorema ja esta demostrada. Demostrarem a). Suposem que

$$a=\lim \frac{f(n)-g(n)}{h(n)} \text{, } b=\lim \frac{r(n)-s(n)}{t(n)} \text{,}$$

i que f, g, h, r, s, t són UD. És clar que les funcions ft+hr, gt+hs, ht, fr+gs, fs+gr, ft+hs, gt+hr són UD, i amb això es mostra que $\mathbb{R}^{UD}$ és clos per sumes, productes i diferències. Resta per demostrar que $a^{-1}\in\mathbb{R}^{UD}$ quan $a\neq 0$ i $a\in\mathbb{R}^{UD}$. Existeix, en aquest cas, m tal que $f(m+r)\neq g(m+r)$ per tots els r; i podem suposar sense perdre generalitat que m=0. Tenim aleshores

$$a^{-1}=\lim \frac{h(n)}{f(n)-g(n)}=\lim \frac{h(n)\frac{|f(n)-g(n)|}{f(n)-g(n)}}{|f(n)-g(n)|}$$

$$=\lim \frac{h(n)\frac{f(n)\dot{-}g(n)}{f(n)-g(n)} - h(n)\frac{g(n)\dot{-}f(n)}{g(n)-f(n)}}{|f(n)-g(n)|}$$

Sabem que $|f(n)-g(n)|$ és UD. Per acabar sera suficient el demostrar en general, i si definim $\frac{c\dot{-}c}{c-c}=0$, que la funció $\frac{c\dot{-}d}{c-d}$ és UD. Tenim, en efecte

$$\frac{c\dot{-}d}{c-d}=\begin{cases} 1, \text{ si } c\dot{-}d>0 \\ 0, \text{ si } c\dot{-}d=0 \end{cases}$$

pero és facil veure que la funció A tal que A(0)=0 i A(S(n))=1 és UD; i aleshores veiem que $\frac{c\dot{-}d}{c-d}$ és UD perque és igual a $A(c\dot{-}d)$.

Podem veure que $\mathbb{R}^{UD}$ és numerable: com que la col lecció de conjunts UD és numerable també ho és la de les funcions UD, la de les successions UD de racionals i la dels reals UD. Pero es presenta una situació anàloga a la que es dóna per els conjunts UD:

3.1.7. <u>Observació</u>. $\mathbb{R}^{UD}$ no és "ultradiofànticament numerable".

Cada real es pot expressar de manera única com

$$\lim_n \left(a_0+\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{10^j}\right),$$

on els a_j són enters, $0\leqslant a_j<10$ per $j>0$ i no existeix cap r tal que $(\forall s)\left[a_{r+s}=9\right]$.

Considerem qualsevol terna f, g, h de funcions UD de $\mathbb{N}^2$ en $\mathbb{N}$, la última de les quals no s'anul·la mai, i suposem que, per cada j, la successió $\left\{\frac{f(j,n)-g(j,n)}{h(j,n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ és convergent, i representem el seu límit per c_j. Afirmem que la llista c_0, c_1, ... no pot contenir tots els reals UD. Efectivament, expressem cada c_j en la forma

$$c_j=\lim_n\left(a_0^{(j)}+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{(j)}}{10^i}\right)$$

i definim $b_0=a_0^{(0)}+1$,

$$b_j=\begin{cases}1, \text{ si } j>0 \text{ i } a_j^{(j)}\neq 1\\ 2, \text{ si } j>0 \text{ i } a_j^{(j)}=1\end{cases}$$

Es pot demostrar que les funcions

$$r(n)=\begin{cases}10^n b_0+\sum_{i=1}^{n}10^{n-i}b_i, \text{ si } b_0\geqslant 0\\ \sum_{i=1}^{n}10^{n-i}b_i, \text{ si } b_0<0\end{cases}$$

$$s(n)=\begin{cases}0, \text{ si } b_0\geqslant 0\\ -10^n b_0, \text{ si } b_0<0\end{cases}$$

$$t(n)=10^n$$

són UD, i és clar que el real

$$\lim_n \left(b_0+\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{10^i}\right)=\lim \frac{r(n)-s(n)}{t(n)}$$

és diferent de tots els c_i i és UD.

3.2. Les algebres $C^{UD}_{b,c}$ de funcions continues. Seguint el metode de [5], considerem ternes de funcions de $\mathbb{N}^3$ en $\mathbb{N}$ que satisfacin les condicions seguents:

A) $h(r,s,t)\neq 0$ sempre que $t\neq 0$

B) $\dfrac{f(r,s,t)-g(r,s,t)}{h(r,s,t)}=\dfrac{f(r',s',t')-g(r',s',t')}{h(r',s',t')}$ sempre que $t\neq 0$, $t'\neq 0$ i $\dfrac{r-s}{t}=\dfrac{r'-s'}{t'}$.

Si es satisfan aquestes condicions la terna f, g, h pot ser interpretada com funció de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$. Usarem, en aquest cas, per $t\neq 0$, les notacions

$$f\left(\frac{r-s}{t}\right)=f(r,s,t),\; g\left(\frac{r-s}{t}\right)=g(r,s,t),\; h\left(\frac{r-s}{t}\right)=h(r,s,t)$$

$$(f-g/h)\left(\frac{r-s}{t}\right)=(f-g/h)(r,s,t)=\frac{f(r,s,t)-g(r,s,t)}{h(r,s,t)}$$

Qualsevol funció de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ es pot mirar d'aquesta manera, com no és difícil comprovar. Si per una tal funció F es satisfa

$$F\left(\frac{r-s}{t}\right)=(f-g/h)\left(\frac{r-s}{t}\right)$$

escriurem $F=(f-g/h)$, si f, g i h satisfan les condicions A) i B).

3.2.1. Definició. Direm que $F:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ és UD si existeixen f, g, i h que són UD, satisfan A) i B) i són tals que $F=f-g/h$.

Considerem un interval $[a,b]$ amb extrems racionals. Suposem que

$$b=\frac{b_1-b_2}{b_3},\quad c=\frac{c_1-c_2}{c_3}\;;\; b_1,\, b_2,\, b_3,\, c_1,\, c_2,\, c_3 \text{ naturals}$$

Tenim, per $f-g/h:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$,

$f-g/h$ és uniformement contínua en $[b,c]\cap\mathbb{Q}$

$$\Leftrightarrow (\forall n)(\exists m)(\forall r,s,t,r',s',t')\Big[t=0\vee t'=0\vee \frac{r-s}{t}<\frac{b_1-b_2}{b_3}\vee\frac{r-s}{t}>\frac{c_1-c_2}{c_3}$$

$$\vee\frac{r'-s'}{t'}<\frac{b_1-b_2}{b_3}\vee\frac{r'-s'}{t'}>\frac{c_1-c_2}{c_3}\vee\left|\frac{r-s}{t}-\frac{r'-s'}{t'}\right|\geq\frac{1}{m}$$

$$\vee\left|(f-g/h)\left(\frac{r-s}{t}\right)-(f-g/h)\left(\frac{r'-s'}{t'}\right)\right|<\frac{1}{n}\Big]$$

Si procedim de manera semblant a com s'ha fet a 3.1 arribarem a que

$f-g/h$ és uniformement contínua en $[b,c]\cap\mathbb{Q} \Leftrightarrow (\forall n)(\exists m)[k(n,m)=0]$

$$\Leftrightarrow (\forall n)[k_E(n)=1] \Leftrightarrow U([b,c],f-g/h)=0,$$

on $U([b,c],f-g/h)=(k_E)_E$ i $k(n,m)$ és certa funció, que és UD sempre que f, g i h ho siguin.

Si $f-g/h$ és uniformement contínua en $[b,c]\cap\mathbb{Q}$, aleshores $(\forall n)\ k_E(n)=1$ i esta definida la funció

$$D([b,c],f-g/h)(n)=k_M(n)$$

que ens dóna, per cada n, el mínim m tal que

$$\left|(f-g/h)\left(\frac{r-s}{t}\right)-(f-g/h)\left(\frac{r'-s'}{t'}\right)\right|<\frac{1}{n} \quad \text{sempre que} \quad \left|\frac{r-s}{t}-\frac{r'-s'}{t'}\right|<\frac{1}{m}$$

Tenim, doncs:

3.2.2. Lema. La funció $f-g/h:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ és uniformement contínua en $[b,c]\cap\mathbb{Q}$ si i només si $U([b,c],f-g/h)=0$. En aquest cas es satisfà, per $\frac{r-s}{t}$ i $\frac{r'-s'}{t'}$ en $[b,c]$,

$$\left|\frac{r-s}{t}-\frac{r'-s'}{t'}\right|<\frac{1}{D(\ b,c\ ,f-g/h)(n)} \Rightarrow \left|(f-g/h)\left(\frac{r-s}{t}\right)-(f-g/h)\left(\frac{r'-s'}{t'}\right)\right|<\frac{1}{n},$$

on $D([b,c],f-g/h)(n)$ és, per cada n, el mínim natural amb aquesta propietat. La funció $D(\ b,c\ ,f-g/h)$ és UD sempre que f, g i h ho siguin.

3.2.3. Definició. Representarem per $\mathbb{Q}^{UD}_{[b,c]}$ el conjunt de les funcions de $[b,c]$ en $\mathbb{R}$ que són extensions a $[b,c]$, per continuitat, de funcions $f-g/h$ de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ que siguin UD i uniformement contínues en $[b,c]\cap\mathbb{Q}$. Si k és l'extensió d'una tal $f-g/h$ posarem

$$k=\overline{f-g/h}$$

3.2.4. Definició. Considerem una successió k_0, k_1, ... d'elements de $\mathbb{Q}^{UD}_{[b,c]}$. Direm que la successió és UD si existeixen funcions f, g, h de $\mathbb{N}^4$ en $\mathbb{N}$ tals que:

a) Per cada i, si fem $f_i(r,s,t)=f(i,r,s,t)$, $g_i(r,s,t)=g(i,r,s,t)$, $h_i(r,s,t)=h(i,r,s,t)$, aleshores f_i-g_i/h_i és funció de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$;

b) f, g i h són UD, cada f_i-g_i/h_i és uniformement contínua en $[b,c]\cap\mathbb{Q}$ i $k_i=\overline{f_i-g_i/h_i}$, per cada i.

La relació que hi ha entre $\mathbb{Q}^{UD}_{[b,c]}$ i la classe de funcions contínues de $[b,c]$ en $\mathbb{R}$ s'assembla a la que hi ha entre $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$. Així com cada real és el límit d'una successió de racionals, així mateix cada funció contínua de $[b,c]$ en $\mathbb{R}$ és el límit d'una successió uniformement convergent d'elements de $\mathbb{Q}^{UD}_{[b,c]}$ (aquesta afirmació és consequencia del teorema de Stone-Weierstrass, de que els polinomis amb coeficients reals són tan aproximables com volguem per polinomis amb coeficients racionals i de que aquests últims són elements de $\mathbb{Q}^{UD}_{[b,c]}$). Però de la mateixa manera que definim $\mathbb{R}^{UD}$ diguem ara:

3.2.5. <u>Definició</u>. Representem per $C^{UD}_{[b,c]}$ la classe de funcions de $[b,c]$ en $\mathbb{R}$ que són límits de successions UD, uniformement convergents en $[b,c]$, d'elements de $\mathbb{Q}^{UD}_{[b,c]}$.

3.2.6. <u>Definició</u>. Una successió $k_0, k_1, \ldots$ d'elements de $C^{UD}_{[b,c]}$ és UD si existeixen f, g, h, funcions de $\mathbb{N}^5$ en $\mathbb{N}$ tals que:

a) f, g i h són UD

b) Si fem $f_{i,j}(r,s,t)=f(i,j,r,s,t)$, i analogament per g i h, aleshores, per cada (i,j), $f_{i,j}-g_{i,j}/h_{i,j}$ és una funció de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$, uniformement contínua en $[b,c]\cap\mathbb{Q}$

c) Per cada i, $\{f_{i,j}-g_{i,j}/h_{i,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ convergeix uniformement en $[b,c]$ a k_i

3.3. <u>Consideració final</u>. Les consideracions que hem estat fent en aquesta secció 3 van en el sentit de mostrar que l'anàlisi UD pot funcionar molt bé. Pero: $1^{\underline{er}}$) no estem en condicions de fer una exposició sistematica de l'anàlisi UD; $2^{\underline{on}}$) potser el context no formal en el que estem en aquesta secció no és el millor per intentar aquesta exposició. Per aquestes raons pensem que tard o d'hora hem de tallar en sec aquestes consideracions, i escollim aquest moment per fer-ho. Les primeres afirmacions que pensem que podriem demostrar, pero que ja no demostrarem, són les següents:

Si $f\in C^{UD}_{b,c}$ i $a\in\mathbb{R}^{UD}$, $f(a)\in\mathbb{R}^{UD}$.

$C^{UD}_{[b,c]}$ és una $\mathbb{R}^{UD}$-àlgebra.

Si $f_0, f_1, \ldots$ és una successió UD d'elements de $C^{UD}_{[b,c]}$, uniformement convergent en $[b,c]$, aleshores $\lim f_i \in C^{UD}_{[b,c]}$.

Si $k \in C^{UD}_{[b,c]}$, $\int_b^x k \in C^{UD}_{[b,c]}$.

Si $k \in C^{UD}_{[b,c]}$ i k' existeix i és contínua, $k' \in C^{UD}_{[b,c]}$.

Si $a_0, a_1, \ldots$ és una successió UD d'elements de $\mathbb{R}^{UD}$, la successió $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ és UD (en relació a qualsevol $C^{UD}_{[b,c]}$) i el radi de convergencia és un real UD.

En canvi, no creiem poder demostrar que qualsevol funció f contínua en $[b,c]$ i tal que $f([b,c] \cap \mathbb{R}^{UD}) \subseteq \mathbb{R}^{UD}$ hagi de pertanyer a $C^{UD}_{[b,c]}$.

4. La formalització de l'aritmetica i l'analisi basades en R', o ultradiofantiques.

4.1. Consideracions preliminars. Com recordavem en la introducció, l'anàlisi recursiva es pot veure com un intent de desenvolupar l'anàlisi matemàtica de manera constructiva, intent que ens dóna, pero, una anàlisi poc satisfactòria des del punt de vista matemàtic. I això és el que ens porta a engrandir la classe de les funcions recursives i considerar la classe R' de les funcions ultradiofàntiques (UD). A la secció anterior hem vist que hi ha indicis de que l'anàlisi basada en aquesta classe de funcions és satisfactòria, matematicàment parlant. Pero ara ens preguntem, des del punt de vista de la fonamentació, quin avantatge pot comportar aquesta anàlisi basada en R' (o analisi UD), que ja no és constructiva, comparada amb altres fonamentacions d'aquesta disciplina, tal com, per exemple, la que es pot basar en una teoria de conjunts formal. Recordem que Hilbert, en el seu programa de fonamentació, proposava presentar les teories matemàtiques com a sistemes que avui anomenariem "sistemes formals"; exigint, pero, que la consistència de tals sistemes es pogués demostrar per mètodes estrictament "finitaris", val a dir constructius. Pero es comprova, històricament si més no, que a mesura que un sistema formal formalitza regions més amples de la matemàtica, més lluny estem de poder demostrar constructivament la seva consistència. I, així, la consistència d'una teoria de conjunts formal no s'ha demostrat de cap manera, mentre que la consistència de la "aritmètica clàssica no s'ha demostrat constructivament (vegi's [1]). Això fa pensar que per a fonamentar l'aritmètica UD de manera "constructivament consistent" potser cal cercar formalismes que no siguin, en el sentit tècnic del terme, sistemes formals. Això és el que s'ha intentat a [7], on es descriu un formalisme "obert" o "recursiu" per a la classe R' de les funcions UD. Aquí presentarem aquest formalisme, amb alguna millora, i després donarem alguna indicació de com pensem que es pot usar per desenvolupar l'anàlisi UD.

