Pub. Mat. UAB
Vol. 27 Nº 2 Juny 1983

UNA PROPIEDAD TAUBERIANA EN ALGEBRAS TENSORIALES CON SEMIGRUPOS ANALITICOS

José E. Galé

Abstract

We show that each closed ideal in a projective tensor algebra $A \hat{\otimes} B$ is contained in some regular maximal ideal, if A and B are Banach algebras with suitable analytic semigroups. In particular, this property is also true for Beurling's algebras of functions which are valued into a Banach algebra B of type as above, without any assumption about the regularity of semisimplicity of B .

Introducción

La motivación para la presentación de esta nota es la siguiente. Si B es un álgebra de Banach conmutativa compleja no radical y $L^1(R;B)$ denota el álgebra de Banach de convolución formada por las funciones integrables Bochner de R en B , las cuestiones de análisis espectral concernientes a $L^1(R;B)$ consisten en saber si

(AS_1) <u>Cada subespacio cerrado propio e invariante por traslaciones de</u> $L^1(R,B)$ <u>está contenido en otro tal subespacio de</u>

$L^1(R,B)$ <u>que además sea maximal</u>

(AS_2) <u>Cada ideal cerrado propio de</u> $L^1(R,B)$ <u>está contenido en un ideal maximal regular de</u> $L^1(R,B)$.

Cuando $B = C$, los subespacios cerrados invariantes por traslaciones en el álgebra $L^1(R) = L^1(R;C)$ son precisamente sus ideales cerrados ([8], p. 125) y así, (AS_1) y (AS_2) son equivalentes. El establecimiento de cualquiera de ambos en este caso es el conocido teorema tauberiano de Wiener, cuyo enunciado abstracto se da habitualmente en estos términos: "Si A es un álgebra de Banach conmutativa, semisimple, regular y cumpliendo la condición de Tauber, cada ideal cerrado de A está contenido en un ideal maximal regular" ([8], p. 85). Obviamente, la cuestión (AS_1) puede plantearse también el caso en que B sea un espacio de Banach. Concretamente, en [12] se prueba que los únicos espacios de Hilbert separables B que verifican (AS_1) son los finito-dimensionales.

Por otra parte, la cuestión (AS_2) ha sido planteada y resuelta como cierta para álgebras B regulares, semisimples y tauberianas ([5],[10]). Los métodos consisten en la aplicación de propiedades de las álgebras tensoriales y reposan en el teorema tauberiano abstracto.

Una relación entre los problemas (AS_1) y (AS_2) en el caso general puede verse en [6], p. 414. De cualquier modo, siempre se verifica que (AS_1) implica (AS_2), puesto que todo ideal cerrado es invariante por traslaciones. Esto es consecuencia de la existencia de unidad aproximada en $L^1(R,B)$ ([6], p.

414, th. (1.3)) y de efectuar entonces el razonamiento habitual ([8], p. 125, 31 F). La no equivalencia entre (AS_1) y (AS_2), en general, puede mostrarse por ejemplo a partir de los resultados mencionados arriba. En efecto, si $L^2(T)$ es el álgebra hilbertizable de convolución sobre el toro unidimensional, $L^1(R,L^2(T))$ no cumple (AS_1), según [12]. Sin embargo, $L^2(T)$ es regular, semisimple y tauberiano, y se sigue que $L^1(R,L^2(T))$ sí satisface (AS_2).

Aquí nos ocupamos de la cuestión (AS_2), mostrando que se verifica para el producto tensorial proyectivo $A \hat{\otimes} B$ de dos álgebras de Banach conmutativas no radicales que contengan semigrupos analíticos con buenas propiedades de acotación. En [9], [10] el teorema tauberiano en $L^1(R;B)$ se prueba como consecuencia de análogos enunciados para álgebras $A \hat{\otimes} B$ con A y B regulares, semisimples y tauberianas. Esta nota está concebida como un complemento al tema, en el sentido de dar teoremas tauberianos para productos $A \hat{\otimes} B$, y en consecuencia para álgebras valoradas vectorialmente, fuera del contexto de la regularidad y semisimplicidad. El método que seguimos se basa en conjugar propiedades de álgebras radicales y el comportamiento asintótico de determinadas funciones analíticas en el semiplano $\{t \in C ; \operatorname{Re} t > 0\}$. Este método resulta eficaz en algunas cuestiones de naturaleza espectral. Fue ideado por Esterle en [3] para dar una demostración de variable compleja del teorema tauberiano en $L^1(R)$. Dales y Hayman lo emplean en el caso de álgebras de Beurling ([2]). En cuanto a resultados no conocidos previamente, este tipo de ideas se usan en [4] para probar teoremas de aproximación de funciones diferenciables en espacios de Hilbert.

El teorema tauberiano

Si A y B son dos álgebras de Banach conmutativas y por $A \hat{\otimes} B$ denotamos el producto tensorial proyectivo (completado) de ambas, éste es de nuevo un álgebra de Banach conmutativa y además el espacio de sus caracteres, o espacio de sus ideales maximales regulares, es isomorfo al producto cartesiano $\hat{A} \times \hat{B}$ de los espacios de caracteres de las respectivas álgebras A y B ([10], p. 150). Así, suponemos A y B no radicales, de cara a (AS_2).

Si I es un ideal cerrado en $A \hat{\otimes} B$ y

$$Z(I) = \{(\alpha,\beta) \in \hat{A} \times \hat{B} : (\alpha,\beta)(x) = 0 \quad \forall x \in I\},$$

probar (AS_2) es claramente equivalentes a probar que siempre que un ideal cerrado I de $A \hat{\otimes} B$ cumpla $Z(I) = \emptyset$ se siga necesariamente $I = A \hat{\otimes} B$. A su vez, $Z(I) = \emptyset$ si y sólo si el álgebra $A \hat{\otimes} B/I$ es radical (los caracteres sobre $A \hat{\otimes} B/I$ "son" precisamente los caracteres sobre $A \hat{\otimes} B$ nulos sobre I). En consecuencia, establecer (AS_2) en $A \hat{\otimes} B$ equivale a demostrar que "Si I es un ideal cerrado en $A \hat{\otimes} B$ tal que $A \hat{\otimes} B/I$ es radical, entonces $I = A \hat{\otimes} B$".

La condición que vamos a suponer sobre A y B, suficiente para probar (AS_2), viene dada en términos de la siguiente

Definición

Sea $\Pi_1 = \{t \in C\ ;\ \mathrm{Re}\ t > 1\}$. Designamos por $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las funciones positivas f definidas sobre Π_1 tales que si F es una función analítica sobre Π_1 con

$$\log |F(t)| \leq f(t) \qquad (t \in \Pi_1) \quad ,$$

entonces $F = 0$ ó $\limsup\limits_{t \to +\infty} \frac{\log F(t)}{t} > -\infty$.

Ciertamente, este tipo de condición no es desconocido en la literatura. Concretamente, en [2] se prueba que si K es una función positiva, creciente, continua sobre $[1,+\infty)$ tal que $J(K) < +\infty$, con $J(K) = \int_1^\infty (\frac{K(s)}{s^3})^{1/2}\, ds$, y si F es analítica sobre Π_1 tal que $\log |F(\rho e^{i\psi})| \leq K(\rho/\cos\psi)$ $(\rho e^{i\psi} \in \Pi_1)$ entonces $F = 0$ o $\limsup\limits_{t\to\infty} \frac{\log |F(t)|}{t} > -\infty$. La condición $\sup\limits_{\mathrm{Re}\ t\geq 1} e^{-|t|^\beta}|F(t)| < +\infty$ (para algún $0 < \beta < 1$), citada en [3] , es del tipo anterior, poniendo $K(s) = s^\beta$.

Teorema

Sean A,B álgebras de Banach conmutativas no radicales tales que existen semigrupos analíticos $(a^t)_{\mathrm{Re}\ t>0}$, $(b^t)_{\mathrm{Re}\ t>0}$ en A y B respectivamente de modo que $\lim\limits_{t\to 0^+} a^t a = a$, $\lim\limits_{t\to 0^+} b^t b = b$ para cada $a \in A$, $b \in B$ y la aplicación $t \longmapsto \log ||a^t|| + \log||b^t||$ $(\mathrm{Re}\ t > 0)$ está en $\mathcal{F}$.

Entonces, $A \hat{\otimes} B$ satisface (AS_2) .

Demostración

La aplicación $t \longmapsto a^t \otimes b^t$ $(\mathrm{Re}\ t > 0)$ es un semigrupo analítico en $A \hat{\otimes} B$. Además, si $a \in A$, $b \in B$, y $\varepsilon > 0$ elegimos $t_o > 0$ tal que si $0 < t < t_o$ se tenga

$$||a-a^t a|| < \frac{\varepsilon}{2(||b||+1)} , \quad ||a^t a|| < ||a|| + 1 ,$$

$||b-b^t b|| < \dfrac{\varepsilon}{2(||a||+1)}$. Se sigue que $||a \otimes b-(a^t \otimes b^t)(a \otimes b)||=$

$= ||a \otimes b - a^t a \otimes b^t b|| \leq ||a \otimes b - a^t a \otimes b|| +$

$+ ||a^t a \otimes b - a^t a \otimes b^t b|| \leq ||a-a^t a|| \, ||b|| +$

$+ ||a^t a|| \, ||b-b^t b|| < \varepsilon$,

si $0 < t < t_o$. Por tanto, $\lim_{t\to o^+} x(a^t \otimes b^t) = x$ para todo $x \in A \otimes B$.

Ahora supongamos que I es un ideal cerrado en $A \hat{\otimes} B$ tal que $A \hat{\otimes} B/I$ sea radical. Fijado $\lambda \in (A \otimes B/I)'$ no nulo, la función

$$\begin{array}{llllllll} F:\{t \in C: \mathrm{Re}\ t > 0\} & \longrightarrow & A \hat{\otimes} B & \longrightarrow & A \hat{\otimes} B/I & \longrightarrow & C \\ t & \longmapsto & a^t \otimes b^t & \longmapsto & [a^t \otimes b^t] & \longmapsto & \lambda([a^t \otimes b^t]) \end{array}$$

es analítica y

$$|F(t)| \leq ||\lambda|| \, ||[a^t \otimes b^t]|| \leq ||\lambda|| \, ||a^t|| \, ||b^t||,$$

si $\mathrm{Re}\ t > 0$,

con lo que, por una parte

$$\log (|F(t)|/||\lambda||) \leq \log ||a^t|| + \log||b^t|| , \quad \text{si} \quad \mathrm{Re}\ t > 1 ,$$

y así, $F = 0$ ó $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{\log |F(t)|}{t} > -\infty$

Por otra parte $[a^t \otimes b^t]_{\mathrm{Re}\, t>0}$ es un semigrupo analítico en el álgebra de Banach radical $A \hat{\otimes} B/I$ y por consiguiente, según [3] , lema 2.3,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\log \|[a^t \hat{\otimes} b^t]\|}{t} = -\infty$$

Se sigue que, necesariamente, $F = 0$, es decir, $\lambda([a^t \otimes b^t]) = 0$ para todo $t \in C$ tal que $\mathrm{Re}\, t > 0$ y para todo $\lambda \in (A \hat{\otimes} B/I)'$. De este modo, $a^t \otimes b^t \in I$ para cada $t \in C$ tal que $\mathrm{Re}\, t > 0$. Finalmente, al ser $\lim_{t\to 0^+} x(a^t \otimes b^t) = x$, $x \in A \otimes B$, se obtiene $A \otimes B \subset I$, de donde $I = A \hat{\otimes} B$.

Por el momento, no se conocen condiciones generales sobre álgebras de Banach que aseguren la existencia de semigrupos como los del teorema. Si A posee una unidad aproximada acotada secuencial entonces existe un semigrupo analítico $(a^t)_{\mathrm{Re}\, t > 0}$ tal que $\lim_{t\to 0^+} a^t a = a$ para todo $a \in A$, acotado sobre R_+, pero nada podemos afirmar sobre los otros puntos del semiplano. Si A es además separable entonces existe un semigrupo $(a^t)_{\mathrm{Re}\, t > 0}$ como el anterior y tal que $\|a^t\| \leq \frac{\Gamma(\mathrm{Re}\, t)}{|\Gamma(t)|}$ si $\mathrm{Re}\, t > 0$, siendo Γ la función gamma ([7], II-17). Pero esta cota tampoco es suficiente.

Ejemplos

Sea φ una función medible no negativa sobre R y sea $L^1_\varphi = \{f : \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, e^{\varphi(x)}\, dx < +\infty\}$ (identificando las funciones iguales casi en todas partes). L^1_φ es un espacio de Banach y si $\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$ $(x,y \in R)$ L^1_φ es un álgebra de Banach conmutativa con respecto a la convolución $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy$ $(f,g \in L^1_\varphi)$. Estas álgebras se conocen como álgebras de Beurling y fueron introducidas por éste en 1938. Verifican (AS_2) de la introducción si y sólo si φ es tal que

$$(*) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{1+x^2}\,dx < +\infty \quad .$$

En este caso el espacio de caracteres de L^1_φ es isomorfo a R y la transformada de Gelfand de los elementos de L^1_φ toma la forma

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-itx}dx \qquad (t \in R)$$

Si $\varphi = 0$, $L^1_\varphi = L^1(R)$.

Para estos y otros datos acerca de las álgebras de Beurling la introducción de [2] es una excelente noticia.

Si B es un álgebra de Banach el producto $L^1_\varphi \hat{\otimes} B$ coincide con $L^1_\varphi(R;B)$ ([11], p. 473) , espacio definido análogamente a L^1_φ pero para funciones de R en B integrables Bochner respecto a la medida de Lebesgue en R . Con φ subaditiva, $L^1_\varphi(R;B)$ es un álgebra de Banach con convolución definida como arriba. Cuando φ satisface la propiedad (*) y B es no radical podemos plantear (AS_2) en $L^1_\varphi(R;B)$.

En L^1_φ disponemos de un semigrupo analítico $(a^t)_{\mathrm{Re}\ t > 0}$ dado por

$$a^t(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{s^2}{t}\right) \qquad (s \in R\ ,\ \mathrm{Re}\ t > 0)$$

de modo que $t \longmapsto \log \|a^t\|$ está en $\mathcal{F}^\ell$, de acuerdo con [2] , lema 4 y lema 2 , y podemos enunciar el teorema tauberiano (AS_2) para $L^1_\varphi(R;B)$ siempre que en B exista un semigrupo analítico $(b^t)_{\mathrm{Re}\ t > 0}$ verificando las condiciones del teorema anterior. Este es el caso si por ejemplo B posee unidad, el semigrupo $(b^t)_{\mathrm{Re}\ t>0}$ es acotado, o más en general, $(b^t)_{\mathrm{Re}\ t>0}$ satisface una cota del tipo de la de $(a^t)_{\mathrm{Re}\ t>0}$ en [2] . En particular, así sucede si $B = L^1_\psi$ y ψ cumple (*) , y se obtiene que $L^1(R^2, e^\varphi \times e^\psi) = L^1_\varphi \hat{\otimes} L^1_\psi$, ([1], p. 234), verifica (AS_2) , si bien esto ya era conocido al ser las álgebras de Beurling, regulares, semisimples y tauberianas.

Respecto a la relación con condiciones como las últimas citadas, recordamos que la contribución de esta nota consiste en mostrar la validez de (AS_2) suponiendo un tipo de condiciones sobre B que, al menos a priori, no tengan que ver con aquellas. Esto es claramente así cuando B posee unidad, en cuyo caso ésta es la sola condición requerida.

Asimismo y del otro lado, debemos señalar que no se conocen ejemplos concretos de álgebras de Banach no regulares (y no radicales) sin unidad y con semigrupos con propiedades como las del teorema. De hecho, motivados por esto último, el prof. Esterle y el autor han probado en [14] que si $(b^t)_{\mathrm{Re}\ t>0}$ es un semigrupo analítico en B tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log^+ ||b^{1+it}||}{1+t^2}\, dt < +\infty$$

y B es generado por $b = b^1$, entonces B es regular.

Sí que se puede encontrar álgebras no unitarias que satisfagan las condiciones del teorema y no sean semisimples mediante la formación de cocientes significativos de álgebras de funciones integrables, por ejemplo.

Nota 1

La condición sobre el semigrupo, citada en último lugar, tomada como hipótesis permite establecer un resultado del tipo obtenido en el teorema:

Si A, B son dos álgebras de Banach conmutativas con sendos semigrupos analíticos $(a^t)_{\mathrm{Re}\ t>0}$, $(b^t)_{\mathrm{Re}\ t>0}$ en A y B, tales que

$$(**) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log^+ ||a^{1+it}||}{1+t^2}\, dt < +\infty \quad ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log^+ ||1+b^{it}||}{1+t^2}\, dt < +\infty$$

y $\lim_{t \to o^+} a^t a = a \quad (a \in A)$, $\lim_{t \to o^+} b^t b = b \quad (b \in B)$, entonces $A \hat{\otimes} B$ satisface (AS_2) .

Básicamente, este enunciado es consecuencia del teorema 5.6 de [15] . Esencialmente, la demostración se basa en que un semigrupo analítico sobre $\{\mathrm{Re}\ t > 0\}$ en un álgebra de Banach radical, que cumpla la condición reflejada en $(**)$, necesariamente es el semigrupo nulo.

Nota 2

Si en (AS_2) sustituimos "ideal maximal regular" por "ideal primitivo" podemos prescindir en todo el trabajo de la hipótesis de conmutatividad (ver [15] , p. 78).

Referencias

[1] F.F. BONSALL y J. DUNCAN, Complete normed algebras, Springer-Verlag, Berlín 1973.

[2] H.G. DALES Y W.K. HAYMAN, Esterle's proof of the Tauberian theorem for Beurling algebras, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 31, 4(1981), 141-150.

[3] J. ESTERLE, A complex-variable proof of the Wiener Tauberian theorem, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 30(1980), 91-96.

[4] J.E. GALE, Gelfand theory in algebras of differentiable functions on Banach spaces, por aparecer.

[5] A. HAUSNER, The Tauberian theorem for group algebras of vector-valued functions, Pacific J. Math. 7(1958), 1603-1610.

[6] G.P. JOHNSON, Spaces of functions with values in a Banach algebra, Trans. Amer. Math. Soc., 92 (1959), 411-429.

[7] K. KOUA, Multiplicateurs et quasimultiplicateurs dans les algèbres de Banach commutatives non unitaires à unité aprochée bornée, Thése 3eme cycle, Bordeaux.

[8] L.H. LOOMIS, An introduction to abstract harmonic analysis, Van Nostrand, Princeton, 1953.

[9] A. MALLIOS, Tensor products and harmonic analysis, Math. Annalen, 158 (1965), 46-56.

[10] J. TOMIYAMA, Tensor products of commutative Banach algebras, Tohoku Math. J. 12 (1960), 147-154.

[11] J.F. TREVES, Topological vector spaces, distributions and kernels, Academic Press, New York, 1967.

[12] Y. WEIT, Spectral analysis in spaces of vector valued functions, Pacific J. Math. 91, 1 (1980), 243-248.

[13] R.P. BOAS, Entire functions, Academic Press, New-York, 1954.

[14] J. ESTERLE y J.E. GALÉ, Regularity of Banach algebras generated by analytic semigroups satisfying some growth conditions, por aparecer.

[15] A.M. SINCLAIR, Continuous semigroups in Banach algebras, Lecture Notes 63, Cambridge, U.P. 1982.

Rebut el 5 de novembre del 1982

Departamento de Teoria de Funciones
Facultad de Ciencias
Zaragoza
ESPAÑA