Pub. Mat. UAB

nº 11, març 1979

LA VARIEDAD DE LOS MODULOS Y LA TEORIA CLASICA DE INVARIANTES PROYECTIVOS

por

FEDERICO GAETA *

El propósito de esta conferencia -dirigida a un público matemático amplio y no especializado en Geometría algebraica- es dar cuenta de la "resurrección" actual - pese a todos los augurios[1] de una teoría matemática del siglo XIX de la que todos han oido hablar, aunque no sea más que por los vestigios que se usan en la teoría elemental de las cónicas y cuádricas....... Hay más de un motivo, por supuesto, pero hemos elegido uno muy concreto que está de moda:[2] el de la construcción de la llamada variedad de los módulos M_p para curvas algebraicas de género p prefijado. Este problema y sus generalizaciones naturales ocupa un lugar preferente en la investigación actual en la Geometría algebraica - aunque su origen se remonta a los pioneros y en especial al propio RIEMANN.[3] Empezaremos por definir M_p (cf.§ 1) y lue-

* Universidad de Barcelona, Universidad del Estado de Nueva York en Buffalo, U.S.A.

(1) Dice DIEUDONNÉ (cf. loc.cit."Comentarios bibliográficos" finales que a la teoría de invariantes se la ha extendido el certificado de defunción muchas veces, pero como el Ave Fénix siempre ha resucitado de sus cenizas....

(2) Cf. ¡ cuantos matemáticos actuales de primera linea se ocupan de ese problema! MUMFORD, BOMBIERI, ...DELIGNE, (Medallas Field de los dos últimos Congresos Internacionales de Matemáticas)

(3) Cfr. sus obras completas en alemán o francés.

go, en el caso general para $p \geqslant 3$ esbozar un intento para construirla algebraicamente en el que la clásica teoría de los invariantes relativos del grupo lineal GL(V) jugaría un papel crucial.... si se pudieran calcular...[4] Como no se puede - hoy por hoy las investigaciones recientes se concentran en el estudio de las propiedades de la M_p que representa biyectivamente las clases de equivalencia birracional de curvas algebraicas de género p prefijado: p =0,1,....¡Todo menos la construcción explícita que parece hoy dia inabordable![5]

1. LOS DOS CASOS EXCEPCIONALES: p =0,1. RIEMANN afirmó que el conjunto de las clases de equivalencia birracional ($\Leftrightarrow$ conforme[6]) de las curvas de género p ($\geqslant 0$)

(4) Hay grandes esperanzas que los potentísimos ordenadores actuales puedan impulsar la resurrección actual..., pero los expertos de invariantes no suelen conocer los computadores y recíprocamente..... Jean GIRAUD tuvo la amabilidad de decirme que D.LAZARD en Paris se propone establecer este puente calculando sizigias con computadoras.

(5) Es desolador y excitante que los únicos casos bien conocidos sean los triviales .

(6) En sus orígenes la Geometría algebraica apareció como una rama de la teoría de las funciones analíticas. RIEMANN introdujo sus "superficies" al estudiar la periodicidad de las integrales abelianas holomorfas.... En el campo complejo equivalencia conforme es lo mismo que equivalencia birracional. La Geometría algebraica sobre un cuerpo base conmutativo arbitrario es muy posterior, ya bien entrado el siglo XX.

formaba un"continuo" ...... de dimensión compleja $d_p = 3p-3$ (si $p > 1$). Naturalmente hoy se quiere que la $\overline{M}_p$(clausura de M_p con sus puntos de acumulación) sea una variedad algebraica de dimensión compleja d_p.

Grosso modo los "<u>módulos</u>" son las $3p-3$ coordenadas locales definibles en un entorno abierto de un punto no singular de $\overline{M}_p$.... pero antes de seguir adelante con el caso general será bueno ver los dos ejemplos naturales $p = 0, 1$ que al mismo tiempo son excepcionales y triviales....[7]

$p = 0$. La M_0 se reduce a un punto porque -es bien sabido que una curva C es de género cero sii es birracionalmente equivalente a una recta - es decir sii C es <u>racional</u>. Por consiguiente <u>dos curvas de género cero son siempre birracionalmente equivalentes</u>.