4.2. El formalisme. Presentarem el formalisme com una categoria de sistemes formals. Això no vol dir de cap manera que ens hàgim de basar en la teoria de categories; és, tantsols, que el llenguatge categòric és escaient al tema. Els objectes de la categoria seran, doncs, sistemes formals, que anomenarem "segments" del formalisme. La consistència de cada un d'aquests segments es demostrarà constructivament (cosa que no entra en conflicte amb cap interpretació de cap teorema de Gödel, ja que cada segment només contindrà o formalitzarà un tros petit de l'aritmètica). Tots els segments tindran el mateix llenguatge; és a dir que definirem els signes del llenguatge, els termes i les fòrmules de la mateixa manera per tots els segments. Les regles d'inferència seran també les mateixes. De fet la lògica de cada segment serà el càlcul proposicional, que presentarem, però, sense fer ús dels signes de conjunció i d'implicació. Hi haurà una col·lecció de fòrmules, constituida per els "postulats inicials", que seran postulats de tots els segments, i que no seran altres que els que ens donaran les propietats de la igualtat. Pero cada segment, llevat del "segment inicial", tindrà, de més, altres postulats. Les condicions que ens definiran, recursivament, tots els segments, seran els "principis" del formalisme. Demostrarem, al mateix temps que la consistència, l'important metateorema de "minimalització".

Disposarem dels enters no negatius per a comptar, indexar, o qualsevol altre ús constructiu que ens convingui; i usarem les primeres lletres de l'alfabet, en minúscules, com a signes auxiliars per a representar-los. Els signes 1, 2, 3, ... no seran part del llenguatge del formalisme.

4.2.1. Els signes del llenguatge. Són: 0, S, E, M, =, ¬ (negació), ∨ (disjunció), els parentesis (i les seves variants), la coma, les "variables" i els "operadors"; i ara passem a dir quins són aquests últims signes. Podem usar com a variables els membres de qualsevol llista infinita de signes; pero de fet no tindrem ocasió d'usar les variables d'altra manera que representades per signes auxiliars. Per a cada enter positiu n hem de tenir una llista infinita de signes, que seran els operadors de grau n. Convenim en que S és un operador de grau 1. Cap dels altres signes que encapçalen la llista de signes del llenguatge, ni cap variable, no són operadors. És convenient, pero no indispensable, que tinguem + i · entre els operadors de grau 2.

Usarem les últimes lletres de l'alfabet, en minúscules, indexades o no, com a signes auxiliars per a representar variables. Quan en un mateix context apareguin lletres diferents com a representants de variables, convindrem en que representen variables diferents. Usarem les lletres minúscules sobre-ratllades, indexades o no, per a representar operadors.

4.2.2. Els termes. Abans de definir-los diguem que les lletres minúscules subratllades, indexades o no, representaran termes. Definim: 1) 0 és un terme; 2) cada variable és un terme; 3) si $\bar{f}$ és un operador de grau n, i si $\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n$ són termes qualssevol, aleshores les expressions $\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)$, $E\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_{n-1})$ i $M\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_{n-1})$ són termes (si n és 1, s'entén que hem de posar $E\bar{f}$ i $M\bar{f}$ en lloc dels dos últims termes anteriors); 4) les raons anteriors, reiterades, són totes les que fan que una expressió sigui un terme.

Segons la definició, les expressions

$$0,\ S(0),\ S(S(0)),\ S(S(S(0))),\ \dots$$

són termes. Aquests termes s'anomenaran *numerals*.

4.2.3. *Les fòrmules*. Usarem els signes auxiliars $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, ..., $\underline{A}_1$, $\underline{A}'$, etc, per a representar formules. Definim: 1) si $\underline{b}$ i $\underline{c}$ són termes, aleshores $\underline{b}=\underline{c}$ i $\neg\underline{b}=\underline{c}$ són *fòrmules*, que anomenarem *quasiatòmiques*; i direm que $\underline{b}=\underline{c}$ és *atòmica*; 2) si $\underline{A}_1$, $\underline{A}_2$, ..., $\underline{A}_n$ són fòrmules quasiatòmiques, l'expressió $\underline{A}_1 \vee \underline{A}_2 \vee \dots \vee \underline{A}_n$ és *formula*; 3) les anteriors són totes les formules. Cal dir que no distingim entre $\underline{A}_1 \vee \dots \vee \underline{A}_n$ i $\underline{A}_{1'} \vee \dots \vee \underline{A}_{n'}$, si $(1',\dots n')$ és una permutació de $(1,\dots n)$.

Usarem el signe auxiliar $\equiv$ entre dues expressions per a indicar que una d'elles representa l'altra, o que les dues representen la mateixa. I usarem, per a indicar el contrari, $\not\equiv$.

4.2.4. *Substitucions*. Diem que $\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n$ són els *arguments* del terme $\bar{f}(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n)$ ($\underline{b}_1$ és el *primer* argument, $\underline{b}_2$ el *segon*, etc). També diem que $\underline{c}_1,\dots,\underline{c}_n$ són els *arguments* de $E\bar{\bar{g}}(\underline{c}_1,\dots,\underline{c}_n)$ i $M\bar{g}(\underline{c}_1,\dots,\underline{c}_n)$ (en aquest cas $\bar{\bar{g}}$ és operador de grau n+1). Definim ara els *proarguments* d'un terme: 1) si $\underline{a}$ és un terme, $\underline{a}$ és *proargument* de $\underline{a}$; 2) si $\underline{b}$ és argument d'un proargument de $\underline{a}$, aleshores $\underline{b}$ és *proargument* de a; 3) les raons anteriors són les úniques que fan que una part d'un terme sigui proargument del terme. Cada proargument d'un terme és descrit per alguna expressió de la mena "el terme mateix", "el tercer argument", "el segon argument del primer argument", etc. Direm que un cert proargument de $\underline{a}$ és una *presència* de $\underline{b}$ en $\underline{a}$ si i només si aquest proargument és $\underline{b}$. Usarem l'expressió auxiliar

$$\underline{b}\,|(\underline{c},\underline{d})$$

per representar el terme que resulta de substituir per $\underline{d}$ totes les presencies de $\underline{c}$ en $\underline{b}$. I usarem $\underline{A}\,|(\underline{c},\underline{d})$ de la manera analoga, si $\underline{A}$ és una fòrmula.

Així, per exemple, si $\bar{f}$ representa un operador de grau 2 tindrem

$$[\bar{f}(\bar{f}(0,0),E\bar{f}(\bar{f}(0,0)))=M\bar{f}(0)]\Big|(\bar{f}(0,0),0) \equiv \bar{f}(0,E\bar{f}(0))=M\bar{f}(0)$$

També usarem, si no hi ha confusió, $\underline{a}\Big|(x_i,\underline{b}_i)$ i $\underline{A}\Big|(x_i,\underline{b}_i)$ per a representar, respectivament,

$$\underline{a}\Big|(x_1,\underline{b}_1)\Big|(x_2,\underline{b}_2)\ldots\Big|(x_n,\underline{b}_n)$$
$$\underline{A}\Big|(x_1,\underline{b}_1)\Big|(x_2,\underline{b}_2)\ldots\Big|(x_n,\underline{b}_n)$$

<u>Nota</u>: És clar que $\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)$ no és un proargument de $E\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)$. Més encara: si $E\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)$ és un terme, $\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)$ no ho és, i viceversa.

Direm que un terme és <u>constant</u> si en ell no hi ha cap presència de cap variable. Direm que una fòrmula és <u>constant</u> si són constants tots els termes que apareixen en ella.

4.2.5. <u>Les regles d'inferencia</u>. En relació a un segment, el signe $\vdash$ anteposat a una fòrmula indicara que aquesta fòrmula és un <u>teorema</u> (del segment). Algunes fòrmules seran teoremes perque postularem que ho siguin; aquests seran els (teoremes) <u>postulats</u>. Altres fòrmules seran teoremes mercès a les <u>regles d'inferència</u>. Aquestes són, en cada segment:

R.I.1. Per qualssevol termes constants $\underline{b}$ i $\underline{c}$,

$$\vdash \underline{b}=\underline{c} \vee \neg\underline{c}=\underline{b}$$

R.I.2. Per qualsevol formula $\underline{A}$ i qualssevol termes constants $\underline{b}$ i $\underline{c}$, si $\vdash\underline{A}$ aleshores $\vdash \underline{A}\vee\underline{b}=\underline{c}$ i $\vdash \underline{A}\vee\neg\underline{b}=\underline{c}$.

R.I.3. Recíprocament, si $\vdash \underline{A}\vee\underline{b}=\underline{c}$ i $\vdash \underline{A}\vee\neg\underline{b}=\underline{c}$, aleshores $\vdash\underline{A}$.

4.2.6. <u>Els postulats inicials</u>. Es donen com esquemes o famílies de postulats. Són tres:

E.P.I.1. Per cada numeral $\underline{b}$, $\vdash\underline{b}=\underline{b}$

E.P.I.2. Per cada dos numerals, $\underline{b}$ i $\underline{c}$, que no siguin el mateix, $\vdash \neg\underline{b}=\underline{c}$.

E.P.I.3. Per qualssevol termes constants $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$, $\underline{f}$ · $\underline{d}'$, si $\underline{d}'$ s'obté de $\underline{d}$ per substitució d'una presencia de $\underline{b}$ per $\underline{c}$, aleshores

$$\vdash \neg\underline{b}=\underline{c} \vee \neg\underline{d}=\underline{f} \vee \underline{d}'=\underline{f}$$

Per exemple, si $\bar{f}$ és (representa) un operador de grau 2,

$$\vdash \neg 0=\bar{f}(0,0) \vee \neg\bar{f}(\bar{f}(0,0),E\bar{f}(0))=M\bar{f}(0) \vee \bar{f}(\bar{f}(0,0),E\bar{f}(\bar{f}(0,0)))=M\bar{f}(0)$$

4.2.7. Els segments. Usarem els signes $\bar{R}$, $\bar{S}$, $\bar{T}$, $\bar{U}$, ... per a representar segments. Abans de definir-los hem de dir, com a primera aproximació, que un segment és un sistema formal que té el llenguatge i les regles d'inferència que hem donat, i que té, com a postulats, els postulats inicials i alguns altres. Escriurem $\bar{U} \vdash \underline{A}$ per indicar que la formula $\underline{A}$ és un teorema del segment $\bar{U}$. Donats un segment $\bar{U}$ i un terme $\underline{b}$, direm que $\underline{b}$ és un $\bar{U}$-nombre, i escriurem $\underline{b} \in N_{\bar{U}}$, si sabem com trobar un enter positiu r, i r numerals, $\underline{c}_1,\ldots,\underline{c}_r$, per als quals poguem demostrar que

$$\bar{U} \vdash \underline{b}=\underline{c}_1 \vee \ldots \vee \underline{b}=\underline{c}_r$$

Direm que un terme $\underline{f}$ és una $\bar{U}$-funció de les variables $x_1,\ldots,x_n$, i escriurem $\underline{f} \in N_{\bar{U}}(x_1,\ldots,x_n)$, si per cada col lecció de numerals $\underline{d}_1,\ldots,\underline{d}_n$ es compleix que $\underline{f}\,\big|(x_i,\underline{d}_i) \in N_{\bar{U}}$. Admetem que $N_{\bar{U}}(x_1,\ldots,x_n)$ és $N_{\bar{U}}$,si n és zero.

Si $\underline{b}$ és un numeral i $\underline{c}$ és un terme qualsevol, l'expressió auxiliar $S^{\underline{b}}(\underline{c})$ representa un terme, d'acord amb les convencions sequents:

$$S^{0}(\underline{c})=\underline{c} \;\;,\;\; S^{S(0)}(\underline{c})=S(\underline{c}) \;\;,\;\; S^{S(S(0))}(\underline{c})=S(S(\underline{c})) \;\;,\; \text{etc}$$

Donat qualsevol segment $\bar{U}$ direm que un operador $\bar{f}$ és nou per $\bar{U}$ si $\bar{f}$ no apareix en cap postulat de $\bar{U}$ que no sigui un cas de E.P.I.3.

Definim ara els segments, d'acord amb els principis sequents:

PR.1. El sistema formal que té el llenguatge i les regles d'inferència que hem descrit i que té com a únics postulats els postulats inicials és un segment, el segment inicial.

PR.2. Si: 1) $\bar{U}$ és un segment i n un enter no negatiu; 2) $\underline{r} \in N_{\bar{U}}(x_1,\ldots,x_n)$ i $\underline{s} \in N_{\bar{U}}(x_1,\ldots,x_n,y,z)$; 3) $\bar{f}$ és un operador de grau n+1, nou per $\bar{U}$; aleshores també és un segment el sistema formal que s'obté d'afegir a $\bar{U}$ els esquemes de postulats sequents, per qualssevol numerals $\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,\underline{c},\underline{d}$:

(I) $\vdash \neg\, \underline{r}\,\big|(x_i,\underline{b}_i)=\underline{d} \vee \bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,0)=\underline{d}$

(II) $\vdash \neg\, \underline{s}\left|(x_i,\underline{b}_i)\right|(y,c)\left|(z,\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,\underline{c}))=\underline{d} \vee \bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n S(\underline{c}))=\underline{d}\right.$

$(\mathrm{III})_0$ $\vdash \neg\, \bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,0)=0 \vee M\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=0$

(III)' $\vdash \bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,0)=0 \vee \bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,S(0))=0 \vee\ldots\vee \bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,\underline{c})=0$
$\vee \neg\, \bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,S(\underline{c}))=0 \vee M\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=S(\underline{c})$

(IV) $\vdash \neg\, f(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,\underline{c})=0 \vee E\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=S(0)$

(V) $\vdash E\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=0 \vee E\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=S(0)$

(VI) $\vdash \neg\, M\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=\underline{c} \vee \bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,\underline{c})=0$

(VII) $\vdash \neg\, S^{S(\underline{c})}(d)=M\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n) \vee \neg\, \bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,\underline{c})=0$

PR.3. Si: 1) es satisfan les condicions 1), 2) i 3) de PR.2 i $\bar{V}$ és el segment que s'obté d'afegir a $\bar{U}$ els esquemes de postulats (I)-(VII); 2) $\underline{h}_1,\ldots,\underline{h}_p,\underline{k}_1,\ldots,\underline{k}_p,\underline{g}_1,\ldots,\underline{g}_n$ són $\bar{U}$-funcions de $z_1,\ldots,z_q$; 3) podem demostrar, per qualssevol numerals $\underline{d}_1,\ldots,\underline{d}_q,\underline{c}$, que

$$\bar{V} \vdash \neg\,(\underline{h}_1=\underline{k}_1)\left|(z_i,\underline{d}_i) \vee\ldots\vee \neg\,(\underline{h}_p=\underline{k}_p)\right|(z_i,\underline{d}_i)$$
$$\vee \neg\, \bar{f}(\underline{g}_1\left|(z_i,\underline{d}_i),\ldots,\underline{g}_n\right|(z_i,\underline{d}_i),\underline{c})=0;$$

aleshores també és un <u>segment</u> el sistema formal que s'obté d'afegir a $\bar{V}$ l'esquema seguent de postulats, per qualssevol numerals $\underline{d}_1,\ldots,\underline{d}_q,\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n$:

(VIII) $\vdash \neg\,(\underline{h}_1=\underline{k}_1)\left|(z_i,\underline{d}_i) \vee\ldots\vee \neg\,(\underline{h}_p=\underline{k}_p)\right|(z_i,\underline{d}_i)$
$\vee \neg\, \underline{g}_1(z_i,\underline{d}_i)=\underline{b}_i \vee\ldots\vee \neg\, \underline{g}_n(z_i,\underline{d}_i)=\underline{b}_n \vee \neg\, E\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=S(0)$

(en aquest principi s'admet el cas p=0)

PR.4. Res no és un segment si no és per les raons anteriors.

