

ESPACIOS L^P CON NORMA MIXTA

Miguel Angel Triana Santos

E.T.S. Ingenieros Industriales. Zaragoza

Abstract.: In this paper we study the $L^{p,q}$ -spaces introduced by Benedek and Panzone in (1). We prove that $L^{p,q}$ is a r -normed, complete space of type r , where $r = \min(1, p, q)$. We interpret the $L^{p,q}$ -spaces like the completion of the tensor product space $L^p \otimes L^q$ with a determinated metric and we obtain the dual space of $L^{p,q}$ ($0 < p, q < \infty$).

1.-Los Espacios L^{p_1, \dots, p_n} de Benedek-Panzone.-

Sean (X_i, S_i, μ_i) con $1 \leq i \leq n$, n espacios de medida positiva σ -finita y completa y $P = (p_1, \dots, p_n)$ una n -tupla, con $1 \leq p_i \leq \infty$. Una función

$$f: \prod_{i=1}^n X_i \longrightarrow C$$

$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow f(x_1, \dots, x_n)$$

medible en el espacio producto $(X, S, \mu) = (\prod_{i=1}^n X_i, \prod_{i=1}^n S_i)$ se dice que pertenece a $L^P(X)$ si el número obtenido después de tomar sucesivamente la norma p_1 en x_1 , la norma p_2 en x_2, \dots , la norma p_n en x_n , y en este orden, es finito. A dicho número se le denota por $\|f\|_P$ ó $\|f\|_{p_1, \dots, p_n}$.

Consideremos ahora el caso $0 < P \leq \infty$ (esto es $0 < p_i \leq \infty$ donde $1 \leq i \leq n$), y sea $r = \min_{1 \leq i \leq n} (p_i)$ con $r < 1$; se define $\|\cdot\|_P$ de la misma forma que para exponentes mayores que 1. También podemos definir de forma análoga el espacio L^P , que en este caso será r -normado, con $(\|\cdot\|_P)^r$.

A partir de aquí nos centraremos en el estudio del caso de dos exponentes p, q , y supondremos que (X, S, μ) , (Y, \mathcal{B}, ν) son dos

espacios de medida positiva σ -finita y completa, y consideraremos $L^{p,q}(X \times Y)$.

Para el siguiente Teorema supondremos que los espacios (X, \mathcal{A}, μ) , (Y, \mathcal{B}, ν) son no triviales, esto es, que existen sucesiones $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ y $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ de conjuntos medibles disjuntos tales que $\mu(A_j) \neq 0$ y $\nu(B_j) \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.- $L^{p,q}$ con $0 < p, q \leq \infty$ y $r = \min(p, q) < 1$, es un espacio r -normado, completo de tipo r .

2.- $L^{p,q}$ como Producto Tensorial.-

Consideremos el espacio $L^p(X) \otimes L^q(Y)$ ($0 < p, q \leq \infty$) producto tensorial de los espacios $L^p(X)$ y $L^q(Y)$. Queremos hacer una identificación entre $L^p(X) \otimes L^q(Y)$ y un subespacio de $L^{p,q}(X \times Y)$; para ello definimos la aplicación $\phi: L^p(X) \otimes L^q(Y) \rightarrow L^{p,q}(X \times Y)$ de la siguiente forma $\phi(\sum_{i=1}^n f_i \otimes g_i) = \sum_{i=1}^n f_i \cdot g_i$ donde $f_i \cdot g_i(x, y) = f_i(x)g_i(y)$.

Se puede comprobar que ϕ es una aplicación lineal. Para demostrar que es inyectiva necesitaremos algunos resultados; Si $\omega \in L^p(X) \otimes L^q(Y)$ se cumple que:

a) $\lambda(\omega) = \|\phi(\omega)\|_{p,q}$ ($1 \leq p, q \leq \infty$) donde λ es la norma tensorial ((3), p.221): $\lambda(\omega) = \sup \{ |(u \otimes v)(\omega)|; u \in (L^p)^\prime, v \in (L^q)^\prime, \|u\|, \|v\| \leq 1 \}$

b) $\|\phi(\omega)\|_{p,q}^r \leq \alpha_r(\omega)$ ($0 < p, q \leq \infty$, $r = \min(1, p, q)$), donde α_r es la r -norma en $L^p \otimes L^q$ ((4), p.199):

$$\alpha_r(\omega) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|f_i \cdot g_i\|_{p,q}^r; \omega = \sum_{i=1}^n f_i \otimes g_i \right\}$$

c) $\alpha_q(\omega) = \|\phi(\omega)\|_{p,q}^q$ ($0 < q \leq 1, q \leq p \leq \infty$).

Teorema 2.- El espacio $L^p(X) \otimes L^q(Y)$ con $0 < p, q < \infty$, es denso en $L^{p,q}(X \times Y)$ mediante la identificación ϕ .

Definimos $L^p(X) \hat{\otimes}_r L^q(Y)$ como la complección del espacio $L^p(X) \otimes L^q(Y)$ con la r -norma α_r .

Corolario 1.- Si $0 < q \leq 1$ y $q \leq p < \infty$, entonces $L^p(X) \hat{\otimes}_q L^q(Y) = L^{p,q}(X \times Y)$, tomando la q -norma tensorial α_q .

Como aplicación de las propiedades anteriores se obtiene una generalización de la desigualdad de Minkowski:

Teorema 3.- Sean $q \leq p < \infty$, $0 < q \leq 1$, f una función medible en $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ entonces:

$$\left(\int \left(\int |f|^p d\nu \right)^{p/q} d\mu \right)^{q/p} \leq \int \left(\int |f|^p d\mu \right)^{q/p} d\nu.$$

3.- Dualidad entre Espacios $L^{p,q}$.

El dual de $L^{p,q}$ cuando los dos exponentes p, q son mayores o iguales que 1 es conocido ((1) p.304). Por lo tanto estudiaremos el caso en que uno o los dos exponentes sea menor que 1. Para ello recordaremos que: "Si f es una función medible y A un átomo entonces f es constante a.e. en A " ((2) p.819). Por notación llamaremos $f(A)$ al valor de dicha constante.

Supongamos que (X, \mathcal{A}, μ) , (Y, \mathcal{B}, ν) son dos espacios de medida, $(A_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{A}$, $(B_j)_{j \in J} \subseteq \mathcal{B}$ colecciones de representantes de las clases de átomos de μ y ν respectivamente, con $\mu(A_i) = 1$, $\nu(B_j) = 1$, $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ y $B = \bigcup_{j \in J} B_j$, entonces:

Teorema 4.- Si $0 < p, q < 1$, el dual topológico de $L^{p,q}(X \times Y)$ es isométricamente isomorfo a $l^\infty(I \times J)$ mediante la identificación dada por

$$U: l^\infty(I \times J) \longrightarrow (L^{p,q}(X \times Y))'$$

$$\alpha = (\alpha_{ij})_{(i,j) \in I \times J} \longrightarrow U_\alpha$$

donde $U_\alpha(f) = \sum_{(i,j) \in I \times J} f(A_i \times B_j) \alpha_{ij}$ para cada $f \in L^{p,q}(X \times Y)$.

En particular, si μ o ν son no atómicas $(L^{p,q}(X \times Y))' = 0$.

Teorema 5.- Si $0 < q < 1 \leq p < \infty$ y $p' = p/(p-1)$, el dual topológico de $L^{p,q}(X \times Y)$ es isométricamente isomorfo a $L^{p',\infty}(X \times J)$ mediante la identificación dada por

$$U: L^{p',\infty}(X \times J) \longrightarrow (L^{p,q}(X \times Y))'$$

$$g = (g_j)_{j \in J} \longrightarrow U_g$$

donde $U_g(f) = \sum_{j \in J} \int f_j g_j d\mu$ para cada $f \in L^{p,q}(X \times Y)$, siendo f_j

la función de $L^p(X)$ inducida por la restricción de f a $X \times B_j$.

En particular si ν no atómica $(L^{p,q})' = 0$.

Se obtiene un resultado análogo para el caso $0 < p < 1 \leq q < \infty$.

NOTA: Estos resultados son un resumen de mi Tesina de Licenciatura (5) dirigida por el Profesor J.L. Rubio de Francia al cual quiero expresar mi agradecimiento por su valiosa ayuda.

REFERENCIAS

- (1) Benedek, A.; Panzone, R.: "The spaces L^p with mixed norm". Duke. Math. J. 28 (1961), 301-324.
- (2) Day, M.M.: "The spaces L^p with $0 < p < 1$ ". Bull. A.M.S. 46 (1940), 816-823.
- (3) Diestel, J.; Uhl, J.R.: "Vector measures". A.M.S. Providence.
- (4) Gramsch, B.: "Integration und Holomorphe Funktionen in lokalbeschränkten Raume". Math. Annalen., 162 (1965), 190-210.
- (5) Triana, M.A.: "Espacios L^p con norma mixta". Memoria de Licenciatura. Dpto. Teoría de Funciones. Universidad de Zaragoza.