$p = 1$. Una curva <u>elíptica</u>[7] Γ ($\Leftrightarrow$ de género uno) tiene siempre un modelo plano que es una cúbica plana irreducible y lisa Γ_3. Si Γ'_3 es proyectivamente equivalen-

(7) Las curvas de género uno se llaman elípticas porque pueden caracterizarse por ser representables paramétricamente mediante funciones elípticas: ($\Leftrightarrow$ meromorfas doblemente periódicas). Por ejemplo $x = \wp u$, $y = \wp' u$ es la representación paramétrica de la cúbica: $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g$ donde $\wp$ es la función de WEIERSTRASS y $\wp'$ su deriv da........ El nombre es desafortunadísimo: <u>la elipse no es elíptica</u>! es un caso afín particular de cónica irreducible y por tanto racional! $p = 0$! pero no se puede cambiar el nombre a estas alturas.....(todo porque la rectificación de un arco de elipse necesita las "funciones elípticas".....)!

te a Γ_3 también lo es Γ_3' !. El recíproco es cierto: si Γ_3 y Γ_3' son cúbicas planas lisas birracionalmente equivalentes también son proyectivamente equivalentes. De aquí resulta que la clasificación birracional de las curvas elípticas es equivalente a la clasificación proyectiva de las cúbicas planas.....[8] (lo que ya hace asomarse a los invariantes......).

Ante todo ¿no será que dos cúbicas planas lisas son siempre proyectivamente equivalentes? (entonces el único invariante sería cero)...... La respuesta es NO. Aparece enseguida un invariante clásico, el invariante de SALMON que resuelve el problema completamente.

Fijemos-por el momento- un punto O cualquiera de la Γ_3 plana lisa. Existen exactamente cuatro rectas distintas t_1, t_2, t_3, t_4 que pasan por O y son tangentes a Γ_3 . Si hacemos variar O en Γ_3 esta cuaterna se mantiene proyectiva a sí misma.

Si ordenamos (t_1, t_2, t_3, t_4) su razón doble $r = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ se conserva, - esta ordenación puede conservarse en un cierto entorno de O. Globalmente no es posible:

(8) Toda cónica irreducible compleja puede escribirse como $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$. Cf. SCHREIER-SPERNER *l.cit.* En el $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ hay ya dos tipos proyectivamente distintos de cuádricas: $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ (lisas) y $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ con un solo punto doble (conos). Ambos son -sin embargo-racionales, es decir birracionalmente equivalentes a un plano.

al circular O dentro del toro - superficie de RIEMANN de Γ_3 se permutan de todas las maneras posibles los seis valores - generalmente distintos(9) de r pero hay un conocido invariante racional J (función simétrica de los seis valores de la razón doble) que se llama el <u>invariante de SALMON</u>.

<u>La condición necesaria y suficiente para que dos cúbicas planas lisas</u> Γ_3 , Γ'_3 <u>sean proyectivamente equivalentes</u> ($\Leftrightarrow$ <u>birracionalmente equivalentes</u>) <u>es que tengan el mismo invariante de</u> SALMON: $J(\Gamma_3) = J(\Gamma'_3)$.

¡La necesidad es obvia! La suficiencia se prueba observando que si uno cualquiera de los seis valores de la razón doble es r puede elegirse un sistema proyectivo de referencia tal que la ecuación de Γ_3 sea

(1) $$y = x(x-1)(x-r) \quad .$$ (10)

J es el <u>módulo</u> por antonomasia y el nombre está rela-

(9) Recuerde el lector que hay sólo dos casos, el <u>armónico</u> y el <u>equianarmónico</u> en el que la razón doble toma menos de seis valores (-1, $1/2$, 2) en el armónico) o bien las dos raices cúbicas imaginarias de -1 en el equianarmónico.