4.2.8. <u>Nota sobre la lògica del formalisme</u>. Hauriem pogut definir la part lògica del formalisme d'una manera aparentment diferent, que hauria estat la seguent: hauriem admès, com a signes lògics, ademés de la negació i la disjunció, la conjunció i la implicació, i hauriem dit, en definir les formules: 1) si $\underline{b}$ i $\underline{c}$ són termes, $\underline{b}=\underline{c}$ és fòrmula; 2) si $\underline{A}$ i $\underline{B}$ són formules, $\neg(\underline{A})$, $(\underline{A})\vee(\underline{B})$, $(\underline{A})\&(\underline{B})$ i $(\underline{A})\Rightarrow(\underline{B})$ són fòrmules. Fet això, hauriem dit, com regles d'inferència, que totes les formules tautològiques són teoremes i que, si $\vdash(A)$ i $\vdash(A)\Rightarrow(B)$, aleshores $\vdash(B)$. Aquesta lògica, que és el càlcul proposicional, no és essencialment diferent de la que usem.

4.2.9. <u>Observacions. El metateorema de minimalització</u>. Una vegada postulats (I) i (II) d'acord amb PR.2, en el nou segment $\bar{V}$ resulta que $\bar{f}(x_1,\ldots,x_n,y)\in N_{\bar{V}}(x_1,\ldots,x_n,y)$ i es té, per qualssevol numerals $\underline{b}_i$ i $\underline{c}$:

$$\bar{V}\vdash \bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,0)=\underline{r}\big|(x_i,\underline{b}_i)$$

$$\bar{V}\vdash \bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,S(\underline{c}))=\underline{s}\big|(x_i,\underline{b}_i)\big|(y,\underline{c})\big|(z,\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,\underline{c}))$$

Aixo mostra que PR.2 ens permet d'introduir noves funcions segons l'esquema de recursió primitiva (R'.2 de la introducció).

Suposem ara que tenim $\underline{g}\in N_{\bar{U}}(x_1,\ldots,x_m)$. Prenem, en PR.2, $n\equiv m-1$, $y\equiv x_m$, $\underline{r}\equiv\underline{g}\big|(x_m,0)$, $\underline{s}\equiv\underline{g}\big|(x_m,S(x_m))$, escollim un operador $\bar{f}$ nou per $\bar{U}$ i postulem (I)-(VII). En el nou segment $\bar{V}$ tindrem, per qualssevol numerals $\underline{b}_i$,

$$\bar{V}\vdash \bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_{m-1},0)=\underline{g}\big|(x_1,\underline{b}_1)\ldots\big|(x_{m-1},\underline{b}_{m-1})\big|(x_m,0)$$

$$\bar{V}\vdash \bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_{m-1},S(\underline{b}_m))=\underline{g}\big|(x_1,\underline{b}_1)\ldots\big|(x_{m-1},\underline{b}_{m-1})\big|(x_m,S(\underline{b}_m))$$

i aixo no és altra cosa que

$$\bar{V}\vdash \bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_m)=\underline{g}\big|(x_i,\underline{b}_i),\text{ per qualssevol numerals }\underline{b}_i.$$

Això mostra que podem canviar la notació de $\underline{g}$ mitjançant la introducció de $\bar{f}(x_1,\ldots,x_n)$, en notació funcional.

Si $\underline{h}\in N_{\bar{U}}(y_1,\ldots,y_n)$ i $\underline{k}_j\in N_{\bar{U}}(x_1,\ldots,x_m)$, per $j\equiv i,\ldots,n$, es fàcil veure que $h\big|(y_i,k_i)\in N_{\bar{U}}(x_1,\ldots,x_m)$.

És clar que $\underline{b}\in N_{\bar{U}}(x_1,\ldots,x_n)$ per cada numeral $\underline{b}$, cada segment $\bar{U}$ i cada n. També és clar que $x_j\in N_{\bar{U}}(x_1,\ldots,x_n)$, si $1\leq j\leq n$, i que $S(x)\in N_{\bar{U}}(x)$, per cada segment $\bar{U}$.

Observem també que els esquemes (I)-(VIII) tendeixen a donar a $E\bar{f}(x_1,\ldots,x_n)$ i $M\bar{f}(x_1,\ldots,x_n)$ els significats de les funcions $\bar{f}_E(x_1,\ldots,x_n)$ i $\bar{f}_M(x_1,\ldots,x_n)$ de la introducció. En el mateix sentit tenim la següent afirmació important:

<u>Metateorema de minimalització</u>. Si tenim $\bar{U}\vdash E\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=S(0)$, aleshores $M\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)\in N_{\bar{U}}$.

Corol·lari. Si $\bar{U} \vdash E\bar{f}(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n)=S(0)$ per cada n-ada de numerals $\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n$, aleshores $M\bar{f}(x_1,\dots,x_n) \in N_{\bar{U}}(x_1,\dots,x_n)$.

La demostració d'aquest metateorema no és senzilla, i es farà més endavant, junt amb la demostració de la consistència.

(Potser convé remarcar que el metateorema no afirma que, donada qualsevol $\bar{f}(x_1,\dots,x_n) \in N_{\bar{U}}(x_1,\dots,x_n)$ i qualssevol numerals $\underline{b}_i$, es puguin trobar numerals $\underline{c}_1,\dots,\underline{c}_r$ per als quals la formula $\neg E\bar{f}(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n)=S(0)$ $\vee\ \bar{f}(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n)=\underline{c}_1 \vee\dots\vee \bar{f}(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n)=\underline{c}_r$ sigui un teorema).

Les observacions anteriors i una lectura atenta dels esquemes (I)-(VIII) ens mostren que el formalisme ens permet d'introduir qualsevol funció de la classe R' com a $\bar{U}$-fuunció, per algun segment $\bar{U}$. Una afirmació que no és explícita en els esquemes, pero que és facil de demostrar, és la seguent: per qualssevol numerals $\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n$, si $M\bar{f}(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n) \in N_{\bar{U}}$, aleshores

$$\bar{U} \vdash \bar{f}(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n,M\bar{f}(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n))=0$$

Un altre resultat útil és el seguent:

Metateorema d'inducció. Per qualsevol formula $\underline{A}$ i qualsevol segment $\bar{U}$, si $\bar{U} \vdash \underline{A}\big|(x_i,\underline{b}_i)$ per qualssevol numerals $\underline{b}_i$, aleshores $\bar{U} \vdash \underline{A}\big|(x_i,\underline{b}_i)$ sempre que $\underline{b}_i \in N_{\bar{U}}$ per cada i.

La demostració d'aquest teorema és fàcil i no cal reproduir-la aqui.

4.2.10. Els morfismes. Abans de definir els morfismes donem alguns exemples d'obtenció de segments. A partir del segment inicial, que denotarem $\bar{I}$, recordem que $x \in N_{\bar{I}}(x)$ i que $S(z) \in N_{\bar{I}}(x,y,z)$. Si hem inclòs el signe + entre els operadors de grau 2, i si fem $\underline{r}\equiv x$ i $\underline{s}\equiv S(z)$, podem postular, d'acord amb PR.2,

$$\vdash \neg\, \underline{b}=\underline{d} \ \vee +(\underline{b},0)=\underline{d}$$

$$\vdash \neg\, S(+(\underline{b},\underline{c}))=\underline{d} \ \vee +(\underline{b},S(\underline{c}))=\underline{d}$$

etc

per numerals $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ qualssevol. Llavors tenim un segment $\bar{U}$ en el que s'ha introduït la suma en notació funcional. Segons les observacions de 4.2.9, $+(x,y) \in \bar{U}(x,y)$ i té la propietat

$$\left.\begin{array}{l} \bar{U} \vdash +(\underline{b},0)=\underline{b} \\ \bar{U} \vdash +(\underline{b},S(\underline{c}))=S(+(\underline{b},\underline{c})) \end{array}\right\} \text{sempre que } \underline{b},\ \underline{c} \in N_{\bar{U}}$$

Novament, com que $0 \in N_U(x)$ i $+(z,x) \in N_U(x,y,z)$, si $\cdot$ és operador de grau 2 podem postular

$$\vdash \neg\, 0=\underline{d} \vee \cdot(\underline{b},0)=0$$

$$\vdash \neg +(\cdot(\underline{b},\underline{c}),\underline{b})=\underline{d} \vee \cdot(\underline{b},\ S(\underline{c}))=\underline{d}$$

etc

i així obtenim un segment $\bar{V}$ en el qual ja tenim la suma i el producte.

Podem anar engrandint aquest segment. Si $\bar{p}$ representa un operador de grau 1 diferent de S és facil veure que PR.2 ens permet d'afegir els postulats

$$\vdash \neg\, 0=\underline{d} \vee \bar{p}(0)=\underline{d}$$

$$\vdash \neg\, \underline{b}=\underline{d} \vee \bar{p}(S(\underline{b}))=\underline{d}$$

etc

i obtenir un segment $\bar{W}$ en el qual tindrem també la funció <u>predecessor</u> $\bar{p}$, que satisfa

$$\left.\begin{array}{l} \bar{W} \vdash \bar{p}(0)=0 \\ \bar{W} \vdash \bar{p}(S(\underline{b}))=\underline{b} \end{array}\right\} \text{sempre que } \underline{b} \in N_{\bar{W}}$$

(També tenim, és clar, que els teoremes de $\bar{U}$ són teoremes de $\bar{V}$, i que aquests ho són de $\bar{W}$).

Pero en lloc de fer aquesta última postulació hauriem pogut postular, per exemple, si $\bar{h}$ és un operador de grau 1 diferent de S,

$$\vdash \neg\, 0=\underline{d} \vee \bar{h}(0)=\underline{d}$$

$$\vdash \neg\, S(0)=\underline{d} \vee \bar{h}(\underline{b})=\underline{d}$$

etc

i hauriem obtingut, en lloc de $\bar{W}$, un segment $\bar{W}'$.

També, al començar a partir de $\bar{I}$, hauriem pogut escollir $\cdot$ en lloc de $+$ i postular

$$\vdash \neg \underline{b}=\underline{d} \vee \cdot(\underline{b},0)=\underline{d}$$

$$\vdash \neg S(\cdot(\underline{b},\underline{c}))=\underline{d} \vee \cdot(\underline{b},S(\underline{c}))=\underline{d}$$

etc

i hauriem obtingut un segment $\bar{V}'$ en el qual la funció suma es denotaria per $\cdot$.

Aquests exemples senzills ja suggereixen prou bé una definició de "morfisme". Considerem un segment $\bar{U}$ que hagi estat obtingut mitjançant un seguit de postulacions

$$P_1^{\bar{U}}, Q_1^{\bar{U}}, P_2^{\bar{U}}, Q_2^{\bar{U}}, \ldots, P_t^{\bar{U}}, Q_t^{\bar{U}}$$

Suposem que cada postulació $P_i^{\bar{U}}$ s'ha fet d'acord amb PR.2, i que la corresponent $Q_i^{\bar{U}}$ ha estat feta d'acord amb PR.2; però admetem la possibilitat que aquesta $Q_i^{\bar{U}}$ sigui inexistent. En cada parella de postulacions $P_i^{\bar{U}}$, $Q_i^{\bar{U}}$ hi intervenen l'enter n, l'operador $\bar{f}$, els termes $\underline{r}$ i $\underline{s}$, els enters p i q i els termes $\underline{h}_j$, $\underline{k}_j$ i $\underline{g}_j$ de PR.2 i PR.3, que aqui representarem per $n_i^{\bar{U}}$, $\bar{f}_i^{\bar{U}}$, $\underline{r}_i^{\bar{U}}$, $\underline{s}_i^{\bar{U}}$, $p_i^{\bar{U}}$, $q_i^{\bar{U}}$, $\underline{h}_{i,j}^{\bar{U}}$, $\underline{k}_{i,j}^{\bar{U}}$ i $\underline{g}_{i,j}^{\bar{U}}$ (pero aquests últims, a partir de $p_i^{\bar{U}}$, poden no estar definits, si la postulació $Q_i^{\bar{U}}$ és inexistent).

Considerem un altre segment $\bar{V}$, donat per les postulacions

$$P_1^{\bar{V}}, Q_1^{\bar{V}}, \ldots, P_u^{\bar{V}}, Q_u^{\bar{V}},$$

i usem la notació analoga.

Considerem una aplicació $m_{\bar{U}}^{\bar{V}}$ de la unió de la col lecció de termes i la de fòrmules, que apliqui termes en termes i fòrmules en fòrmules. Direm que $m_{\bar{U}}^{\bar{V}}$ és un <u>morfisme</u> de $\bar{U}$ en $\bar{V}$ si es satisfan les condicions següents:

M.1. Per qualssevol termes $\underline{b}$ i $\underline{c}$,

$$m_{\bar{U}}^{\bar{V}}(\underline{b}=\underline{c}) \equiv m_{\bar{U}}^{\bar{V}}(\underline{b})=m_{\bar{U}}^{\bar{V}}(\underline{c})$$

$$m_{\bar{U}}^{\bar{V}}(\neg\, \underline{b}=\underline{c}) \equiv \neg\, m_{\bar{U}}^{\bar{V}}(\underline{b})=m_{\bar{U}}^{\bar{V}}(\underline{c})$$

M.2. Per qualssevol fòrmules quasiatòmiques $\underline{A}_1,\ldots,\underline{A}_n$,

$$m_{\bar{U}}^{\bar{V}}(\underline{A}_1 \vee \ldots \vee \underline{A}_n) \equiv m_{\bar{U}}^{\bar{V}}(\underline{A}_1) \vee \ldots \vee m_{\bar{U}}^{\bar{V}}(\underline{A}_n)$$

M.3. Hi ha una aplicació injectiva m del conjunt d'operadors en ell mateix, que deixa fix S i aplica operadors de grau n en operadors de grau n, i tal que, per cada terme $\underline{b}$, $m_{\bar{U}}^{\bar{V}}(\underline{b})$ és el resultat de substituir cada operador que apareix a $\underline{b}$ per l'operador que aquesta aplicació li associa.

M.4. Existeixen $j(1) < j(2) < \ldots < j(t) \leq u$ tals que $Q_{j(i)}^{\bar{V}}$ és existent sempre que $Q_i^{\bar{U}}$ ho és i que, excepte per un possible canvi de variables, es satisfan les condicions

$$n_i^{\bar{U}} \equiv n_{j(i)}^{\bar{V}}\ ,\ m(\bar{f}_i^{\bar{U}}) \equiv \bar{f}_{j(i)}^{\bar{V}}\ ,\ m_{\bar{U}}^{\bar{V}}(\underline{r}_i^{\bar{U}}) \equiv \underline{r}_{j(i)}^{\bar{V}}\ ,\ m_{\bar{U}}^{\bar{V}}(\underline{s}_i^{\bar{U}}) \equiv \underline{s}_{j(i)}^{\bar{V}}\ ,$$
$$p_i^{\bar{U}} \equiv p_{j(i)}^{\bar{V}}\ ,\ q_i^{\bar{U}} \equiv q_{j(i)}^{\bar{V}}\ ,\ m_{\bar{U}}^{\bar{V}}(\underline{h}_{i,j}^{\bar{U}}) \equiv \underline{h}_{j(i),j}^{\bar{V}}\ ,$$
$$m_{\bar{U}}^{\bar{V}}(\underline{k}_{i,j}^{\bar{U}}) \equiv \underline{k}_{j(i),j}^{\bar{V}}\ ,\ m_{\bar{U}}^{\bar{V}}(\underline{g}_{i,j}^{\bar{U}}) \equiv \underline{g}_{j(i),j}^{\bar{V}}$$

Referint-nos als exemples anteriors, tindrem un morfisme de V' en V si prenem com aplicació m de M.3 la que porta $\cdot$ en +, + en $\cdot$ i deixa tots els altres operadors fixos.

Direm que un segment $\bar{X}$ és posterior a $\bar{Y}$ si l'aplicació idèntica del conjunt de termes i fòrmules en ell mateix és un morfisme de $\bar{Y}$ en $\bar{X}$. En aquest cas posarem $\bar{Y} \prec \bar{X}$.

Observacions. Es comproven fàcilment les següents:

Donats $\bar{U}$ i $\bar{V}$, es pot comprovar en un nombre finit de passos si hi ha, o no, un morfisme de $\bar{U}$ en $\bar{V}$.

Si $m_{\bar{U}}^{\bar{V}}$ és un morfisme i $\bar{U} \vdash \underline{A}$, aleshores $\bar{V} \vdash m_{\bar{U}}^{\bar{V}}(\underline{A})$.

Donats $\bar{U}$ i $\bar{V}$ podem construir $\bar{W}$ per al qual hi hagi morfismes $m_{\bar{U}}^{\bar{W}}$ i $m_{\bar{V}}^{\bar{W}}$. De fet, podem construir $\bar{W}$ posterior a $\bar{U}$.

4.3. El punt feble del formalisme. Pensem en un formalisme, que anomenarem formalisme-*, en el que, a més dels principis PR.1,2 i 3 anteriors, tinguèssim el principi

PR*. Si $\bar{U}$ és un segment, i si $\bar{f}$ i $\bar{g}$ són operadors de grau n+1 tals que per cada col·lecció de numerals $\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,\underline{c}$, es compleix

$$\bar{U} \vdash \bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,\underline{c})=\bar{g}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,\underline{c});$$

aleshores també és un segment el sistema formal que s'obté d'afegir a $\bar{U}$ l'esquema següent de postulats, per qualssevol numerals $\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n$:

$$\vdash E\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=E\bar{g}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)$$

És clar que aquest formalisme-* seria més satisfactori, si no fos perque no hem estat capaços de demostrar constructivament la seva consistència. Potser aquest fracàs no és atribuible exclussivament a manca d'habilitat. Aquesta possibilitat es suggereix en observar que el formalisme-* funciona, per aixi dir-ho, massa bé, en el sentit que dóna la impressió de permetre construir un model de l'aritmetica clàssica (segons [1], per exemple); i si aquesta impressió fos justificada i es pogués demostrar constructivament la consistència del formalisme-* es tindria, de retop, una demostració constructiva de la consistència de l'aritmètica clàssica. No intentarem ara d'aprofondir en aquesta questió. Només n'hem paralat per explicar la renúncia a l'intent d'incloure PR* en el formalisme. El no disposar de PR* en el formalisme implica clarament una debilitat del mateix que, segons veurem a continuació,ens obliga a trencar un costum arrelat pero que potser no ha d'impedir un bon desenvolupament de l'analisi.

4.4. <u>Sobre el desenvolupament de l'analisi mitjançant el formalisme</u>. Només tractarem d'algun punt delicat, per a il·lustrar les dificultats que es troben. El que hem de fer és utilitzar el formalisme de manera constructiva. Aixo és el que es fa quan es vol desenvolupar una teoria matemàtica en base a un sistema formal. En el nostre cas tenim, en lloc d'un sistema formal, una categoria de sistemes formals. No hem trobat una manera de tractar amb diferents segments simultàniament. Si ens interessen els segments $\bar{U}$ i $\bar{V}$, no tenim altra manera de tractar-los alhora que mitjançant morfismes $m^{\bar{W}}_{\bar{U}}$ i $m^{\bar{W}}_{\bar{V}}$ que ens els englobin en un altre segment $\bar{W}$. Ja hem observat que podem considerar $\bar{W}$ posterior a $\bar{U}$ o a $\bar{V}$. No cal dir que aquest procediment és molt comú en matemàtiques; és el que es segueix quan es fan canvis de context o de notació. Així, doncs, treballarem sempre en un segment que podem anar engrandint d'acord amb PR.2 i PR.3. Ens convindrà, pero, que qualsevol segment en el que treballem sigui posterior a un cert segment, que anomenarem "bàsic", i que ara definirem. A partir del segment inicial $\bar{I}$ introduim, successivament, tal com ho hem fet a 4.2.10, els postulats indispensables per a introduir les funcions $+(x,y)$, $\cdot(x,y)$ i $\bar{p}(x)$, aquesta última, recordem-ho, amb la propietat

$$\vdash \bar{p}(0)=0$$

$$\vdash \bar{p}(S(\underline{b}))=\underline{b} \text{ per cada numeral } \underline{b}$$

Prenem ara, en PR.2, $\underline{r}\equiv x$, $\underline{s}\equiv\bar{p}(z)$, $\bar{f}\equiv\dot{-}$ i afegim al segment els postulats (I)-(VII), que fan que

$$\left.\begin{array}{l}\vdash \dot{-}(\underline{a},0)=\underline{a}\\ \vdash \dot{-}(\underline{a},S(\underline{b}))=\bar{p}(\dot{-}(\underline{a},\underline{b}))\end{array}\right\}\text{per numerals } \underline{a},\ \underline{b}$$

De manera semblant afegim encara els postulats que introdueixen $\bar{a}(x)$ i $\bar{b}(x)$ amb les propietats

$$\left.\begin{array}{l}\vdash \bar{a}(0)=0\\ \vdash (\bar{a}(S(\underline{b}))=S(0)\end{array}\right\}\text{per qualsevol numeral } \underline{b}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vdash \bar{b}(0)=S(0)\\ \vdash \bar{b}(S(\underline{b}))=0\end{array}\right\}\text{per qualsevol numeral } \underline{b}$$

El segment que tenim ara és el segment <u>bàsic</u>. Qualsevol segment que considerem sera posterior a ell.

Usarem les expressions auxiliars $\underline{b}+\underline{c}$, $\underline{b}\cdot\underline{c}$, etc per a representar termes o formules segons les convencions seguents:

$$\underline{b+c} \equiv +(\underline{b},\underline{c})$$

$$\underline{bc} \equiv \underline{b}\cdot\underline{c} \equiv \cdot(\underline{b},\underline{c})$$

$$\underline{b}\dot{-}\underline{c} \equiv \dot{-}(\underline{b},\underline{c})$$

$$|\underline{b}-\underline{c}| \equiv (\underline{b}\dot{-}\underline{c})+(\underline{c}\dot{-}\underline{b})$$

$$\underline{b}\leq\underline{c} \equiv \underline{b}\dot{-}\underline{c}=0$$

$$\underline{b}<\underline{c} \equiv S(\underline{b})\leq\underline{c}$$

Suprimirem parèntesis de la manera habitual.

Aquest segment bàsic conté una petita part de l'aritmètica recursiva. A [3] o [4] es poden trobar les demostracions de les propietats de les funcions i relacions anteriors, que són fàcilment adaptables al formalisme.

Fem una convenció sobre la notació. Suposem que estem considerant un segment $\bar{U}$. Com que només hem de considerar segments $\bar{U}',\bar{U}'',\ldots$ tals que

$$U \prec U' \prec U' \prec \ldots,$$

i com que, en aquest cas,

$$\bar{U} \vdash \underline{A} \text{ implica } \bar{U}' \vdash \underline{A},\ \bar{U}' \vdash \underline{A} \text{ implica } \bar{U}'' \vdash \underline{A}, \text{ etc}$$

$$\underline{b}\in N_{\bar{U}} \text{ implica } \underline{b}\in N_{\bar{U}'},\quad \underline{b}\in N_{\bar{U}'} \text{ implica } \underline{b}\in N_{\bar{U}''}, \text{ etc}$$

$$\underline{b}\in N_{\bar{U}}(x_1,\ldots,x_n) \text{ implica } \underline{b}\in N_{\bar{U}'}(x_1,\ldots,x_n), \text{ etc}$$

podem suprimir la notació del segment davant del signe $\vdash$, i també com a índex, i escriure simplement

$$\vdash \underline{A}\ ,\ \underline{b}\in N\ ,\ \underline{b}\in N(x_1,\ldots,x_n)$$

per a indicar que, per el segment $\bar{V}$ que estiguem considerant en un moment donat es compleix $\bar{V} \vdash \underline{A}$, $\underline{b}\in N_{\bar{V}}$ o $\underline{b}\in N_{\bar{V}}(x_1,\ldots,x_n)$.

Direm que una terna de termes, denotada $\underline{b}-\underline{c}/\underline{d}$, és un <u>racional</u> si $\underline{b}\in N$, $\underline{c}\in N$, $\underline{d}\in N$ i $\vdash \neg\underline{d}=0$. En aquest cas escriurem $\underline{b}-\underline{c}/\underline{d}\in Q$.

Direm que una terna $\underline{b}-\underline{c}/\underline{d}$ és una <u>funció</u> <u>fraccionària</u> de $x_1,\ldots,x_n$ si $\underline{b}\in N(x_1,\ldots,x_n)$, $\underline{c}\in N(x_1,\ldots,x_n)$ i $\underline{d}\in N(x_1,\ldots,x_n)$. En aquest cas escriurem $\underline{b}-\underline{c}/\underline{d}\in Q'(x_1,\ldots,x_n)$. Admetem el cas n=0; de manera que $\underline{b}-\underline{c}/\underline{d}\in Q'$ vol dir que $b\in N$, $c\in N$ i $d\in N$.

A continuació introduïrem certes expressions auxiliars per a representar termes i fòrmules.

Si $\underline{b}-\underline{c}/\underline{d} \in Q'(x_1,\ldots,x_n)$ i $\underline{f}-\underline{g}/\underline{h} \in Q'(x_1,\ldots,x_n)$:

$(\underline{b}-\underline{c}/\underline{d})=(\underline{f}-\underline{g}/\underline{h}) \equiv (\underline{bh}+\underline{fd})-(\underline{ch}+\underline{gd})/(\underline{dh})$

$(\underline{b}-\underline{c}/\underline{d})(\underline{f}-\underline{g}/\underline{h}) \equiv (\underline{b}-\underline{c}/\underline{d})\ (\underline{f}-\underline{g}/\underline{h}) \equiv (\underline{bf}+\underline{gc})-(\underline{bg}+\underline{cf})/(\underline{dh})$

$-\ (\underline{b}-\underline{c}/\underline{d}) \equiv \underline{c}-\underline{b}/\underline{d}$

$(\underline{b}-\underline{c}/\underline{d})^{-1} \equiv (\underline{d}(\bar{a}(\underline{b}\dot{-}\underline{c})))-(\underline{d}(\bar{a}(\underline{c}\dot{-}\underline{b})))/|\underline{b}-\underline{c}|$

$(\underline{b}-\underline{c}/\underline{d})-\ (\underline{f}-\underline{g}/\underline{h}) \equiv (\underline{b}-\underline{c}/\underline{d})+(-(\underline{f}-\underline{g}/\underline{h}))$

Si $b-c/d \in Q$ i $f-g/h \in Q$:

$(\underline{b}-\underline{c}/\underline{d})=(\underline{f}-\underline{g}/\underline{h}) \equiv \underline{bh+cd=ch+df}$

$(\underline{b}-\underline{c}/\underline{d})\leq(\underline{f}-\underline{g}/\underline{h}) \equiv (\underline{bh}+\underline{gd})\leq(\underline{ch}+\underline{fd})$

$(\underline{b}-\underline{c}/\underline{d})<(\underline{f}-\underline{g}/\underline{h}) \equiv (\underline{bh}+\underline{gd})<(\underline{ch}+\underline{fd})$

Donem per demostrades les propietats de les operacions i relacions anteriors, i la de l'invers multiplicatiu d'un racional no nul.

Considerem ara una terna de funcions de x, $\underline{b}$, $\underline{c}$ i $\underline{d}$. Introduïm l'expressió auxiliar F(x) i convenim, per cada terme $\underline{t}$, en que

$$F(\underline{t}) \equiv (\underline{b}|(x,\underline{t}))-(\underline{c}|(x,\underline{t}))/(\underline{d}|(x,\underline{t}))$$

Suposem ara que F és una <u>successió de racionals</u>, és a dir que

$$\vdash \neg\, \underline{d}|(x,\underline{a})=0, \text{ per cada numeral } \underline{a}$$

Admetem la següent definició:

<u>Definició</u>. Si F(x) és una successió de racionals i tenim un terme $\underline{m} \in N(x)$ tal que

(1) $\vdash |F(\underline{m}|(x,\underline{n}))-F((\underline{m}|(x,\underline{n}))+\underline{r})|<(S(0)-0/S(\underline{n}))$

per cada numeral $\underline{n}$ i cada numeral $\underline{r}$, aleshores direm que F(x) és un <u>successió de Cauchy</u>.

Suposem que F(x) és de Cauchy. D'acord amb les definicions obtindrem un terme $\underline{f}$, funció de x, y, z, tal que la formula (1) és

(2) $\vdash \underline{f}|(x,\underline{n})|(y,\underline{m}|(x,\underline{n}))|(z,\underline{r})=0$, per qualssevol numerals $\underline{n}$, $\underline{r}$.

Considerem la funció $S(0)\dot{-}\underline{f}$. Introduïm postulats nous que facin, per un cert operador $\bar{g}$ i qualssevol numerals $\underline{k}_1$, $\underline{k}_2$, $\underline{k}_3$, que

(3) $\vdash \bar{g}(\underline{k}_1,\underline{k}_2,\underline{k}_3)=S(0)\dot{-}\underline{f}\,|(x,\underline{k}_1)|(y,\underline{k}_2)|(z,\underline{k}_3)$

Aleshores (1) serà equivalent a

(4) $\vdash \bar{g}(\underline{n},\underline{m}|(x,\underline{n}),\underline{r})=0$, per qualssevol numerals $\underline{n}$, $\underline{r}$.

Postulem, d'acord amb PR.3,

(5) $\vdash \neg\, \underline{n}=\underline{b}_1 \vee \neg\, \underline{m}\,|(x,\underline{n})=\underline{b}_2 \vee E\bar{g}(\underline{b}_1,\underline{b}_2)=0$, per qualssevol numerals $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$ i $\underline{n}$.

Com que per cada $\underline{n}$ podem trobar numerals $\underline{c}_j$ tals que

(5') $\vdash \underline{m}\,|(x,\underline{n})=\underline{c}_1 \vee \ldots \vee \underline{m}\,|(x,\underline{n})=\underline{c}_t$,

podem deduir, per cada numeral $\underline{n}$,

(6) $\vdash E\bar{g}(\underline{n},\underline{m}|(x,\underline{n}))=0$

Introduint postulats nous d'acord amb PR.2 tindrem, per un cert operador $\bar{h}$,

(7) $\vdash \bar{h}(\underline{k}_1,\underline{k}_2)=E\bar{g}(\underline{k}_1,\underline{k}_2)$, per qualssevol numerals $\underline{k}_1$, $\underline{k}_2$.

Per tant, usant (6), podem inferir

(8) $\vdash \bar{h}(\underline{n},\underline{m}|(x,\underline{n}))=0$ per cada numeral $\underline{n}$

Utilitzant (5') i el postulat (IV) (per $\bar{h}$) tindrem

(9) $\vdash E\bar{h}(\underline{n})=S(0)$ per cada numeral $\underline{n}$

Finalment, si, per noves postulacions, tenim

(10) $\vdash \bar{k}(\underline{k})=Eh(\underline{k})$ per cada numeral $\underline{k}$

també tindrem

(11) $\vdash \neg\, \bar{k}(\underline{n})=0$ per cada numeral $\underline{n}$,

i podem aleshores, segons PR.3, introduir postulats que facin que

(12) $\vdash E\bar{k}=0$

Així, doncs, si F(x) és de Cauchy es satisfà (12).

Procedim ara a la inversa. Suposem donada una successió de racionals F(x) i anem introduint, successivament, postulats que facin que es compleixin (3), (7) i (10), per certs operadors $\bar{g}$, $\bar{h}$, $\bar{k}$. Suposem que aleshores podem demostrar (12). Per l'esquema (IV) (per $\bar{k}$) es satisfà llavors (11); i, segons (10), es satisfa (9). Pero aleshores tindrem

(8') $\vdash \bar{h}(\underline{n}, M\bar{h}(\underline{n}))=0$, per cada numeral $\underline{n}$,

i aixo vol dir, per (7), que

(6') $\vdash E\bar{g}(\underline{n}, M\bar{h}(\underline{n}))=0$ per cada numeral $\underline{n}$,

que significa, per (IV), que

(4') $\vdash \neg \bar{g}(\underline{n}, M\bar{h}(\underline{n}), \underline{r})=0$ per qualssevol numerals $\underline{n}$ i $\underline{r}$.

Finalment, segons (3),

(2') $\vdash \underline{f}\,\big|(x,\underline{n})\big|(y, M\bar{h}(\underline{n}))\big|(z,\underline{r})=0$ per qualssevol numerals $\underline{n}$ i $\underline{r}$, de manera que F(x) és de Cauchy.

Així, doncs, en resum: si, a partir d'una successió de racionals F(x), introduïm funcions $\bar{g}(x,y,z)$, $\bar{h}(x,y)$ i $\bar{k}(x)$ que satisfan (3), (7) i (10), aleshores F(x) és de Cauchy si i només si $\vdash E\bar{k}=0$.

Ara bé, les introduccions d'aquestes funcions es poden fer de moltes maneres. Si en lloc d'elles introduim $\bar{g}'(x,y,z)$, $\bar{h}'(x,y)$ i $\bar{k}'(x)$ no podem afirmar (perque no disposem de PR*) que les fòrmules $\neg E\bar{k}=0 \vee E\bar{k}'=0$ i $\neg E\bar{k}'=0 \vee E\bar{k}=0$ siguin teoremes. Aixo és, les fòrmules $E\bar{k}=0$ i $E\bar{k}'=0$ no són equivalents, malgrat el fet que $\vdash E\bar{k}=0$ si i només si $\vdash E\bar{k}'=0$.

Dit d'una altra manera, si pensem en la frase "F(x) és de Cauchy" com a afirmació susceptible de ser verdadera o falsa, aquesta frase no té una traducció canònica en una fòrmula (o en una classe d'equivalencia de fòrmules)del llenguatge. Una situació semblant es presenta quan s'ha de parlar de successions de Cauchy que tendeixen a zero, de la noció d'ordre entre successions de Cauchy, etc.

4.5. Demostració constructiva de la consistencia i del metateorema de minimalització.

4.5.1. Preliminars. Suposem que A és una col·lecció de formules constants. Direm que una llista finita de formules,

$$\underline{A}_1, \underline{A}_2, \ldots, \underline{A}_n$$

és una deducció a partir de A si cada membre $\underline{A}_i$ de la llista satisfà una de les condicions seguents:

A-Ded.1. $\underline{A}_i$ és un element de A.

A-Ded.2. $\underline{A}_i$ és de la forma $\neg\, \underline{b}=\underline{c} \vee \underline{c}=\underline{b}$, on $\underline{b}$ i $\underline{c}$ són termes constants.

A-Ded.3. Hi ha algun membre $\underline{A}_j$ de la llista, anterior a $\underline{A}_i$, i alguna formula quasiatòmica constant $\underline{B}$, tals que $\underline{A}_i \equiv \underline{A}_j \vee \underline{B}$.

A-Ded.4. Hi ha membres $\underline{A}_j$ i $\underline{A}_k$ de la llista, anteriors a $\underline{A}_i$, i alguna formula atomica constant $\underline{b}=\underline{c}$, tals que $\underline{A}_j \equiv \underline{A}_i \vee \underline{b}=\underline{c}$ i $\underline{A}_k \equiv \underline{A}_i \vee \neg\, \underline{b}=\underline{c}$.

Altrament dit, una tal llista és una deducció a partir de A si cada membre de la llista pertany a A o es pot deduir de membres anteriors de la llista segons les regles R.I.1, 2 i 3 (en el cas de R.I.3, $\underline{A}_i$ s'infereix de dos membres anteriors; en el cas de R.I.2 s'infereix d'un membre anterior; en el cas de R.I.1 podriem dir que $\underline{A}_i$ s'infereix de zero membres anteriors).

Si una formula $\underline{C}$ és membre d'alguna deducció a partir de A direm que $\underline{C}$ es dedueix de A, i escriurem

$$A \vdash \underline{C}$$

Si A consta de tots els postulats d'un segment $\bar{U}$ l'afirmació anterior coincideix amb l'afirmació "$\underline{C}$ és un teorema de $\bar{U}$", que, com ja s'ha dit, també s'escriu $\bar{U} \vdash \underline{C}$.

Per qualsevol funció F del conjunt de fòrmules constants en el conjunt $\{\underline{\bar{V}}, \underline{\bar{F}}\}$ escriurem $F(\underline{A})=\underline{\bar{V}}$ o $F(\underline{A})=\underline{\bar{F}}$ per indicar, respectivament, que el valor de F en la formula $\underline{A}$ és $\underline{\bar{V}}$ o $\underline{\bar{F}}$. Una tal funció F és una valoració si satisfà les condicions següents:

V.1. $F(\underline{b}=\underline{c}) \equiv F(\underline{c}=\underline{b})$, per qualssevol termes constants $\underline{b}$ i $\underline{c}$.

V.2.

$$F(b=c) \equiv \begin{cases} \underline{\bar{V}}, \text{ si } F(\neg\, \underline{b}=\underline{c}) \equiv \underline{\bar{F}} \\ \underline{\bar{F}}, \text{ si } F(\neg\, \underline{b}=\underline{c}) \equiv \underline{\bar{V}} \end{cases} \text{ per qualssevol } \underline{b} \text{ i } \underline{c} \text{ constants}$$

V.3. Per qualssevol $\underline{A}_1, \ldots, \underline{A}_n$ quasiatòmiques,

$$F(\underline{A}_1 \vee \ldots \vee \underline{A}_n) \equiv \begin{cases} \underline{\bar{V}}, \text{ si } F(\underline{A}_i) \equiv \underline{\bar{V}} \text{ per algun } i \\ \underline{\bar{F}}, \text{ en cas contrari} \end{cases}$$

Direm que una valoració F és compatible amb una fòrmula constant $\underline{A}$ si $F(\underline{A}) = \underline{\bar{V}}$. Direm que F és compatible amb una col·lecció de formules constants si és compatible amb cada membre de la col·lecció.

4.5.1.1. Lema. Si A és un conjunt finit de fòrmules constants i $\underline{C}$ és una fòrmula constant, aleshores $A \vdash \underline{C}$ si i només si totes les valoracions compatibles amb A són compatibles amb $\underline{C}$.

És fàcil veure que cada membre de cada deducció a partir de A és compatible amb totes les valoracions compatibles amb A. Reproduïrem la demostració de la recíproca, per autosuficiència i per que es vegi el seu caràcter constructiu. Suposarem, doncs, que cada valoració compatible amb A és compatible amb $\underline{C}$, i donarem la manera de construir una deducció de $\underline{C}$ a partir de A. Si la col·lecció A és buida vol dir que totes les valoracions són compatibles amb $\underline{C}$, i això implica que hi ha alguna fòrmula constant $\underline{b{=}c}$ tal

$$\underline{C} \equiv \underline{b{=}c} \vee \neg\, \underline{b{=}c} \vee \ldots, \text{ o bé } \underline{C} \equiv \underline{b{=}c} \vee \neg\, \underline{c{=}b} \vee \ldots$$

Pero aleshores és fàcil construir una deducció de $\underline{C}$ a partir de A, que comença amb la formula

$$\underline{b{=}c} \vee \neg\, \underline{c{=}b}$$

en el segon cas, o amb les formules

$$\underline{b{=}c} \vee \neg\, \underline{c{=}b}\ ,\ \underline{c{=}b} \vee \neg\, \underline{b{=}c}\ ,\ \underline{b{=}c} \vee \neg\, \underline{c{=}b} \vee \neg\, \underline{b{=}c}\ ,$$

$$\underline{c{=}b} \vee \neg\, \underline{b{=}c} \vee \underline{b{=}c}\ ,\ \underline{b{=}c} \vee \neg\, \underline{b{=}c}$$

en el primer cas, i tots els altres membres de la qual es van obtenint d'acord amb R.I.2.

Suposem doncs que A no és buida.

Fem una altra simplificació. Observaem que cada una de les fòrmules $\underline{X} \vee \underline{b{=}c}$ i $\underline{X} \vee \underline{c{=}b}$ és deduïble de l'altra i que cada valoració té el mateix valor en elles, i observem que la situació anàloga es presenta si $\underline{b{=}c}$

i $\underline{c}=\underline{b}$ estan precedides de $\neg$. De manera que, sense perdre generalitat, sempre que $\underline{b}=\underline{c}$ o $\underline{c}=\underline{b}$ aparegui en una formula de A podem escollir una d'aquestes dues formules i substituir cada aparició de l'altra per la que hem escollit. Així, doncs, suposem també que sempre que $\underline{b}=\underline{c}$ aparegui en un element de A, aleshores $\underline{c}=\underline{b}$ no apareix en cap element de A, a menys que $\underline{b}\equiv\underline{c}$. I també, per les mateixes raons anteriors, podem suposar que, en aquest cas, $\underline{c}=\underline{b}$ no apareix tampoc a $\underline{C}$, amb la mateixa excepció trivial.

Escrivim ara la llista, sense repeticions, de totes les fòrmules atòmiques que apareixen en membres de A, precedides o no de $\neg$:

$$\underline{b}_1=\underline{c}_1 \ , \ \underline{b}_2=\underline{c}_2 \ , \ \ldots \ , \ \underline{b}_n=\underline{c}_n$$

Fem ara

$$\underline{C} = \underline{C}_1 \vee \underline{C}_2$$

de manera que a $\underline{C}_1$ no hi apareix cap fòrmula atòmica que no estigui en la llista anterior, i que a $\underline{C}_2$ no hi apareix cap que hi estigui. Donada qualsevol F compatible amb A podem construir aleshores una valoració F' tal que

$$F'(\underline{b}_i=\underline{c}_i) \equiv F(\underline{b}_i=\underline{c}_i) \text{ per } i\equiv 1,\ldots,n$$

$$F'(\underline{C}_2) \equiv \underline{\bar{F}}$$

Aquesta F' també sera compatible amb A i, per tant, amb $\underline{C}$; pero com que $F'(\underline{C}_2)\equiv\underline{\bar{F}}$, necessàriament $F'(\underline{C}_1)\equiv\underline{\bar{V}}$, cosa que vol dir que $F(\underline{C}_1)\equiv\underline{\bar{V}}$. Així que cada valoració compatible amb A és compatible amb $\underline{C}_1$. Demostrarem que podem deduir $\underline{C}_1$ a partir de A i aleshores, mitjançant R.I.2, ja tindrem una deducció de $\underline{C}$ a partir de A.

Si $\underline{C}_1$ és, per algun i, de la forma $\underline{b}_i=\underline{c}_i \vee \neg\underline{b}_i=\underline{c}_i \vee\ldots$ ja hem vist que $\underline{C}_1$ és deduible de qualsevol col·lecció de fòrmules. Suposarem també que aquest cas no es dóna.

Farem encara una altra reducció. Si $\underline{b}_i=\underline{c}_i$ no apareix a $\underline{C}_1$, precedida o no de $\neg$, considerem les fòrmules

$$\underline{C}' \equiv \underline{C}_1 \vee \underline{b}_i=\underline{c}_i \ , \ \underline{C}'' \equiv \underline{C}_1 \vee \neg\underline{b}_i=\underline{c}_i$$

És clar que cada valoració compatible amb A és també compatible amb $\underline{C}'$ i $\underline{C}''$ (perque ho és amb $\underline{C}_1$); i és clar que si tenim deduccions de $\underline{C}'$ i $\underline{C}''$ a partir de A també tindrem una deducció de $\underline{C}_1$ a partir de A, per R.I.3.

Així, doncs, per repetició de l'argument anterior, podem suposar que a $\underline{C}_1$ hi apareixen totes le $\underline{b}_i=\underline{c}_i$, precedides de $\neg$ per alguns i, i no precedides de $\neg$ per els altres. Si usem la notació

$$n(\underline{b}=\underline{c}) \equiv \underline{b}=\underline{c} \vee \ldots \vee \underline{b}=\underline{c} \quad \text{(n vegades)},$$

$$n(\neg b=c) \equiv \neg b=c \vee \ldots \vee \neg b=c \quad \text{(n vegades)},$$

tindrem doncs, per certs enters positius m_i, i mitjancant, potser, un canvi d'indexs:

$$\underline{C}_1 \equiv m_1(\underline{b}_1=\underline{c}_1) \vee \ldots \vee m_t(\underline{b}_t=\underline{c}_t) \vee m_{t+1}(\neg \underline{b}_{t+1}=\underline{c}_{t+1}) \vee \ldots \vee m_n(\neg \underline{b}_n=\underline{c}_n)$$

Considerem la valoració G determinada per

$$G(\underline{b}_i=\underline{c}_i) \equiv \bar{\underline{F}}, \text{ si } 1\leq i\leq t$$

$$G(\underline{b}_i=\underline{c}_i) \equiv \bar{\underline{V}}, \text{ si } t<i\leq n$$

$$G(\underline{b}=\underline{c}) \equiv \bar{\underline{F}}, \text{ sempre que } \underline{b}=\underline{c} \not\equiv \underline{b}_i=\underline{c}_i \text{ i } \underline{b}=\underline{c} \not\equiv \underline{c}_i=\underline{b}_i \text{ per } 1\leq i\leq n$$

Com que cada F compatible amb A és compatible amb $\underline{C}_1$, i G no ho és, podem trobar algun element $\underline{B}$ de A tal que $G(\underline{B})=\bar{\underline{F}}$. Pero això implica que per certs enters no negatius m_i' es té

$$\underline{B} \equiv m_1'(\underline{b}_1=\underline{c}_1) \vee \ldots \vee m_t'(\underline{b}_t=\underline{c}_t) \vee m_{t+1}'(\neg \underline{b}_{t+1}=\underline{c}_{t+1}) \vee \ldots \vee m_n'(\neg \underline{b}_n=\underline{c}_n)$$

És possible que $m_i' > m_i$ per alguns i, pero aixo no és obstacle per construir una deducció de $\underline{C}_1$ a partir de $\underline{B}$. Per fer aquest procés hem d'observar que, en general, si $\underline{A}_1,\ldots,\underline{A}_r$ són formules quasiatomiques constants i $\underline{b}=\underline{c}$ és constant, aleshores la seguent llista és una deducció de $\underline{b}=\underline{c} \vee \underline{A}_1 \vee \ldots \vee \underline{A}_r$ a partir de $\underline{b}=\underline{c} \vee \underline{b}=\underline{c} \vee \underline{A}_1 \vee \ldots \vee \underline{A}_r$:

$\neg\underline{b}=\underline{c} \vee \underline{c}=\underline{b}$, $\neg\underline{c}=\underline{b} \vee \underline{b}=\underline{c}$, $\neg\underline{b}=\underline{c} \vee \underline{c}=\underline{b} \vee \underline{b}=\underline{c}$, $\neg\underline{c}=\underline{b} \vee \underline{b}=\underline{c} \vee \neg\underline{b}=\underline{c}$,

$\neg\underline{b}=\underline{c} \vee \underline{b}=\underline{c}$, $\neg\underline{b}=\underline{c} \vee \underline{b}=\underline{c} \vee \underline{A}_1$, ... , $\neg\underline{b}=\underline{c} \vee \underline{b}=\underline{c} \vee \underline{A}_1 \vee \ldots \vee \underline{A}_r$,

$\underline{b}=\underline{c} \vee \underline{b}=\underline{c} \vee \underline{A}_1 \vee \ldots \vee \underline{A}_r$, $\underline{b}=\underline{c} \vee \underline{A}_1 \vee \ldots \vee \underline{A}_r$

Hem de fer també la observació analoga per $\neg\underline{b}=\underline{c} \vee \underline{A}_1 \vee \ldots \vee \underline{A}_r$, i amb aixo s'acaba la demostració del lema 4.5.1.1.

Direm que la valoració G és posterior a la F, i escriurem $F \prec G$, si

$$G(\underline{d}_1=\underline{d}_2) \equiv \underline{\bar{V}} \quad \text{sempre que} \quad F(\underline{d}_1=\underline{d}_2) \equiv \underline{\bar{V}}$$

Anomenarem termes primitius els que són de les formes $\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)$, $E\bar{g}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)$ i $M\bar{g}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)$, on els $\underline{b}_i$ són numerals, $\bar{f}$ és operador de grau n, $\bar{g}$ operador de grau n+1 i tant $\bar{f}$ com $\bar{g}$ són diferents de S.

Direm que la valoració F és distingida si es satisfan les tres condicions seguents:

V.D.1. $F(\underline{c}=\underline{c})\equiv V$ per tots els numerals $\underline{c}$ d'una certa col·lecció I_F finita.

V.D.2. Per certs termes primitius $\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_r$, diferents entre ells, i per certs numerals $\underline{c}_1,\ldots,\underline{c}_r$ de I_F, tenim que $F(\underline{b}_i=\underline{c}_i)=V$. Les formules $\underline{b}_1=\underline{c}_1$, $\ldots$, $\underline{b}_r=\underline{c}_r$ seran anomenades les identitats bàsiques de F. La col·lecció d'identitats basiques de F pot ser buida.

Abans de donar la tercera condició considerem qualsevol terme constant $\underline{d}$ i fem, reiteradament, mentre sigui possible, la operació de substituir alguna presencia d'algun $\underline{b}_i$ de la col·lecció de V.D.2 per el $\underline{c}_i$ corresponent. Quan ja no es pugui fer aquesta operació haurem obtingut un terme $\underline{d}'$, que no depèn de l'ordre en que s'hagin fet les operacions. Si $\underline{d}' \in I_F$ escriurem $\underline{d} \in N_F$ i $\#\underline{d}\equiv\underline{d}'$. La tercera condició és:

V.D.3. Per qualssevol termes constants $\underline{d}_1$ i $\underline{d}_2$,

$$F(d_1=d_2) \equiv \begin{cases} \underline{\bar{V}}, \text{ si } \underline{d}_1 \in N_F \text{ i } \#\underline{d}_1 \equiv \#\underline{d}_2 \\ \underline{\bar{F}}, \text{ en cas contrari} \end{cases}$$

És clar que una valoració distingida F queda determinada per I_F i les seves identitats bàsiques.

4.5.1.2. Lema. Cada valoració distingida F és compatible amb tots els casos de E.P.I.2 i E.P.I.3.

Per E.P.I.2 és obvi. Considerem qualsevol cas de E.P.I.3:

$$\neg\, \underline{b}=\underline{c} \vee \neg\, \underline{d}=\underline{f} \vee \underline{d}_1=\underline{f}\ ,$$

on $\underline{d}_1$ s'obté de d en substituir una presència de $\underline{b}$ per $\underline{c}$. Si $F(\underline{b}=\underline{c})\equiv F(\underline{d}=\underline{f})\equiv\bar{V}$ vol dir que $\#\underline{b}\equiv\#\underline{c}$ i $\#\underline{d}\equiv\#\underline{f}$. Considerem la presència de $\underline{b}$ en $\underline{d}$ que, en ser substituïda per $\underline{c}$, ens dóna $\underline{d}_1$. En aquesta presència de $\underline{b}$ fem substitucions de presències de termes primitius $\underline{b}_i$ per els corresponents $\underline{c}_i$, que faran que aquesta presencia de $\underline{b}$ quedi substituïda per $\#\underline{b}$. De la mateixa manera, en la presència de $\underline{c}$ en $\underline{d}_1$ que substitueix a la presència de $\underline{b}$ en $\underline{d}$ que hem considerat abans, fem substitucions de presències de $\underline{b}_i$ per $\underline{c}_i$, que ens portaran a que aquesta presència de $\underline{c}$ quedi substituida per $\#\underline{c}$. D'aquesta manera, com que $\#\underline{b}=\#\underline{c}$, haurem substituit la presencia de $\underline{b}$ en $\underline{d}$ i la presencia de $\underline{c}$ en $\underline{d}_1$ per el mateix numeral, obtenint aixi, a partir de $\underline{d}$ i $\underline{d}_1$, el mateix terme; i aixo implica que $\#\underline{d}\equiv\#\underline{d}_1$; i, com que $\#\underline{d}\equiv\#\underline{f}$, tindrem $\#\underline{d}_1\equiv\#\underline{f}$ i $F(\underline{d}_1=\underline{f})\equiv\bar{V}$.

Si entenem que $\underline{b}$ i $\underline{c}$ són els <u>membres</u> de $\underline{b}=\underline{c}$, direm que un terme $\underline{d}$ <u>està present</u> en una fòrmula $\underline{A}$ si hi ha alguna presència de $\underline{d}$ en un dels membres d'alguna de les fòrmules atòmiques que apareixen a $\underline{A}$ (precedides o no del signe $\neg$). Direm que un terme <u>està present</u> en una col·lecció de fòrmules si està present en alguna de les fòrmules de la col·lecció.

Considerem una col·lecció finita A de fòrmules constants. Direm que A és <u>closa</u> si es satisfan les condicions següents:

CL.1. Si $\underline{d}$, $\underline{f}$ i $\underline{b}$ són termes presents en A, dels quals $\underline{b}$ és primitiu, si $\underline{c}$ és un numeral tal que la fòrmula $\underline{c}=\underline{c}$ pertany a A, i si $\underline{d}_1$ s'obté de $\underline{d}$ en substituir alguna presència de $\underline{b}$ per $\underline{c}$, aleshores les fòrmules

$$\neg\,\underline{b}=\underline{c} \lor \neg\,\underline{d}=\underline{f} \lor \underline{d}_1=\underline{f}\ ,$$

$$\neg\,\underline{c}=\underline{b} \lor \neg\,\underline{d}_1=\underline{f} \lor \underline{d}=\underline{f}\ ,$$

també pertanyen a A.

CL.2. Si $\underline{c}_1$ i $\underline{c}_2$ són numerals diferents i tals que les fòrmules $\underline{c}_1=\underline{c}_1$ i $\underline{c}_2=\underline{c}_2$ pertanyen a A, aleshores la formula $\neg\,\underline{c}_1=\underline{c}_2$ també pertany a A.

CL.3. Les formules 0=0 i S(0)=S(0) pertanyen a A.

Observació. Si A és una col·lecció finita de fòrmules constants podem construir una col·lecció finita B que és la unió de A amb una col·lecció de casos de E.P.I.2 i E.P.I.3, i que és closa.

Suposem que A és finita closa. Direm que una valoració G és A-distingida si hi ha alguna valoració distingida F amb les propietats següents:

V.A-D.1. I_F és el conjunt de numerals $\underline{c}$ tals que $\underline{c}=\underline{c}$ pertany a A.

V.A-D.2. Per cada identitat bàsica $\underline{b}=\underline{c}$ de F, el terme primitiu $\underline{b}$ esta present en A.

V.A-D.3. Per qualssevol termes constants $\underline{d}$ i $\underline{f}$,

$$G(\underline{d}=\underline{f}) \equiv \begin{cases} F(\underline{d}=\underline{f}), \text{ si } \underline{d} \text{ i } \underline{f} \text{ estan presents en A} \\ \bar{\underline{F}}, \text{ en cas contrari} \end{cases}$$

Si F és una valoració distingida que té les propietats V.A-D.1 i V.A-D.2, la valoració G determinada per V.A-D.3 és distingida. Les identitats bàsiques de G són, per definició, les de F.

Si A és una col·lecció finita closa de fòrmules constants, cada valoració A-distingida queda perfectament determinada per les seves identitats bàsiques.

Cada valoració A-distingida és compatible amb totes les seves identitats bàsiques i amb tots els casos de E.P.I.1, 2 i 3 que pertanyen a A.

Si F i G són A-distingides, aleshores $F \prec G$ si i només si totes les identitats bàsiques de F ho són de G.

4.5.1.3. Lema. Suposem que A és finita i closa i que G és A-distingida. Qualsevol valoració H compatible amb totes les identitats bàsiques de G i amb tots els casos de E.P.I.1,2 i 3 que pertanyen a A és posterior a G.

Suposem que F és la valoració distingida que determina G, amb identitats bàsiques $\underline{b}_1=\underline{c}_1,\ldots,\underline{b}_r=\underline{c}_r$. Hem de mostrar que $H(\underline{d}=\underline{f})\equiv\bar{\underline{V}}$ sempre que $\underline{d}$ i $\underline{f}$ estiguin presents en A i que $\#\underline{d}\equiv\#\underline{f}$. Suposem que $\#\underline{d}\equiv\underline{c}$. Això vol dir que tenim una llista de termes

$$\underline{d}\equiv\underline{d}_1 \ , \ \underline{d}_2 \ , \ \dots \ , \ \underline{d}_t\equiv\underline{c}$$

tal que cada $\underline{d}_{i+1}$ s'obté de $\underline{d}_i$ en substituir per $\underline{c}_{j(i)}$ una presencia de $\underline{b}_{j(i)}$, per algun j(i) (de 1 a r). Com que A és closa les seguents formules pertanyen a A:

$$\neg\,\underline{c}_{j(1)}=\underline{b}_{j(1)} \vee \neg\,\underline{d}_2=\underline{c} \vee \underline{d}_1=\underline{c}$$

$$\neg\,\underline{c}_{j(2)}=\underline{b}_{j(2)} \vee \neg\,\underline{d}_3=\underline{c} \vee \underline{d}_2=\underline{c}$$

$$\dots$$

$$\neg\,\underline{c}_{j(t-1)}=\underline{b}_{j(t-1)} \vee \neg\,\underline{d}_t=\underline{c} \vee \underline{d}_{t-1}=\underline{c}$$

Com que H és compatible amb aquestes fòrmules i amb les identitats bàsiques també haurà de ser compatible amb

$$\neg\,\underline{d}_t=\underline{c} \vee \underline{d}_{t-1}=\underline{c}$$

$$\neg\,\underline{d}_{t-1}=\underline{c} \vee \underline{d}_{t-2}=\underline{c}$$

$$\dots$$

$$\neg\,\underline{d}_3=\underline{c} \vee \underline{d}_2=\underline{c}$$

$$\neg\,\underline{d}_2=\underline{c} \vee \underline{d}_1=\underline{c}$$

Però $\underline{d}_t=\underline{c}$ i $\underline{c}\in I_F$, de manera que $\underline{c}=\underline{c}$ pertany a A i $H(\underline{c}=\underline{c})\equiv\bar{\underline{V}}$. Per tant $H(\underline{d}_{t-1}=\underline{c})\equiv\bar{\underline{V}}$. Usant ara les fòrmules següents anem obtenint $H(\underline{d}_{t-2}=\underline{c})\equiv\bar{\underline{V}}$, ..., $H(\underline{d}_1=\underline{c})\equiv\bar{\underline{V}}$, aixo és $H(\underline{d}=\underline{c})\equiv\bar{\underline{V}}$.

De manera semblant mostrem que $H(\underline{f}=\underline{c})\equiv\bar{\underline{V}}\equiv H(\underline{c}=\underline{f})$

Considerem ara les seguents fòrmules de A:

$$\neg\,\underline{c}_{j(1)}=\underline{b}_{j(1)} \vee \neg\,\underline{d}_2=\underline{f} \vee \underline{d}_1=\underline{f}$$

$$\dots$$

$$\neg\,\underline{c}_{j(t-1)}=\underline{b}_{j(t-1)} \vee \neg\,\underline{d}_t=\underline{f} \vee \underline{d}_{t-1}=\underline{f}$$

Procedint com abans obtindrem $H(\underline{d}=\underline{f})\equiv\bar{\underline{V}}$.

Direm que una valoració és A-<u>normal</u>, per una A finita closa, si és A-distingida, compatible amb A i mínima amb aquestes propietats (segons l'ordre parcial $\prec$). Una valoració A-distingida i compatible amb A serà A-normal si i només si no podem suprimir cap identitat bàsica sense que deixi de ser compatible amb A (o bé si no hi ha cap identitat bàsica).

A continuació procedirem recursivament per a fer el següent: donada qualsevol col·lecció finita A de postulats d'un segment considerarem una col·lecció finita B de postulats del mateix segment que serà closa i contindrà A; construïrem aleshores totes les valoracions B-normals, que constituiran una col·lecció finita no buida, i veurem que cada valoració compatible amb B és compatible amb totes les identitats bàsiques d'alguna d'aquestes valoracions B-normals i és, per tant, posterior a ella; i al mateix temps demostrarem alguns altres fets interessants. Tot això ens permetrà de demostrar la consistència de cada segment i el metateorema de minimalització.

4.5.2. Les demostracions. Considerem qualsevol segment $\bar{U}$. Aquest segment, o bé és el segment inicial o s'ha d'haver obtingut, a partir del segment inicial, per un seguit d'adjuncions de postulats, d'acord amb PR.2 i PR.3. Cada adjunció ha determinat un segment, de manera que tenim una successió de segments

$$\bar{U}_0 , \bar{U}_1 , \dots , \bar{U}_n$$

tal que $\bar{U}_0$ és el segment inicial, $\bar{U}_n$ és $\bar{U}$ i, per cada $i<n$, $\bar{U}_{i+1}$ s'obté de $\bar{U}_i$ per adjunció d'uns esquemes de postulats (I)-(VII), d'acord amb PR.2, o per adjunció d'un esquema (VIII), d'acord amb PR.3.

Considerem qualsevol conjunt finit A de postulats de $\bar{U}$. Afegim a A casos de E.P.I.1, 2 i 3 fins a obtenir una col·lecció finita closa B que conté A. Representem la col·lecció de membres de B que són postulats de $\bar{U}_i$ per B_i. És clar que cada B_i és closa. Descriurem per cada B_i, recursivament, la col·lecció de valoracions B_i-normals, al mateix temps que anirem demostrant les afirmacions següents:

a_i) La col·lecció de valoracions B_i-normals és finita i no buida.

b_i) Cada valoració compatible amb B_i és posterior a una de les valoracions B_i-normals.

c_i) Per qualsevol operador $\bar{h}$ de grau p+1 i qualssevol numerals $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_p$, si $F(E\bar{h}(\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_p) = S(0)) \equiv \underline{\bar{V}}$ per cada valoració B_i-normal F, aleshores $M\bar{h}(\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n)$ és un $\bar{U}_i$-nombre.

d_i) En cap de les identitats bàsiques de cada valoració B_i-normal no hi apareix cap operador nou per $\bar{U}_i$.

La nostra i-èssima hipòtesi d'inducció o recursió serà que es satisfan a_i), b_i), c_i) i d_i) per qualsevol col·lecció finita closa B de postulats de $\bar{U}$.

Considerem el cas i=0. El conjunt B_0 és unió d'una col·lecció finita B_0' de casos de E.P.I.1 i una col·lecció finita de casos de E.P.I.2 i E.P.I.3. La única valoració B_0-normal és la valoració B_0-distingida que no té cap identitat bàsica, valoració que val $\underline{\bar{V}}$ en totes les fòrmules $\underline{c}=\underline{c}$ que pertanyen a B_0' i val $\underline{\bar{F}}$ en totes les altres fòrmules atòmiques. Es veu fàcilment que es satisfan a_0), b_0), c_0), d_0).

Suposem ara que tenim construïda la col·lecció de valoracions B_i-normals, i que es satisfan a_i), b_i), c_i), d_i). Hem de descriure les valoracions B_{i+1}-normals i mostrar que es satisfan les condicions anàlogues.

Hi ha dos casos.

<u>Primer cas. Si</u> $\bar{U}_{i+1}$ <u>s'obté de</u> U_i <u>per</u> PR.2. En aquest cas $\bar{U}_{i+1}$ s'obté d'afegir als postulats de $\bar{U}_i$ els esquemes (I)-(VII), per uns certs termes $\underline{r}, \underline{s}$ i algun operador $\bar{f}$, que satisfan les condicions de PR.2 (per $\bar{U} \equiv \bar{U}_i$). Pensem, per començar, en les operacions de les dues menes següents, a partir d'una valoració B_{i+1}-distingida G:

1ª) Si $\neg\, \underline{r} \,|(x_i, \underline{b}_i) = \underline{d} \vee \bar{f}(\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n, 0) = d$ és un cas de (I) que pertany a B_{i+1}, si $G(\underline{r} \,|(x_i, \underline{b}_i) = \underline{d}) \equiv \underline{\bar{V}}$, i si $\bar{f}(\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n, 0)$ no està present en cap de les identitats bàsiques de G, afegir a aquestes la identitat $\bar{f}(\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n) = \underline{d}$, definint així una nova valoració B_{i+1}-distingida G'.

$2^{\underline{a}}$) Si la formula

$$\neg\, \underline{s}\,|(x_i,\underline{b}_i)|(y,\underline{c})|(z,\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots\underline{b}_n,\underline{c}))=\underline{d} \vee \bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,S(\underline{c}))=\underline{d}$$

és un cas de (II) que pertany a B_{i+1}, si

$$G(\underline{s}\,|(x_i,\underline{b}_i)|(y,\underline{c})|(z,\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,\underline{c}))=\underline{d}) \equiv \underline{\bar{V}}\ ,$$

i si $\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,S(\underline{c}))$ no està present en cap de les identitats bàsiques de G, afegir $\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,_n,S(\underline{c}))=\underline{d}$ a aquestes identitats, obtenint així una nova valoració B_{i+1}-distingida G'.

Considerem ara qualsevol valoració B_i-normal F. Prenem G≡F en les descripcions de les operacions anteriors i efectuem, si podem, una operació de qualsevol d'aquestes dues menes, obtenint així una nova valoració B_{i+1}-distingida F'. Prenem ara, en les descripcions anteriors, G≡F' i tornem a efectuar, si podem, una operació d'una d'aquestes menes, etc. Obtindrem així, finalment, quan ja no poguem efectuar cap d'aquestes operacions, una valoració B_{i+1}-distingida F_1, que té les propietats següents: F_1 és posterior a F i és compatible amb tots els casos de (I) i (II) que pertanyen a B_{i+1}; i cada valoració posterior a F que és compatible amb tots aquests casos és posterior a F_1. Aquestes observacions es comproven fàcilment (podríem tenir dificultats si oblidèssim alguns detalls tals com, per exemple, que per cap valoració distingida H no és possible que $H(\underline{b}=\underline{c})\equiv H(\underline{b}=\underline{c}')\equiv\underline{\bar{V}}$ si $\underline{c}$ i $\underline{c}'$ són numerals diferents)

Pensem ara en les operacions de les tres menes següents, a partir d'una valoració B_{i+1}-distingida G:

$3^{\underline{a}}$) Si $\neg\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,0)=0 \vee M\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=0$ és un cas de $(III)_0$ que pertany a B_{i+1}, si $G(\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,0)\equiv\underline{\bar{V}}$, i si $M\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)$ no està present en cap de les identitats bàsiques de G, afegir $M\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=0$ a aquestes identitats, obtenint així una nova valoració B_{i+1}-distingida G'.

$4^{\underline{a}}$) Si la fòrmula

$$\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,0)=0 \vee \bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,0)=0 \vee\ldots\vee \bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,\underline{c})=0$$
$$\vee \neg\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,S(\underline{c}))=0 \vee M\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=S(\underline{c})$$

és un cas de (III)' que pertany a B_{i+1}, si

$$G(\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,S(\underline{c}))=0) \equiv \underline{\bar{V}} ,$$

$$G(\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,0)=0) \equiv \ldots \equiv G(\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,\underline{c})=0) \equiv \underline{\bar{F}} ,$$

i si $M\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)$ no està present en cap de les identitats bàsiques de G, afegir $M\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=S(\underline{c})$ a aquestes identitats, obtenint així una nova valoració B_{i+1}-distingida G'.

5ª) Si la fòrmula

$$\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,0)=0 \vee \bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,S(0))=0 \vee\ldots\vee \bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,\underline{c})=0$$
$$\vee \neg\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,S(\underline{c}))=0 \vee M\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=S(\underline{c})$$

és un cas de (III)' que pertany a B_{i+1}, si

$$G(\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,S(\underline{c}))=0) \equiv \underline{\bar{V}}$$

$$G(\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,0)=0) \equiv \ldots \equiv G(\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,\underline{c})=0)$$
$$\equiv G(M\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=S(\underline{c})) \equiv \underline{\bar{F}} ,$$

i si $\underline{d}$ és un numeral de la llista 0, S(0), ..., $\underline{c}$ tal que $\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,\underline{d})$ no està present en cap de les identitats bàsiques de G, afegir $\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,\underline{d})$ a aquestes identitats, obtenint així una nova valoració B_{i+1}-distingida G'.

Tornem ara a considerar qualsevol valoració B_i-normal F, i considerem la valoració F_1 que hem obtingut abans per operacions de les menes 1ª) i 2ª). Efectuem, si podem, prenent $G\equiv F_1$, una operació de les menes 3ª), 4ª), 5ª), obtenint així una nova valoració B_{i+1}-distingida F_1'; prenem ara $G\equiv F_1'$ i tornem, si podem, a efectuar una d'aquestes operacions, obtenint una altra valoració B_{i+1}-distingida F_1'', etc; fins a arribar a una valoració F_2 per a la qual ja no és possible (per $G\equiv F_2$) efectuar cap operació de les dites menes. La operació composta que ens porta a F_2 es pot fer, en general, de moltes maneres diferents. Considerem totes les valoracions que es poden obtenir a partir de F de la manera indicada, que denotarem $F_{2,1}$, $F_{2,2}$, ..., $F_{2,t}$.

Tindrem aleshores que cada $F_{2,j}$ és una valoració B_{i+1}-distingida posterior a F compatible amb tots els casos de (I), (II), $(III)_0$, (III)', (VI) i (VII) que pertanyen a B_{i+1}, i que cada valoració posterior a F compatible amb els dits casos és posterior a alguna de les $F_{2,j}$.

Pensem ara en les operacions de la mena següent, a partir d'una valoració B_{i+1}-distingida G:

$6^{\underline{a}}$) Si $\neg\,\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,\underline{c})=0 \vee E\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=S(0)$ és un cas de (IV) que pertany a B_{i+1}, si $G(\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,\underline{c})=0)\equiv\underline{\bar{V}}$, i si $E\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)$ no està present en cap de les identitats bàsiques de G, afegir a aquestes identitats la fòrmula $Ef(b_1,\ldots,b_n)=S(0)$, obtenint així una nova valoració B_{i+1}-distingida G'.

Escollim una $F_{2,j}$ i fem, per $G=F_{2,j}$, una operació de la mena $6^{\underline{a}}$), si és possible; amb la nova $F'_{2,j}$ així obtinguda tornem a fer una operació d'aquesta mena, etc, fins a arribar a una $F_{3,j}$ per a la qual ja no es pot fer cap operació d'aquesta mena. A partir de cada $F_{2,j}$ obtenim així una sola $F_{3,j}$. Tindrem aleshores una col·lecció de valoracions, $F_{3,1}$, $F_{3,2}$, ..., $F_{3,t}$, que tenen les propietats seguents: Cada $F_{3,j}$ és una valoració B_{i+1}-distingida posterior a F compatible amb tots els casos de (I), (II), $(III)_0$, (III)', (IV), (VI) i (VII) que pertanyen a B_{i+1}; i cada valoració posterior a F i compatible amb aquests casos és posterior a alguna de les $F_{3,j}$.

Considerem, per acabar, les operacions de la mena següent, a partir d'una G que sigui B_{i+1}-distingida:

$7^{\underline{a}}$) Si $E\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=0 \vee Ef(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=S(0)$ és un cas de (V) que pertany a B_{i+1}, i si $E\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)$ no està present en cap de les identitats bàsiques de G, afegir a aquestes la identitat $E\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=0$ o la identitat $E\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=S(0)$, obtenint així una nova valoració B_{i+1}-distingida G'.

Escollim alguna $F_{3,j}$, fem $G\equiv F_{3,j}$ i fem, si podem, una operació de la mena $7^{\underline{a}}$); amb la valoració així obtinguda tornem a fer, si podem, una operació d'aquesta mena, i així successivament fins arribar a una valoració amb la qual ja no poguem fer cap operació de la mena $7^{\underline{a}}$). Com que aquest seguit d'operacions es pot fer de moltes maneres diferents obtindrem, a partir de cada $F_{3,j}$, una col·lecció de valoracions, $F_{3,j,1}, \ldots, F_{3,j,n(j)}$. Canviem de notació, designant les valoracions $F_{3,1,1}, \ldots, F_{3,t,n(t)}$ per $F_{4,1}$, $\ldots, F_{4,v(F)}$. Tindrem aleshores: cada $F_{4,j}$ és una valoració B_{i+1}-distingida posterior a F compatible amb B_{i+1}; cada valoració posterior a F compatible amb B_{i+1} és posterior a alguna de les $F_{4,j}$.

Canviem novament la notació, i designem per

$$G_1, G_2, \ldots, G_w$$

els elements de la unió de les col·leccions $\{F_{4,1},\ldots,F_{4,v(F)}\}$, per totes les valoracions B_{i+1}-normals F. Es comprova sense massa dificultat que les G_i són les valoracions B_{i+1}-normals, i que es satisfan a_{i+1}), b_{i+1}) i d_{i+1}). Comprovarem ara que també es satisfa c_{i+1}). Si $\vec{h}$ és $\bar{f}$, les condicions $G_j(E\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=S(0)) \equiv \underline{\bar{V}}$ (per cada j) signifiquen que no hem tingut ocasió de fer cap operació de la mena $7^{\underline{a}}$) (ja que en cas contrari tindriem, per algun j, que $G_j(E\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=0) \equiv \underline{\bar{V}}$); pero també vol dir, aleshores, que hem estat obligats a fer $G_j(E\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=S(0)) \equiv \underline{\bar{V}}$ per una operació de la mena $6^{\underline{a}}$), per cada j, cosa que implica que hi ha algun numeral $\underline{c}_j$ tal que $G_j(\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,\underline{c}_j)=0) \equiv \underline{\bar{V}}$. Aixo implica, segons b_{i+1}), que

$$G(\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,\underline{c}_1)=0 \vee\ldots\vee \bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n,\underline{c}_w)=0) \equiv \underline{\bar{V}}$$

per cada G compatible amb B_{i+1} i, segons el lema 4.5.1.1, que $Mf(b_1,\ldots,b_n)$ és un U_{i+1}-nombre. Suposem ara que $\vec{h}$ no és $\bar{f}$, i que $G_j(E\bar{h}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=S(0))$ $\equiv \underline{\bar{V}}$ per cada G_j. Considerem, per cada j, la valoració B_i-normal F a la qual G_j és posterior. Afirmem que $F(E\bar{h}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_p)=S(0)) \equiv \underline{\bar{V}}$. Efectivament, en anar definint, a partir de F, mitjançant operacions de les menes $1^{\underline{a}}$)-$7^{\underline{a}}$), les valoracions que ens porten finalment a G_j, no canviem el valor $F(Eh(b_1,\ldots,b_n)=S(0))$; de manera que, com que per cada F que és B_i-normal hi ha una G_j posterior a ella, tindrem $F(E\bar{h}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=S(0)) \equiv \underline{\tilde{V}}$ per cada valoració B_i-normal i, per hipotesi recursiva, $M\bar{h}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)$ és un $\bar{U}_i$-nombre. Pero cada $\bar{U}_i$-nOmbre és $\bar{U}_{i+1}$-nombre. Així s'acaba la demostració en aquest primer cas.

Segon cas. Si U_{i+1} s'obté de U_i per PR.3. Sense perdre generalitat, posem i+1 en lloc de i. D'aquesta manera podem aprofitar la discussió del primer cas sense canviar de notació, si suposem que els segments $\bar{U}$ i $\bar{V}$ de PR.3 són $\bar{U}_i$ i $\bar{U}_{i+1}$, respectivament. El segment $\bar{U}_{i+2}$ és el que s'obté d'afegir a $\bar{U}_{i+1}$ l'esquema (VIII):

$$\vdash \neg(\underline{h}_1=\underline{k}_1)\big|(z_i,\underline{d}_i) \vee\ldots\vee \neg(\underline{h}_p=\underline{k}_p)\big|(z_i,\underline{d}_i)$$
$$\neg\,\underline{g}_1\big|(z_i,\underline{d}_i)=\underline{b}_1 \vee\ldots\vee \neg\,\underline{g}_n\big|(z_i,\underline{d}_i)=\underline{b}_n \vee \neg E\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=S(0) \;,$$

amb el supost que $\underline{h}_1,\ldots,\underline{h}_p,\underline{k}_1,\ldots,\underline{k}_p,\underline{g}_1,\ldots,\underline{g}_n$ són $\bar{U}_i$-funcions de $z_1,\ldots,z_q$ i que, per qualssevol numerals $\underline{d}_1,\ldots,\underline{d}_q,\underline{c}$,

(1) $$\tilde{U}_{i+1} \vdash \neg(h_1=k_1)\big|(z_i,d_i) \vee\ldots\vee \neg(h_p=k_p)\big|(z_i,d_i)$$
$$\vee \neg\bar{f}(\underline{g}_1\big|(z_i,\underline{d}_i),\ldots,\underline{g}_n\big|(z_i,\underline{d}_i),\underline{c})=0$$

La nostra tasca, en aquest segon cas, serà la de suprimir les G_j no compatibles amb B_{i+2}. Haurem de veure que les romanents seran les B_{i+2}-normals, i que satisfaran $a_{i+2})$, $b_{i+2})$, $c_{i+2})$ i $d_{i+2})$.

Suposem que els casos de (VIII) que pertanyen a B_{i+2} són

$$\neg(\underline{h}_1=\underline{k}_1)\big|(z_i,\underline{d}_i^j) \vee\ldots\vee \neg(\underline{h}_p=\underline{k}_p)\big|(z_i,\underline{d}_i^j)$$
$$\neg\,\underline{g}_1\big|(z_i,\underline{d}_i^j)=\underline{b}_1^j \vee\ldots\vee \neg\,\underline{g}_n\big|(z_i,\underline{d}_i^j)=\underline{b}_n^j \vee \neg E\bar{f}(\underline{b}_1^j,\ldots,\underline{b}_n^j)=S(0)$$

per $j\equiv 1,\ldots,t$, on els $\underline{d}_i$ i $\underline{b}_i$ són numerals.

Les valoracions no compatibles amb B_{i+2}, que hem d'eliminar, són les G_k que satisfan, per algun j:

(2) $$G_k((\underline{h}_1=\underline{k}_1)\big|(z_i,\underline{d}_i^j)) \equiv \ldots \equiv G_k((\underline{h}_p=\underline{k}_p)\big|(z_i,\underline{d}_i^j)) \equiv G_k(\underline{g}_1\big|(z_i,\underline{d}_i^j)=\underline{b}_1^j)$$
$$\equiv \ldots \equiv G_k(\underline{g}_n\big|(z_i,\underline{d}_i^j)=\underline{b}_n^j) \equiv G_k(E\bar{f}(\underline{b}_1^j,\ldots,\underline{b}_n^j)=S(0) = \underline{\tilde{V}}$$

La primera cosa que hem de veure és que no suprimim d'aquesta manera totes les G_k.

Usem, per simplificar, la notació

$$\underline{A}_s^j \equiv (\underline{h}_s = \underline{k}_s) \mid (z_i, \underline{d}_i^j), \text{ per } 1 \leqslant s \leqslant p$$

$$\underline{A}_{p+t}^j = \underline{g}_t \mid (z_i, \underline{d}_i^j) = \underline{b}_t^j, \text{ per } 1 \leqslant t \leqslant n$$

Suposem, en contra del que volem demostrar, que cada G_k satisfa (2) per algun j.

Suposem aleshores, amb la notació del primer cas, que G_k és posterior a $F_{3,r}$. Observem que

$$G_k(\underline{A}_i^j) = F_{3,r}(\underline{A}_i^j) \text{ per } 1 \leqslant i \leqslant p+n$$

Pensem en tots els indexs j tals que

$$F_{3,r}(\underline{A}_i^j) = \underline{\bar{V}} \text{ per } 1 \leqslant i \leqslant p+n$$

Si, en el procés d'obtenir G_k a partir de $F_{3,r}$, haguèssim tingut oportunitat de fer alguna operació de la mena $7^{\underline{a}}$) en relació a la formula

$$E\bar{f}(\underline{b}_1^j, \ldots, \underline{b}_n^j) = 0 \vee E\bar{f}(\underline{b}_1^j, \ldots, \underline{b}_n^j) = S(0)$$

per cada un d'aquests j, hauriem pogut construir una valoració $G_{k'}$ tal que, per cada un d'aquests j,

$$G_{k'}(E\bar{f}(\underline{b}_1^j, \ldots, \underline{b}_n^j) = 0) \equiv \underline{\bar{V}}$$

i, per tant,

$$G_{k'}(E\bar{f}(\underline{b}_1^j, \ldots, \underline{b}_n^j) = S(0)) \equiv \underline{\bar{F}},$$

i tindriem aleshores una valoració B_{i+1}-normal $G_{k'}$ que no satisfaria (2), contra el que estem suposant.

Així, doncs, si cada G_k satisfa (2) hi ha d'haver, per cada k, un índex j(k) que satisfa (2) tal que

$$F_{3,r}(\underline{A}_i^{j(k)}) = \underline{\bar{V}} \text{ per } 1 \leqslant i \leqslant p+n$$

i per al qual no tenim, a partir de $F_{3,r}$, ocasió de fer cap operació de la mena $7^{\underline{a}}$) relativa a la formula

$$E\bar{f}(\underline{b}_1^{j(k)}, \ldots, \underline{b}_n^{j(k)}) = 0 \vee E\bar{f}(\underline{b}_1^{j(k)}, \ldots, \underline{b}_n^{j(k)}) = S(0) \quad ,$$

i això vol dir que

$$F_{3,r}(E\bar{f}(\underline{b}_1^{j(k)}, \ldots, \underline{b}_n^{j(k)}) = S(0)) \equiv \underline{\bar{V}}$$

Però si ara pensem en la valoració $F_{2,r}$ de la qual s'obté $F_{3,r}$ per una operació de la mena 6$^{\text{a}}$), veiem que aleshores hem de tenir un numeral $\underline{c}_k$ tal que

$$F_{2,r}(\bar{f}(\underline{b}_1^{j(k)},\ldots,\underline{b}_n^{j(k)},\underline{c}_k)=0) \equiv \underline{\bar{V}}$$

Observem que $F_{3,r}$ val el mateix que $F_{2,r}$ en la formula anterior. Fem

$$\underline{A}_{p+n+1}^{j(k)} \equiv \bar{f}(\underline{b}_1^{j(k)},\ldots,\underline{b}_n^{j(k)},\underline{c}_k)=0$$

Tenim, doncs:

Si cada G_k satisfà (2) per algun j, podem trobar, per cada k, un índex j(k) i un numeral $\underline{c}_k$ tals que

$$G_k(\underline{A}_i^{j(k)}) \equiv \underline{\bar{V}} \text{ per } 1\leq i\leq p+n+1$$

Aixo últim vol dir que

(3) $\qquad G_k(\underline{A}_{i(1)}^{j(1)} \vee \underline{A}_{i(2)}^{j(2)} \vee\ldots\vee \underline{A}_{i(w)}^{j(w)}) \equiv \underline{\bar{V}}$, per cada k i cada funció i de $\{1,\ldots,w\}$ en $\{1,\ldots,p+n+1\}$.

Donat que les $\underline{A}_i^{j(k)}$ són fòrmules atòmiques, la hipòtesi d'inducció ens diu aleshores que cada valoració compatible amb B_{i+1} val $\underline{\bar{V}}$ en les formules (3), i el lema 4.5.1.1 ens diu que

$$B_{i+1} \vdash \underline{A}_{i(1)}^{j(1)} \vee\ldots\vee \underline{A}_{i(w)}^{j(w)} \quad \text{per cada } i:\{1,\ldots,w\}\to\{1,\ldots,p+n+1\}$$

i, per tant,

(4) $\qquad \bar{U}_{i+1} \vdash \underline{A}_{i(1)}^{j(1)} \vee\ldots\vee \underline{A}_{i(w)}^{j(w)}$ per cada $i:\{1,\ldots,w\}\to\{1,\ldots,p+n+1\}$

Recordem també que (1) implica, per cada k,

(5) $\qquad \bar{U}_{i+1} \vdash \neg\underline{A}_1^k \vee\ldots\vee \underline{A}_p^k \vee \neg\bar{f}(\underline{g}_1|(z_i,\underline{d}_i^{j(k)}),\ldots,\underline{g}_n|(z_i,\underline{d}_i^{j(k)}),\underline{c}_k)=0$

Tenim, doncs, en resum, que si cada G_k satisfés (2) per algun j, s'haurien de satisfer (4) i (5). Pero, usant alguns casos de E.P.I.3, no és més que un exercici el mostrar que de (4) i (5) es dedueixen

$$\bar{U}_{i+1} \vdash \bar{f}(\underline{b}_1^{j(k)},\ldots,\underline{b}_n^{j(k)},\underline{c}_k)=0$$

$$\bar{U}_{i+1} \vdash \neg\bar{f}(\underline{b}_1^{j(k)},\ldots,\underline{b}_n^{j(k)},\underline{c}_k)=0$$

Ara bé, aixo no és possible: en aquest cas podriem trobar una col·lecció finita closa B'_{i+1} de postulats de $\bar{U}_{i+1}$ de la qual es deduirien les dues fòrmules anteriors, i tindriem aleshores, per hipotesi d'inducció, alguna valoració (de fet, qualsevol valoració B'_{i+1}-normal) que valdria $\underline{\bar{V}}$ i $\underline{\bar{F}}$ en la formula $\bar{f}(\underline{b}_1^{j(k)},\ldots,\underline{b}_n^{j(k)},\underline{c}_k)=0$.

En conclusió, entre les G_k hi ha algunes valoracions compatibles amb B_{i+2} que no hem de suprimir. Fet aixo no és dificil demostrar que aquestes són les B_{i+2}-normals, i que es satisfan $a_{i+2})$, $b_{i+2})$ i $d_{i+2})$.

Hem de veure ara que també es satisfa $c_{i+2})$.

Suposem primer que l'operador $\bar{h}$ de $c_{i+2})$ no és $\bar{f}$, i suposem que $G_k(E\bar{h}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_p)=S(0) = \underline{\bar{V}}$ per cada valoració B_{i+2}-normal G_k. Això vol dir que cada valoració B_{i+1}-normal G_k que satisfà la condició

$$G_k(E\bar{h}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_p)=S(0)) \equiv \underline{\bar{F}}$$

s'ha d'haver suprimit perque satisfa (2). Aleshores arribem, de manera semblant a com hem procedit en la demostració inmediatament anterior, a que

$$\bar{U}_{i+1} \vdash E\bar{h}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_p)=S(0)$$

Aleshores podem trobar una col·lecció finita closa B''_{i+1} de postulats de $\bar{U}_{i+1}$ tal que $B''_{i+1} \vdash E\bar{h}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_p)=S(0)$, que vol dir que

$$G(E\bar{h}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_p)=S(0) \equiv \underline{\bar{V}} \text{ per cada valoració } B''_{i+1}\text{-normal } G;$$

i, per inducció, $M\bar{h}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_p)$ és $\bar{U}_{i+1}$-nOmbre i, en consequència, és $\bar{U}_{i+2}$-nombre.

Suposem, per acabar, que l'operador $\bar{h}$ de $\underline{c}_{i+2})$ és $\bar{f}$, i suposem que $G_k(E\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=S(0)) \equiv \underline{\bar{V}}$ per cada valoració B_{i+2}-normal G_k. Aquest cas es resol en observar que si hem de suprimir, perque satisfan (2), totes les G_k tals que $G_k(E\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=S(0)) \equiv \underline{\bar{F}}$, aleshores només resten les G_k en les que s'ha introduit la identitat basica $E\bar{f}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)=S(0)$ per una operació de la mena $6^{\underline{a}})$. La justificació d'aquesta afirmació no és dificil.

Amb això s'acaba la descripció de les valoracions B_i-normals i la demostració de $a_i)$, $b_i)$, $c_i)$, $d_i)$ per i=0, 1,..., n.

Feta la demostració anterior ja tenim demostrada la consistència de $\bar{U}$:

si fos possible, per alguna fòrmula atòmica $\underline{A}$, que $\bar{U} \vdash \underline{A}$ i $\bar{U} \vdash \neg \underline{A}$, tindriem també una col·lecció finita closa B de postulats de $\bar{U}$ tal que $B \vdash \underline{A}$ i $B \vdash \neg \underline{A}$. Pero aleshores, per qualsevol valoració B-normal F tindriem $F(\underline{A}) \equiv \bar{\underline{V}}$ i $F(\underline{A}) \equiv \bar{\underline{F}}$, cosa que no és possible, ja que la col·lecció de valoracions B-normals no és buida (segons a_n)).

També obtenim fàcilment el metateorema de minimalització: si $\bar{U} \vdash E\bar{h}(\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_p) = S(0)$ tindrem, com abans, $B \vdash E\bar{h}(\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_p) = S(0)$. Aleshores, per cada valoració B-normal F tindrem $F(E\bar{h}(\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_p) = S(0)) \equiv V$ i, per c_n), $M\bar{h}(\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_p) \in N_{\bar{U}}$.

Instituto de Matemáticas, U.N.A.M.

Secció de Matematiques, U.A.B.

Referències

[1] S.C. Kleene. Introduction to Metamathematics.(1952)North-Holland.

[2] M. Davis. Hilbert's tenth problem is unsolvable. Mathematical Monthly, 1973, pp. 233-269.

[3] R.L. Goodstein. Recursive Arithmetic. North-Holland, 1957.

[4] D. Hilbert & P. Bernays. Grundlagen der Mathematik, vol.1,Springer,1934

[5] R.L. Goodstein. Recursive Analysis. North-Holland, 1961.

[6] E. Specker. Nicht konstruktiv beweibare Sätze der Analysis. The Journal of Symbolic Logic, vol. 14, n°3, 1949, pp. 145-158.

[7] F. Tomàs. Un formalismo recursivo finitariamente consistente para un trozo de aritmética no constructiva, y su relación con el análisis recursivo. Anales del Instituto de Matemáticas, U.N.A.M., vol,20 n°2 1980, pp.205-258.

[8] O. Demuth & A. Kučera. Remarks on constructive mathematical analysis. Logic Colloquium 1978 (Boffa, van Dalen and Mc Aloon, editors). North-Holland.

Rebut el 7 de setembre del 1983

Instituto de Matemáticas
U.N.A.M.
Ciudad Universitaria
MEXICO D.F.

i

Secció de Matemàtiques
U.A.B.
Bellaterra (Barcelona)
ESPANYA