PUBL. Mat. UAB
Nº 18 Abril 1980
Actas II Congreso de Ecuaciones Diferenciales
y Aplicaciones. Valldoreix, Mayo 1979.

ESTIMACION DEL CONJUNTO DE COINCIDENCIA PARA CIERTAS INECUACIONES VARIACIONALES

Gregorio Díaz Díaz

Universidad Politécnica de Madrid

1. Introducción.- Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ de frontera regular Γ.

Consideremos el problema

$$(P)\quad \begin{cases} Lu \leq f \\ u \leq \psi \\ (Lu-f)(u-\psi) = 0 & \text{en} \quad \Omega \\ u = g & \text{en} \quad \Gamma \qquad (^1) \end{cases}$$

donde L es un operador elíptico de segundo orden

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\, u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{N} a_i\, u_{x_i} + a_o u, \quad a_{ij} \in C'(\overline{\Omega}),$$

$$a_i, a_o \in L^\infty(\Omega), \quad \text{con} \quad \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geq \alpha\, |\xi|^2$$

para c.t. $x \in \Omega$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$, α cte positiva; $a_o(x) > o$, para c.t. $x \in \Omega$.

El problema (P) puede equivalentemente ser formulado en términos variacionales: Hallar

$$u \in K = \{v \in H'(\Omega) : u \leq \psi \text{ en c.t. punto de } \Omega\} \text{ tal}$$

---

(1) lo que exige la condición de compatibilidad: $\psi \geq g$ en Γ

que

$$(1)\begin{cases} \int_\Omega Lu.(v-u)dx \geq \int_\Omega f.(v-u)dx, & \forall v \in K \\ u = g & \text{en} \quad \Gamma \end{cases}$$

tal problema ha sido estudiado por Brezis |2| quien muestra que, si además $f \in L^\infty(\Omega)$, $\psi \in W^{2,\infty}(\Omega)$, $g \in W^{1,\infty}(\Gamma)$ y $a(u,u) \geq \overline{\alpha} \; \|u\|_{H^1(\Omega)}$ siendo $\overline{\alpha}$ una constante positiva y $a(u,v) = (\tilde{L}u,v)$ con $\tilde{L}$ operador L en forma divergencia, existe una única solución $u \in H^2(\Omega) \cap W^{2,\infty}(\Omega)$ y por tanto continua. En realidad él lo hace para $g=o$ pero su método es generalizable a nuestra situación.

La solución u divide entonces a Ω en dos regiones

$\Omega_1 = \{x \in \Omega : L\,u = f\}$ - conjunto de continuación

$\Omega_2 = \{x \in \Omega : u = \psi\}$ - conjunto de coincidencia

Nuestro interés reside en dar una estimación del conjunto de coincidencia según la información que se posee en la frontera.

Varios autores han obtenido estimaciones sobre Ω_2, bien directamente: Benssousan-Brezis-Friedman |1| (incluso para dominios no acotados), Yamada, Nagai (estos para condiciones de contorno más generales), bien indirectamente: Brezis |3|, Díaz |4| (en este se puede encontrar una bibliografía amplia).

Todos los trabajos citados se referían al operador $-\Delta+\mu$ donde μ era positivo, sin embargo, existen casos en los que resultan interesantes las estimaciones aquí estudiadas para operadores elípticos más generales. No lejos de nuestro interés estan determinadas cuestiones que aparecen en Programación Di námica. En concreto la presente comunicación es la parte técnica de un trabajo, actualmente en redacción, en él que se dan respuesta a algunas propuestas hechas por el profesor H. Brezis sobre la ecuación de Bellman-Dirichlet (para detalles sobre esta ecuación ver Evans |5|).

2. Propiedades de monotonía.- La técnica que se emplea es comparar con funciones adecuadas. Por tanto, conviene precisar las propiedades de monotonía de (P).

Proposición 1.- "La solución del problema (P) se comporta monótonamente creciente respecto de los datos"

En efecto, basta considerar la I.V. (1) asociada y utilizar los resultados de Brezis |2|.

Para nuestros propósitos compararemos con funciones que sólo verificaran algunas de las desigualdades de (P). A tal efecto.

Proposición 2.- "Sean $\hat{f} \in L^{\infty}(\Omega)$, $\hat{\psi} \in W^{2,\infty}(\Omega)$, $\hat{g} \in W^{1,\infty}(\Gamma)$ y $\hat{u} \in H^2(\Omega)$ verificando:

$$
\begin{aligned}
L\,\hat{u} &\leq \hat{f} && \text{en c.t. punto de } \Omega, \\
\hat{u} &\leq \hat{\psi} && \text{en c.t. punto de } \Omega, \\
\hat{u} &= \hat{g} && \text{en c.t. punto de } \Gamma.
\end{aligned}
$$

Entonces, si $\hat{f} \leq f$, $\hat{\psi} \leq \psi$ en c.t. punto de Ω y $\hat{g} \leq g$ en c.t. punto de Γ se tiene $\hat{u} \leq u$ en c.t. punto de Ω".

<u>Demostración</u>.- Consideremos en la I.V. (1)

$v = u+(u-\hat{u})^- \ (= \sup(u,\hat{u}) \leq \psi)$. con lo que tras una integración por partes se tiene

$$a(u,(u-\hat{u})^-) - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot (u-\hat{u})^- \geq (f, (u-\hat{u})^-)$$

donde $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ es la <u>derivada conormal de</u> u <u>asociada a</u> L es decir, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(n, x_i)$

siendo n la <u>normal exterior a</u> Ω.

Multiplicando ahora (3) por $-(u-\hat{u})^-$, tomando integrales en Ω e integrando por partes, se tiene

$$a(-u,(u-\hat{u})^-) + \int_\Gamma \frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu} \cdot (u-\hat{u})^- \geq (-f,(u-\hat{u})^-),$$

como $(u-\hat{u})^-\big|_\Gamma = (g-\hat{g})^- = \sup(\hat{g}-g,o) = 0$, sumando se tiene

$$a(u-\hat{u},(u-\hat{u})^-) \geq 0 \quad \text{y por tanto} \quad a((u-\hat{u})^-, (u-\hat{u})^-) \leq 0$$

finalmente las hipótesis sobre a determinan $o = (u-\hat{u})^- \Longrightarrow$ $\hat{u} \leq u$ en c.t. punto de Ω.

Para nuestros propósitos hagamos $\tilde{u} = u-\psi$ que verifica

$$(P)' \begin{cases} L\,\tilde{u} \leq \tilde{f} \ (=f-L\,\psi) \\ \tilde{u} \leq 0 \\ (L\tilde{u}-\tilde{f})\tilde{u} = o \quad \text{en c.t. punto de } \Omega \\ \tilde{u} = g-\psi \quad \text{en c.t. punto de } \Gamma \end{cases}$$

y consideremos en todo lo que sigue los supuestos:

(4) $f-L\psi \geq \gamma$, en c.t. punto de Ω, siendo γ una constante positiva,

$$(5) \qquad \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\,\xi_i\xi_j + \sum_{i=1}^{N} a_i\,\xi_i\xi_o + a_o\,\xi_o^2 \geq 0, \quad \xi_i,\xi_o \in \mathbb{R}.$$

La hipótesis (4) juega un papel importante que se comentará al final, mientras que la (5) es una hipótesis operativa que incluso puede ser englobada en la hipótesis de coercividad que se hizo sobre la forma bilineal a.

Para obtener las estimaciones usaremos la función auxiliar

$$v(x) = -\frac{\gamma}{6K}\,|x-x^o|^2, \quad \text{donde} \quad x^o \in \Omega, \quad K = \left\| \sum_{i=1}^{N} a_{ii} \right\|_\infty .$$

Las hipótesis sobre L permiten la desigualdad

$$-\sum_{i=1}^{N} a_i\,\xi_i\xi_o - a_o\,\xi_o^2 \leq \sum_{i=1}^{N} a_{ij}\,\xi_i\xi_j \leq \sum_{i=1}^{N} a_{ii}\,|\xi|^2 \qquad (2)$$

donde $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_N)$. Tomando $\xi_o = |x-x^o|$, $\xi_i = \dfrac{2(x_i-x_i^o)}{\xi^o}$

La desigualdad anterior muestra que

$$-2\sum_{i=1}^{N} a_i(x_i-x_i^o) - a_o\,|x-x^o|^2 \leq 4\sum_{i=1}^{N} a_{ii}$$

Por tanto

$$Lv = \frac{2\gamma}{6K}\sum_{i=1}^{N} a_{ii} - \frac{2\gamma}{6K}\sum_{i=1}^{N} a_i(x_i-x_i^o) - a_o\,\frac{\gamma}{6K}\,|x-x^o|^2 \leq \gamma$$

Esto es, la función v satisface

(i) $v \leq 0$ en Ω,

(ii) $Lv \leq \tilde{f}$, en c.t. punto de Ω,

además esta función se anula en $x^o \in \Omega$ escogido a voluntad.

---

(2) La última desigualdad está basada en las propiedades algebraicas que acompañan a la condición de elipticidad sobre L (ver Brezis |3|)

3. Estimaciones.-

Teorema 1.- "Supongamos que se verifica (4),(5)

Si $x^o \in \Omega$, satisface $d(x^o,\Gamma) \geq \left|\frac{6K}{\gamma} \cdot \sup_{\Gamma} (\psi-g)\right|^{1/2}$, entonces $u(x^o) = \psi(x^o)$"

Demostración.- Para un tal x^o

$$v(x) = -\frac{\gamma}{6K} |x-x^o|^2 \leq -\frac{\gamma}{6K} \cdot \frac{6K}{\gamma} \sup_{\Gamma} (\psi-g) = \inf_{\Gamma} (g-\psi) \leq$$

$$\leq \tilde{u}(x) \quad \text{en} \quad \Gamma.$$

Luego las propiedades de comparación concluyen

$$0 = v(x^o) \leq u(x^o) - \psi(x^o) \leq 0.$$

Corolario 1.- "Supongamos que la solución u es ≥ 0, y que $\inf_{\Omega} \psi > 0$. Si además se tiene (5) y

(4)' $f-a_o \cdot \lambda \geq \gamma$, para alguna constante positiva γ, con $0 < \lambda < \inf_{\Omega} \psi$, entonces $u(x) \geq \lambda$, si $x \in \Omega$ y $d(x,\Gamma) \geq \left|\frac{6K}{\gamma} \cdot \lambda\right|^{1/2}$.

En efecto, dado $x^o \in \Omega$, con $d(x^o,\Gamma) \geq \left|\frac{6K}{\gamma} \lambda\right|^{1/2} = R$, basta considerar $\underline{u}$ solución del problema (P) en $B = B(x^o,R)$ con obstáculo λ y dato de Dirichlet o en Γ. Entonces $\underline{u} \leq u$ en B y por el teorema anterior aplicado a $\underline{u}$ en B se tiene $\underline{u}(x^o) = \lambda$, es decir $u(x^o) \geq \lambda$.

Para obtener estimaciones cerca de la frontera emplearemos ahora la función auxiliar

$$v_s(x) = \begin{cases} \frac{-\gamma}{6K} \left(|x-x^\circ|-s\right)^2, & \text{si} \quad |x-x^\circ| > s \\ 0 \quad , & \text{si} \quad |x-x^\circ| \leq s \end{cases}$$

Observese que $w(x) = (|x-x^\circ|-s)^2 = |x-x^\circ|^2 + s^2 - 2s\,|x-x^\circ|$

es tal que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} w(x) = 2(x_i - x_i^\circ) - 2s\,\frac{x_i - x_i^\circ}{|x-x^\circ|}\ , \qquad i=1,\dots,N$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} w(x) = \begin{cases} 2-2s\,\dfrac{|x-x^\circ|^2 - (x_i-x_i^\circ)^2}{|x-x^\circ|^3}\ , & i=j \\ & i,j=1,\dots,N \\ 2s\,\dfrac{(x_i-x_i^\circ)(x_j-x_j^\circ)}{|x-x^\circ|^3} & i \neq j \end{cases}$$

Volviendo sobre la desigualdad

$$-\sum_{i=1}^{N} a_i\, \xi_i \xi_o - a_o\, \xi_o^2 \leq \sum_{i=1}^{N} a_{ii}\, |\xi|^2,$$

y considerando ahora $\xi_o = (|x-x^\circ| - s)$,

$\xi_i = \frac{2}{\xi_o} \left((x_i - x_i^\circ) - \frac{x_i - x_i^\circ}{|x-x^\circ|}\, s \right)$ se tiene

$$-2 \sum_{i=1}^{N} a_i \left((x_i - x_i^\circ) - \frac{x_i - x_i^\circ}{|x-x^\circ|}\, s \right) - a_o (|x-x^\circ| - s)^2 \leq 4 \sum_{i=1}^{N} a_{ii}.$$

Por otro lado,

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} = 2 \sum_{i=1}^{N} a_{ii} - 2s \sum_{i=1}^{N} a_{ii} \frac{1}{|x-x^\circ|} +$$

$$+\ 2s \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{(x_i - x_i^\circ)(x_j - x_j^\circ)}{|x-x^\circ|^3}$$

$$\leq 2 \sum_{i=1}^{N} a_{ii} - 2s \sum_{i=1}^{N} a_{ii} \frac{1}{|x-x^\circ|} + 2s \sum_{i=1}^{N} a_{ii} \frac{1}{|x-x^\circ|} =$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{N} a_{ii}\,.$$

Es decir, la función v_s satisface:

(i) $v_s \leq 0$ en Ω

(ii) $L v_s \leq \tilde{f}$ en c.t. punto de Ω.

Teorema 2.- "Supongamos que se verifica (4), (5) así como que $\exists x^o \in \Gamma$ y $r > \left|\frac{6K}{\gamma} \cdot \sup_{\Gamma} (\psi - g)\right|^{1/2}$, tales que $g(x) = \psi(x)$ en $\Gamma \cap B(x^o, r)$.

Entonces, $u(x) = \psi(x)$ en $\Omega \cap B(x^o, s)$,

$$s = r - \left|\frac{6K}{\gamma} \cdot \sup_{\Gamma} (\psi - g)\right|^{1/2}."$$

Demostración.- Bastará con ver que $v_s(x) \leq \tilde{u}(x)$ en Γ.

Si $|x - x^o| \geq r$, entonces $v_s(x) \leq \frac{-\gamma}{6K}(r-s)^2 = \frac{-\gamma}{6K} \cdot \frac{6K}{\gamma} \sup_{\Gamma} (\psi - g) \leq \tilde{u}(x)$,

y si $|x - x^o| < r$, es evidente, pues $w_s(x) \leq 0 = \tilde{u}(x)$.

4. Observación final.- Los resultados anteriores se obtienen bajo la hipótesis "$f - L\psi \geq \gamma$ en c.t. punto de Ω, siendo γ una constante positiva". Tal condición es bastante poderosa como lo muestra el hecho siguiente

Corolario 2.- "Supongamos que se tiene (4), (5); si $g = \psi = 0$ en Γ, entonces existen en Ω puntos de coincidencia de la solución con el obstáculo a cualquier distancia de la frontera".

Corolario 3.- "Supongamos que se tiene (4) en algún $\Omega' \subset \Omega$, (5).

Entonces, si $x^o \in \Omega'$ y $d(x^o, \partial\Omega') \geq \left|\frac{6K}{\gamma} \cdot \sup_{\partial\Omega'} (\psi - g)\right|^{1/2}$,

$u(x^o) = \psi(x^o)$"

5. Bibliografía.-

|1| A. BENSOUSSAN, H. BREZIS and A. FRIEDMAN, Estimates on the free boundary for quasi variational inequalities, Comm. Partial Differential Equations, 2 (1977), 297-321.

|2| H. BREZIS, Problemes unilateraux, J. Math. Pures Appl. 51 (1972), 1-168.

|3| H. BREZIS, Solutions with compact support of variational inequalities, Russian Math. Surverys, 29 (1974), 103-108.

|4| I. DIAZ, Soluciones con soporte compacto para ciertos problemas semilineales. Aparecerá en Collectanea Matemática.

|5| L.C. EVANS, Application of Nonlinear Semigroup Theory to Certain Partial Differential Equations. Nonlinear Evolution Equations, M.G. CRANDALL ed. Academic Press New York (1978) 163-188.