(10) Por tanto, a diferencia del caso conocidísimo de las cónicas (cf. nota (8)) aparece un número complejo arbitrario r definido a menos del grupo de la razón doble $r \mapsto r$, $1/r, 1-r, \ldots$ en la ecuación normalizada (1) de la cúbica plana. Naturalmente hay seis formas normales (salvo si la cúbica es <u>armónica</u> o <u>equianarmónica</u>, donde hay sólo tres o dos respectivamente, Cf. nota (4).

cionado con la <u>función modular</u> (11)

$$J = J(\tau) \tag{2}$$

donde τ pertenece al semiplano superior de POINCARÉ S_1

$$S_1 = \{u \mid \operatorname{Im} u > 0\} .$$

La ecuación (2) establece una relación entre el módulo algebraico J (unívocamente determinado por la clase birracional de Γ) y el <u>módulo transcendente</u> τ. Exponemos a pié de página (12) una indicación brevísima de la teoría

---

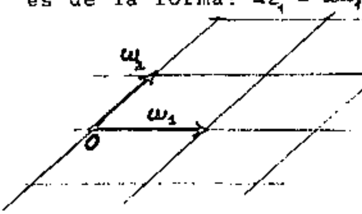
(11) La <u>función modular</u> es automorfa, respecto al grupo modular. Precisamente la J satisface la propiedad: $J(\tau) = J(\frac{a\tau+b}{c\tau+d})$ donde a,b,c,d son enteros y ad-bc=1. Las aplicaciones $\tau \mapsto \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ transforman S_1 en sí mismo y forman el llamado <u>grupo modular</u> de género uno $\mathcal{M}_1$.

(12) Otro camino natural de buscar la variedad de los módulos sería caracterizar el retículo de períodos R del que proviene la superficie de RIEMANN (toro) de Γ como cociente $\mathbb{C}/R$. Para ello es natural considerar una base (ω_1, ω_2) positivamente orientada de R. Si $\rho: \mathbb{C} \to \mathbb{C}/R$ es la proyección canónica las funciones meromorfas $F: \mathbb{C} \to (\mathbb{C}, \infty)$ invariantes por las translaciones de R

$$F(u) = F(u+\omega) \qquad \omega \in R$$

coinciden con las de la forma $F = f \circ \rho$ donde $f: \mathbb{C}/R \to (\mathbb{C}, \infty)$ es una función racional en el toro ($\Leftrightarrow$ en Γ_3 si el lector prefiere.......).

Ahora bien otra base (Ω_1, Ω_2) positivamente orientada es de la forma: $\Omega_1 = a\omega_1 + b\omega_2$, $\Omega_2 = c\omega_1 + d\omega_2$ $(a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad-bc=1)$.



Si se elige la coordenada compleja u de suerte que sea $\omega_1 = 1$ resultan las bases $1, \tau$ con $\tau \in S_1$ definido a menos del grupo modular....... .

transcendente à la que no pude referirme ni de cerca en la exposición oral.[13]

Podemos resumir la construcción con el siguiente enunciado:

$\mathcal{M}_1$: Las clases de equivalencia birracional de las curvas algebraicas de género uno corresponden biyectivamente a los puntos de la recta proyectiva compleja.[14]

2. LA VARIEDAD DE LOS MODULOS $\mathcal{M}_p$ PARA $p > 1$. RIEMANN descubrió que $d_p = 3p - 3$ ($p > 1$) mediante un cómputo de constantes que aparecen en la construcción de la "superficie de RIEMANN" de n hojas (n convenientemente alto) en la que aparecen los $2p - 2 + 2n$ puntos de ramificación

(13) Cf. mi próxima conferencia: Teoría transcendente de la variedad de los módulos para curvas algebraicas.

(14) O también al cociente $S_1/\mathcal{M}_1$ (cf. (11)). La acción $\mathcal{M}_1 \times S_1 \to S_1$ es propiamente discontinua - es decir puede describirse mediante una pavimentación (pavé), tessellation,....) o embaldosado - como pasa con las translaciones del retículo R respecto al toro cociente $\mathbb{C}/_R$; se consigue entonces un embaldosado - en el sentido mas pedestre y municipal- del plano de la variable compleja en el que las baldosas son paralelogramos (o rectángulos, o cuadrados,... poco importa aquí).

En la acción $\mathcal{M}_1 \times S_1 \to S_1$, las baldosas son triángulos formados con arcos de círculo o rectas perpendiculares al eje real...... La recta proyectiva compleja es homeomorfa a la baldosa típica (identificando los pares de puntos del contorno equivalentes respecto al grupo modular).

en los que se pegan dos hojas distintas -copias del plano $\mathbb{C}$ según la construcción clásica....... Para $p = 0, 1$ hay que "descontar" la dimensión β_p del grupo de LIE G_p, de los automorfismos birracionales de una curva de género p. Veamos: Para $p = 0$ las transformaciones birracionales de una recta en sí misma son las proyectividades que forman un grupo de dimensión compleja $\beta_0 = 3$. Para $p = 1$ las transformaciones birracionales de una curva elíptica forman un grupo que si la curva tiene módulos generales [15] tiene dos componentes conexas. La que contiene la identidad está representada por las translaciones del toro. Para $p > 1$ RIEMANN intuyó que no había que descontar nada.... ¡estaba en lo cierto porque según el teorema de SCHWARZ-KLEIN - demostrado después- el grupo G_p es siempre finito (y se reduce a la identidad para "curvas de módulos generales"...) [16]!

(15) En nuestro argot algébrico-geométrico es tradicional decir que una propiedad P de las curvas de género p se verifica"para módulos generales" sii P es falsa en una subvariedad propia de $\mathcal{M}_p$. Por ejemplo en el texto queremos decir que aparte de las translaciones del toro existen siempre las "simetrías".... Pero para curvas elípticas de módulo particular pueden existir otras......
(16) Cf. Observación precedente.

La fórmula correcta para la dimensión de M_p es pues

(3) $$d_p = 3p-3 + \beta_p$$

donde $\beta_0 = 3$, $\beta_1 = 1$ y $\beta_p = 0$ para $p > 1$.

Queda por estudiar, casi todo..... Dejemos a un lado que se han comprobado casi todas las intuiciones de RIEMANN: $\overline{M}_p$ es una variedad algebraica proyectiva irreducible (generalmente no lisa) de dimensión $3p-3$, etc. con un largo etcétera..... que incluye muchas cosas pero no ciertamente la construcción explícita de la M_p, que sigue pareciendo INABORDABLE.

EL CASO GENERAL: COMO INTENTAR CONSTRUIR M_p. PAPEL DE LOS INVARIANTES PROYECTIVOS

3. FAMILIAS DE CURVAS CANONICAS. En el caso $p > 1$ existe una aplicación natural

(4) $$\gamma_\omega \quad \Gamma^{(p)} \longrightarrow \mathbb{P}_{p-1}(\mathbb{C})$$

definida a partir de una base cualquiera $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p)$ del espacio vectorial complejo de dimensión p de todas las diferenciales holomorfas[17] sobre la curva de género

(17) Llamadas también tradicionalmente diferenciales abelianas de primera especie. El estudio de estas diferenciales y la polidromía de sus integrales fué la motivación original de la Geometria algebraíca. En los cursos elementales de cálculo integral aparece - después de aprender que todas las funciones racionales son integrables elementalmente que $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ se racionaliza, cuando $R(x,y)$ es racional. Se trata de una integral abeliana sobre la cónica $y^2 = ax^2+bx+c$ El caso general sería $\int R(x,y)\,dx$ "sobre" $f(x,y)=0$, y función implícita...

p (o si el lector lo prefiere sobre el disco con p agujeros provisto de una estructura conforme fija). Precisamente:

La imagen está siempre bien definida y es casi siempre inyectiva. Precisamente γ_ω no es inyectiva sii $\Gamma^{(p)}$ es una curva hiperelíptica[(18)]. La imagen $\gamma_\omega(\Gamma^{(p)})$ se llama el modelo canónico de Γ construido con ω. Dos bases ω, ω' definen la misma imagen sii $\omega' = \lambda\omega$ ($\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$)

Supongamos de momento que $\Gamma^{(p)}$ no es hiperelíptica. Entonces $\gamma_\omega(\Gamma^{(p)})$ es una curva irreducible y lisa de orden $2p-2$ del espacio proyectivo $\mathbb{P}_{p-1}$ que no está contenida en nin-

---

donde $f(x,y)$ es una curva plana irreducible, generalmente no racional. Si en vez del radical anterior tenemos $\sqrt{P_m(x)}$ donde $P_m(x)$ es un polinomio de orden $m > 2$ entonces la integral puede explicitarse con funciones elípticas si $m = 3, 4$. Para $m > 4$ tampoco bastan -en general- las funciones elípticas .... Son las "integrales hiperelípticas".........

(18) $\Gamma^{(p)}$ se llama hiperelíptica sii tiene un modelo plano del tipo $y^2 = P_m(x)$ (cf. nota (16)) o lo que es equivalente pero más intrínseco) sii $\Gamma^{(p)}$ posee una función racional R bivalente. (R toma cada valor estrictamente dos veces (contando multiplicidades). Si Γ es hiperelíptica $\gamma_\omega(\Gamma^{(\omega)})$ es una "curva racional normal de orden $p-1$ en $\mathbb{P}_{p-1}$ que debe contarse "dos veces"): $\gamma_\omega(P) = \gamma_\omega(P')$ sii P y P' son los únicos ceros de una función racional bivalente.

Las curvas de género 0,1,2 son siempre hiperelípticas. Para $p \geq 3$ la propiedad es opcional. Las clases hiperelípticas forman una subvariedad de dimensión $2p+1$ de $\mathcal{M}_p$ (son "de módulos particulares........" (cf. nota (14))).

gún hiperplano. Esta curva canónica es uno de los mejores modelos proyectivos de $\Gamma^{(\varphi)}$; entre los modelos "buenos" es el más sencillo y entiendo por "bueno" que el problema de la clasificación birracional se reduce a una clasificación proyectiva de curvas canónicas $\Gamma^{(\varphi)}_{2p-2} \subset \mathbb{P}_{p-1}$ .En efecto, la construcción de $\gamma_{\omega}(\Gamma^{(\varphi)})$ depende esencialmente de la elección de ω . Más concretamente:

Dos curvas canónicas del $\mathbb{P}_{p-1}$ son birracionalmente equivalentes sii son proyectivamente equivalentes.

1) ¿Hay alguna manera razonable de decir que las curvas algebraicas de orden $2p-2$ del $\mathbb{P}_{p-1}(\mathbb{C})$ forman una variedad algebraica V_p?

2) ¿Se puede afirmar que el cociente $V_p/\mathcal{G}_{p-1}$ de V_p por el grupo proyectivo $\mathcal{G}_{p-1}$ de $\mathbb{P}_{p-1}$ es una variedad algebraica?

La contestación a estas dos preguntas nos hace volver a la Geometría proyectiva clásica y por lo tanto a los invariantes.

Más precisamente:las llamadas coordenadas de CHOW (cf. § 4) de una variedad V_d^m del $\mathbb{P}_n$ provienen de las llamadas formas asociadas que son invariantes en un cierto sentido. Para contestar a 2) sería suficiente calcular explícitamente todos los invariantes de los "puntos de CHOW" variables en V_p pertenecientes a un espacio vectorial suficientemente alto..... y ver si pueden definir una inmersión del cociente $V_p/\mathcal{G}_{p-1}$ en un espacio proyectivo.....

Veremos más detalles de estas dos cuestiones en los dos § siguientes.

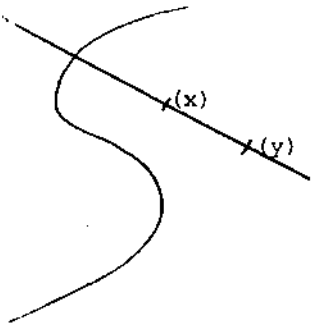
4. FAMILIAS DE CURVAS ALABEADAS. Es fácil ver que las cónicas del plano proyectivo forman un espacio proyectivo de dimensión cinco porque los seis coeficientes de una ecuación $f(x_0, x_1, x_2)=0$ que la represente pueden considerarse como coordenadas homogéneas en $\mathbb{P}_5$. Algo análogo podría decirse de las curvas planas de cualquier orden (forman un "espacio proyectivo" de dimensión $\frac{n(n+3)}{2} = \left(\binom{n+2}{2} - 1\right)$, o para las superficies de orden n del $\mathbb{P}_3$ o en general para una hipersuperficie H de orden n en $\mathbb{P}_m$ .... La propiedad esencial que se utiliza en todos estos casos es que H se representa por $f = 0$ donde f es una forma no idénticamente nula de orden n determinada a menos de un factor de proporcionalidad no nulo...

Si la codimensión $m - d$ de una $V_d \subset \mathbb{P}_m$ es mayor que uno la V_d no puede representarse -en el sentido usual al menos.......- por una sola ecuación. Sin embargo en un sentido más sofisticado -que no es el habitual- siempre se puede caracterizar una V_d (variedad algebraica de dimensión d del $\mathbb{P}_m$) por una sola forma F -no idénticamente nula-(en varias series de variables) unívocamente determinada a menos de un factor de proporcionalidad no nulo. Los coeficientes de F son las coordenadas de CHOW de V. Daremos más detalles para una curva alabeada $\Gamma \subset \mathbb{P}_3$:

Existe una forma $F : V_4 \times V_4 \to \mathbb{C}$ (o bien $(x, y) \mapsto F(x,y)$, $x, y \in V_4$ donde $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V_4)$ proviene del espacio vectorial V_4 de dimensión cuatro: $\mathbb{P}_3 = V_4 - \{0\}/\sim$ tal que

$$F(x,y)=0 \tag{5}$$

sii la recta que une los dos puntos (x), (y) del espacio ordinario se apoya en Γ .



Si fijamos (y) (fuera de Γ) la (5) representa el cono proyectante de Γ desde (y). Por tanto (5) representa la curva Γ como intersección de los conos proyectantes desde todos sus puntos exteriores.

Hay un método dual: Existe una forma $(u, v) \mapsto \Phi(u,v)$ en dos variables u, v del espacio V_4^* dual de V tal que $\Phi(u,v) = 0$ sii los dos planos de ecuación $\langle u, x \rangle = 0$ $\langle v, x \rangle = 0$ se cortan en una recta que se apoya en Γ.

Obsérvese que tanto F ,como Φ representan - de un modo indirecto- el conjunto de rectas del espacio que se apoyan en Γ bien sea por pares de puntos o por pares de planos. Precisamente, la F (Φ) puede expresarse como una forma de orden m igual al de la curva en las coordenadas grassmannianas puntuales p^{ij} (o duales q_{ij}):

$$p^{ij} = \begin{vmatrix} x^i & x^j \\ y^i & y^j \end{vmatrix} \qquad q^{ij} = \begin{vmatrix} u^i & u^j \\ v^i & v^j \end{vmatrix}$$

lo que parece natural observando que los pares (x, y) $((u),(v))$ pueden sustituirse por otros (x', y') $((u'),(v'))$ que representen la misma recta.......

Es decir, F , Φ representan la condición de conjugación de un par de puntos (planos) respecto a un "complejo" C de rectas de $\mathbb{P}_3$......($\Leftrightarrow$ dos puntos (planos) son conjugados respecto a C sii la recta que determinan pertenece a C .

Pero C es un complejo "especial"; toda recta por un punto P de Γ pertenece a C , y recíprocamente si toda recta por P pertenece a C , P pertenece a Γ ...

Esta construcción tiene una extensión -perfectamente análoga, pero más sofisticada para las subvariedades $V_d^m \subset \mathbb{P}_m$ $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ o bien $\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ con m - d (= codimensión de V en $\mathbb{P}_m$) variables (vectores de V) la primera, d+1 la segunda ("covectores" de V*). Estas F , Φ son las <u>formas asociadas</u> (⟺ formas de CHOW, <u>zugeordnete Formen</u>) tratadas por CAYLEY (1821! en un caso muy particular), SEVERI, VAN DER WAERDEN, CHOW y muchos otros....... Sus coeficientes ordenados de un modo arbitrariamente prefijado son las coordenadas de CHOW.

La F (o la Φ) son expresables por las $p^{i_1 i_2 \ldots i_{m-d}}$ de un $\mathbb{P}_{m-d-1}$ variable que se apoya en V_d por lo que pertenecen a un espacio vectorial de formas en m-d (d+1) variables vectoriales, invariantes por la acción de GL(m-d; V) (o bien GL(d+1; V*)) pero no llenan todo el espacio. Precisamente; <u>Las F , Φ son formas asociadas a variedades</u>[19] <u>sii sus coeficientes satisfacen cierto sistema de ecuaciones polinomiales homogéneas</u>. En este sentido se puede afirmar que el conjunto de las V_d^m forman una variedad algebraica (que generalmente no es irreducible) cuyas componentes irreducibles llamaremos

(19) O mejor a ciclos de dimensión d del $\mathbb{P}_m$ (combinaciones lineales formales libres con coeficientes enteros positivos de un número finito de subvariedades irreducibles de dimensión d del $\mathbb{P}_m$.

familias de variedades V^{m}_{d} . Por ejemplo las cuárticas alabeadas forman una variedad algebraica cuyas componentes son entre otras: la familia de las cuárticas de primera especie (intersección de dos cuádricas), las de segunda (restos de un par de rectas que se cruzan respecto a una cuádrica y una superficie cúbica), las cuárticas planas,....,

5. EL COCIENTE $M_p = V_p / \mathcal{G}_{p-1}$ COMO VARIEDAD DE MÓDULOS. INTENTO DE CONSTRUCCION CON LOS INVARIANTES.

El problema de construir todas las familias de variedades de un espacio proyectivo - no trivial cuando la codimensión es mayor que uno- es un problema clásico - nada fácil- incluso en el caso mas conocido y mejor estudiado de las curvas alabeadas del espacio proyectivo ordinario $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$. Se comprende que el problema se complique terriblemente - si además es preciso identificar variedades de una familia que sean proyectivamente equivalentes: ¡y ésto es precisamente lo que necesitamos hacer con la familia de las curvas canónicas del $\mathbb{P}_{p-1}$!.

Suponiendo resuelto el problema de estudiar la familia V_p de todas las curvas algebraicas de género p y orden 2p - 2 del espacio proyectivo $\mathbb{P}_{p-1}$ -que como sabemos son <u>curvas canónicas</u> (cf. .)- aún no tendríamos resuelto el problema de construir la variedad de los módulos M_p . Su suponemos V_p correctamente construida como lugar geométrico de los puntos de CHOW de las curvas que representa aún necesitamos identificar pares de curvas equivalentes respecto al grupo proyectivo $\mathcal{P}_{p-1}$ porque dos curvas canónicas son birracionalmente equivalentes sii son proyectivamente equivalentes.

Veamos cómo - si supiéramos calcular explícitamente una base de invariantes de un espacio de las F (Φ) asociadas a las curvas de V_p - podríamos construir la $M_p = V_p / \mathcal{G}_{p-1}$ siempre que, claro está, ciertas propiedades que necesitamos en la construcción se verifiquen. ..... Para ello conviene recordar como se definen los invariantes:

El grupo lineal completo $GL(V)$ de un espacio vectorial complejo de dimensión $n+1$ actúa también de un modo natural sobre otros espacios vectoriales funtorialmente ligados a V (por ejemplo V^*, $\overset{m}{\otimes} V, S^m(V)$, $\overset{m}{\Lambda} V$, $\overset{m}{\Lambda} V^*$, ... (dual, potencias tensoriales simétricas o exteriores, sus duales, etc.....) [20]

---

(20) Todos esos ejemplos muy estudiados hoy en los planes de "primer ciclo" - como parte del álgebra tienen interpretaciones geométricas interesantísimas y fundamentales. Señalemos $\mathbb{P}(\overset{d}{\Lambda} V)$ como espacio ambiente de la Grassmanniana $\mathcal{G}(d;n)$ que representa $\{\mathbb{P}_d \mid \mathbb{P}_d \subset \mathbb{P}_n\}$ · $\mathbb{P}(S^m(V^*))$ como el espacio que representa las hipersuperficies de orden m de $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)_{n+1}$.

Sea W uno cualquiera de éstos espacios y $GL(V) \times W \to$ $\to W$ la acción correspondiente. Una forma I de orden μ sobre W con valores en $\mathbb{C}$:

$$I : W \to \mathbb{C}$$

se llama $GL(V)$ - invariante sii

(6) $$\alpha I = \chi(\alpha) I \quad {}^{(21)} \qquad \forall \alpha \in GL(V)$$

donde $\chi(\alpha) \in \mathbb{C}$, $\chi(\alpha) \neq 0$. Un razonamiento clásico demuestra que en todos los casos que realmente nos interesan[22] resulta $\chi(\alpha) = (\det \alpha)^w$ donde w es un entero $\geqq 0$ llamado el peso del invariante relativo I . Si $w = 0$, I es un invariante absoluto. Probablemente en el caso más conocido del lector I es el discriminante $\det(a_{ij})$ de una cónica o cuádrica $\sum a_{ij} x^i x^j$ ($a_{ij} = a_{ji}$). Entonces $w = 2$.

Nos interesa naturalmente el caso que W sea el espacio F de las formas asociadas a las curvas canónicas de género p . Supongamos que se conociera una base I_1, $I_2, \ldots\ldots, I_N$ de un espacio vectorial I de formas invariantes de peso w sobre F: $I_\nu : F \to \mathbb{C}$

(21) Obviamente αI está definida por $\alpha I(W) = I(\alpha^{-1} W)$

(22) La representación inducida $GL(V) \to GL(W)$ por la acción $GL(V) \times W \to W$ debe ser racional.
El caso general puede reducirse al caso particular que dicha representación sea entera homogénea.

Si F es asociada a una curva canónica $\Gamma^{(p)}$ resulta

(7) $$I_\nu(\alpha F) = (\det \alpha)^w \, I_\nu(F), \quad \nu=1,2,\ldots,N$$

donde αF es asociada a la curva $\alpha\Gamma^{(p)}$. Luego la N-pla ordenada de números complejos $(I_1(F), I_2(F), \ldots, I_N(F))$ es candidata a ser las coordenadas homogéneas de un punto en $\mathbb{P}_{N-1}$ que dependería solo de la clase birracional de Γ .... Para que realmente lo fuera habría que demostrar las siguientes propiedades nada triviales:

1) Que conociéramos realmente una base de un $\mathcal{J}$ conveniente.....(ya lo dejamos por imposible),

2) Que las $I_\nu(F)$ no sean todas nulas para cualquier F a una curva canónica,

3) Que las $(\ldots, I_\nu(F), \ldots)$ sean realmente coordenadas homogéneas.....

Hemos olvidado mencionar que interesan sólo los I_ν homogéneos $(I_\nu(\lambda F) = \lambda^\rho I_\nu(F))$ del mismo grado ρ, para todo ν ..... luego (3) no "sería" difícil....

En fin la propiedad invariantiva aseguraría que el punto $(\ldots, I_\nu(F), \ldots)$ dependería solo de la clase de $\Gamma^{(p)}$.

Asi se definiría pues una aplicación

(8) $$\varphi : M_p \to \mathbb{P}_{N-1}$$

¡Aun precisaría saber si φ es inyectiva!

En fin todo ésto es un esbozo de un problema colosal que justifica el intento de resurrección ..... con que empezábamos y la confianza (¿justificada?) en las computadoras.

Dar detalles sobre algunos progresos llevaría mas tiempo del que dispongo y nos obligaría a salir del cuadro informal y de "gran público" con el que comenzamos. Espero que mi libro en preparación: Teoría de invariantes y Geometria proyectiva constribuya a disipar alguna duda o curiosidad del lector que desee conocer más sobre el tema. De momento, creo que es justo señalar que los mismos símbolos *, $\otimes$, S^{m}, $\overset{m}{\wedge}$, ... etc. del Algebra multilineal bourbakista constituyen de por sí una señal del progreso realizado que puede inscribirse dentro de la "resurrección".....

BIBLIOGRAFIA

BOERNER, *Group representations*, Noordhoff, Groningen.
BOURBAKI, *Algèbre multilinéaire*, Hermann, Paris.
DIEUDONNE-CASSELL, *Invariant theory old and new*, Advances of Mathematics, publicado como libro por Academic Press, 1970.
GREUB, *Multilinear Algebra*, Universitext, Springer-Verlag.
GUREVICH, *Foundations of the theory el algebraic invariants*, Noordhoff, Groningen 1964.
LITTLEWOOD, *The theory of groups characters*, 2nd Edition, Oxford University Press.
MUMFORD, *Geometric invariant theory*, Ergebnisse der Math. New Series, