

Pub. Mat. UAB
Nº 19 Maig 1980
Actas II Congreso de Ecuaciones Diferenciales y
Aplicaciones-Valldoreix, Mayo 1979.

INESTABILIDAD HIDRODINAMICA Y TEORIA
DE LANDAU DE LAS TRANSICIONES DE FASE
FUERA DE EQUILIBRIO

J.C. ANTORANZ⁽⁺⁾ y M.G. VELARDE^(x)

(+) Departamento de Física Fundamental,
UNED, Ciudad Universitaria, Madrid

(x) Departamento de Física de Fluidos,
UAM, Cantoblanco, Madrid

Una capa de fluido calentada por abajo permanecerá en reposo si el gradiente de temperatura impuesto entre las placas que contienen dicho fluido es menor que un cierto valor crítico, l , usualmente expresado en función del número de Rayleigh, definido por:

$$R = \alpha g d^3 \Delta T / K \nu$$

donde g es la aceleración de la gravedad, α es el coeficiente de expansión térmica volumétrica, d es la distancia entre placas, ΔT es la diferencia de temperatura entre placas, K es la difusividad (o conductividad termométrica) y ν es la viscosidad cinemática.

Cuando se excede del gradiente crítico de temperatura, puede ser observado un movimiento espontáneo aunque ordenado, de forma que se pueden distinguir distintos modelos de estructuras convectivas ó celdas regulares. Estas estructuras dependen por un lado de la forma del contenedor, y por otro de propiedades del fluido.

La inestabilidad puede ser explicada por medio de razonamientos cualitativos. Cuando el sistema es monocomponente, y calentamos por abajo, se producirá primero un gradiente lineal de temperatura, siendo mayor la temperatura en la placa inferior que en la superior; ello da lugar a que la densidad junto a la placa superior sea mayor que en la inferior, lo que es mecánicamente inestable y de ahí la tendencia hacia el movimiento para establecer un estado estable. Esta tendencia al movimiento es frenada por la viscosidad del sistema; así pues, hasta que el gradiente de temperatura no alcanza un valor crítico, las fuerzas viscosas recuperadoras acabarán con cualquier intento de convección. Por otro lado la difusividad térmica es asimismo un mecanismo de igualación de las temperaturas y por tanto estabilizador del régimen de reposo inicial, ayudando a la viscosidad en su "frenado" de la convección.

Cuando el sistema es bicomponente, un sencillo análisis permite notar la importancia de un nuevo parámetro llamado coeficiente de Soret, $S_{2,3}$, que es por un lado el cociente adimensional entre la termodifusión y la difusividad térmica; y por otro, y más importante, la razón entre la expansión volumétrica por variación de la fracción másica de la mezcla y la expansión volumétrica térmica. Este coeficiente de Soret, cuando es positivo indicará, por convenio, que la componente más densa migra hacia la pared más fría; siendo negativo en caso contrario.

Así, cuando $S > 0$, y calentamos por abajo, el sistema tenderá a comportarse como en el caso monocomponente, pero como la componente más densa del sistema tiende a ir a la placa superior, aumentando así aparentemente el gradiente de densidad media entre las placas, el sistema tendrá tendencia a ser mecánicamente inestable para un valor menor del número de Rayleigh crítico que en el caso de un fluido puro.

Cuando, por el contrario, $S < 0$ existirá oposición entre el efecto Soret (componente más densa marcha hacia la pared inferior) y el efecto de la flotación (debido a la expansión térmica); los dos distintos componentes del gradiente de densidad no van en el mismo sentido. Y de ahí la posibilidad que cabe esperar de sobreestabilidad (overshooting)

del estado de "equilibrio" (reposo); véase para mayores detalles /3/.

Las ecuaciones que nos dan la evolución del sistema son las ecuaciones de continuidad y las del balance de la energía, momento y fracción másica, junto con las ecuaciones de estado térmico y mecánico:

$$\frac{\partial}{\partial t} N_1 + V_j \frac{\partial}{\partial x_j} N_1 = D \nabla^2 N_1 + N_1^* N_2^* D' \nabla^2 T \quad (1.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} V_i + V_j \frac{\partial}{\partial x_j} V_i = \frac{F_i}{\rho^*} - \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial}{\partial x_i} p + \nu \nabla^2 V_i \quad (1.b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} T + V_j \frac{\partial}{\partial x_j} T = K \nabla^2 T \quad (1.c)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} V_j = 0 \quad (1.d)$$

$$p = p^* (1 - \alpha \Delta T + \gamma \Delta N_1) \quad (1.e)$$

donde v_j es la j -componente del campo de velocidad, D' es el coeficiente de difusión térmica, D es el coeficiente de difusión, N_1^* y N_2^* son las fracciones másicas de los componentes "1" y "2" (el "1" lo tomaremos como el más denso), T es la temperatura, p^* es la densidad evaluada a una temperatura T^* y una fracción másica N_1^* ; F_i es la fuerza exterior ($F_i = -g$

λ_i , con $\lambda_i = (0,0,1)$, p es la presión, $\frac{\partial}{\partial x_i}$ es el operador gradiente, α y γ son respectivamente los coeficientes de expansión térmica y másica.

Nos limitaremos a estudiar un modelo bidimensional (x,z) , es decir reemplazando la capa horizontal por una sola lámina, lo que es razonablemente una buena primera aproximación porque sabemos por los experimentos que si hay convección ésta suele empezar como anillos paralelos a uno de los ejes (esto no sería válido si hubiese exágonos). Así el estudio de perturbaciones (arbitrarias) sobre el estado de reposo, después de adimensionalizar el conjunto de ecuaciones /3/, e introduciendo ψ como la función de corriente /4/ definida por:

$$V_1 = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad V_3 = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2)$$

se reduce a:

$$p^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = p^{-1} J(\psi, \nabla^2 \psi) - R \left[\frac{\partial T}{\partial x} + S \frac{\partial N_1}{\partial x} \right] + \nabla^4 \psi \quad (3.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} N_1 = J(\psi, N_1) - \frac{\partial \psi}{\partial x} + \tau_D \left[\nabla^2 N_1 - \nabla^2 T \right] \quad (3.b)$$

(3.c)

$$\frac{\partial}{\partial t} T = J(\psi, T) - \frac{\partial \psi}{\partial x} + \nabla^2 T$$

donde P es el número de Prandtl, S es el coeficiente de Soret, r_D es el número de Lewis y $J(f, g)$ denota el Jacobiano definido como:

$$J(f, g) = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} \right] \quad (4)$$

Para simplificar consideraremos que las condiciones de contorno para el sistema son paredes libres, conductoras y permeables; esto es:

$$\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = T = N_1 = 0; \quad z=0; 1 \quad (5)$$

El mínimo esquema, para una descripción relevante del problema en una geometría bidimensional, se reduce a la siguiente aproximación en cinco modos, / 1b, 4/

$$\pi^2 k \psi = A_1 \sin \pi k x \sin \pi z$$

$$\pi^2 k T = A_3 \cos \pi k x \sin \pi z + A_2 \sin 2\pi z$$

(6)

$$\pi^2 k N_1 = A_5 \cos \pi k x \sin \pi z + A_4 \sin 2\pi z$$

donde k es el número de onda para el comienzo de la inestabilidad convectiva.

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno y substituyendo en las ecuaciones obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias/5/.

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= \frac{-P}{\pi(k^2+1)} \left[Rk(A_3 + SA_5) + \pi^3 A_1 (1+k^2)^2 \right] \\ \dot{A}_2 &= \frac{1}{2} A_1 A_3 - 4\pi^2 A_2 \\ \dot{A}_3 &= -\pi k A_1 - \pi^2 (1+k^2) A_3 - A_1 A_2 \\ \dot{A}_4 &= \frac{1}{2} A_1 A_5 + 4r_D \pi^2 (A_2 - A_4) \\ \dot{A}_5 &= \pi^2 (1+k^2) r_D (A_3 - A_5) - A_1 A_4 - \pi k A_1 \end{aligned} \quad (7)$$

Resulta que (6) y (7) extienden el modelo de Lorenz al problema de Bénard de dos componentes (Véase por ejemplo /1b/).

Aparte de la solución trivial, $A_i = 0$, los estados estacionarios convectivos de (7) vienen dados por las soluciones de la siguiente ecuación cuártica

$$A_1^4 + A_1^2 \left[\frac{27\pi^4 (1+r_D^2)}{4} - R \right] \frac{16}{9} \quad (8)$$

$$+ \frac{64}{3} \pi^4 r_D^2 \left[\frac{27}{4} \pi^4 - R(S+1+S/r_D) \right] = 0$$

Asimismo, dichas soluciones, A_1 , pueden ser consideradas como los puntos extremos (máximos y mínimos) de la siguiente función potencial de Landau /1.b, 6/

$$\Phi = A_1^6/6 + \frac{4A_1^4}{9} \left[\frac{27}{4} (1+r_D^2) \pi^4 - R \right] \quad (9)$$

$$+ \frac{32}{3} \pi^4 r_D^2 A_1^2 \left[\frac{27}{4} \pi^4 - R(S+1+S/r_D) \right]$$

Para (8) y (9) se predice la existencia de una línea de transición de primer orden (o de inestabilidad subcrítica) en la región donde es de esperar según el análisis lineal de las ecuaciones (1) un estado de sobreestabilidad /3/. Como esta línea de primer orden está por debajo de la rama de sobreestabilidad /1,4/, la capa de fluido saldría de un estado sin movimiento bien vía una excitación de amplitud finita (modo duro) ó bien vía un modo de oscilación transitorio cuya amplitud crece exponencialmente hasta alcanzar la amplitud finita del estado estacionario convectivo final. Es de esperar que la transición presente fenómenos de histéresis y de metaestabilidad. De hecho estas predicciones ya enunciadas en /2.a/ están en buen acuerdo con algunos datos experimen

tales /2/ y no necesariamente en desacuerdo con las observaciones hechas en /7/. Parece difícil de aceptar, sin embargo, que oscilaciones lineales (sobreestabilidad) puedan ser mantenidas largo tiempo en un experimento de Rayleigh-Bénard ya que deben pertenecer a una rama metaestable.

Por otro lado y de acuerdo con estudios anteriores /2,3/ hay, por supuesto, ramas de transición continua (bifurcación ordinaria ó transición de segundo orden con modo blando) y el empalme de una rama de primer orden con otra de segundo orden es precisamente un punto tricrítico (véase figura 1). La acción de un campo externo suplementario (por ejemplo magnético si las partículas de la componente "1" fuesen magnetizables) permitiría visualizar las superficies de coexistencia de dos fases. El punto tricrítico es aquel en tres diferentes fases coexisten y se hacen "iguales".

Transiciones de primer orden pueden asimismo conseguirse si la capa fluida se pone en rotación (por ejemplo alrededor de un eje vertical, véase /8/) ó bien introduciendo efectos tales como la dependencia del coeficiente de difusión en la fracción másica, /9/.

Fenómenos análogos a los anteriores han sido descritos en metaimanes y mezclas de He^4 y He^3 /10,11/ y en el funcionamiento del láser /12/. En estos últimos casos un potencial del tipo (9) describe bien el problema.

Hemos visto, pues, como las inestabilidades hidrodinámicas pueden ser descritas mediante la teoría de Landau /1/, cuya formulación coincide con la de catástrofes.

Este trabajo se ha beneficiado de la ayuda económica del Instituto de Estudios Nucleares, por lo que estamos muy agradecidos a dicho organismo.

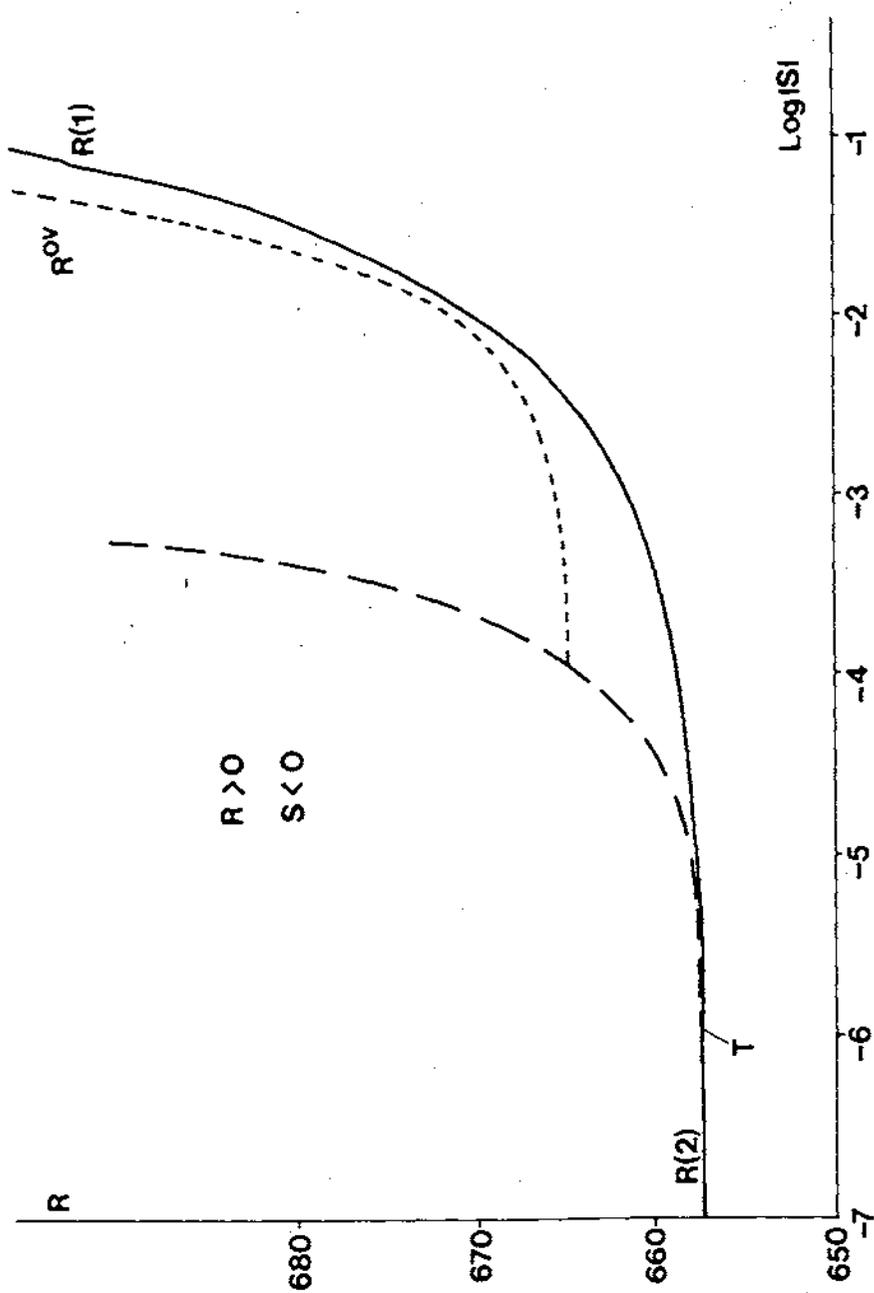


Fig. 1

REFERENCIAS

- /1.a/ M.G. Velarde, Procs. Les Houches 1973 Summer School, Fluid Dynamics, Gordon and Breach, 1976, pp. 469-527
- /1.b/ C. Normand, Y. Pomeau y M.G. Velarde, Rev. Mod. Phys. 49 (1977) 581
- /1.c/ M.G. Velarde y C. Normand, Scientific American (en prensa)
- /2.a/ M.G. Velarde y R.S. Schechter, Phys Fluids, 15 (1972) 1907.
- /2.b/ D.T.J. Hurle y E. Jakeman, J. Fluid Mech. 47 (1971) 667
- /3/ R.S. Schechter, M.G. Velarde y J.K. Platten, Adv. Chem. Phys. 26 (1974) 265
- /4/ G. Veronis, J. Marine Res. 23 (1965) 1
- /5/ M.G. Velarde y J.C. Antoranz, Phys. Lett. A (en prensa). Véase asimismo, M.G. Velarde, Proceedings 1979 Critical Dynamics Conference, editor C. Enz, Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, N.Y. (en prensa)
- /6/ E. Wesfreid, Y. Pomeau, M. Dubois, C. Normand y P. Bergé, J. Physique 39 (1978) 725

- /7/ J.K. Platten y G. Chavepeyer, Phys. Lett. A40 (1972) 287; J. Fluid Mech. 60 (1973) 305
- /8/ J.C. Antoranz y M.G. Velarde, Phys. Fluids (en prensa)
- /9/ M.G. Velarde y A. Córdoba, Phys. Fluids (enviado)
- /10/ M. Papoular, J. Physique 37 (1976) 237
- /11/ J.M. Kincaid y E.G.D. Cohen, Phys. Rep. (Phys. Lett. C) 22 (1975) 57
- /12/ J.F. Scott at al, Optics Comm. 15 (1975) 13; 343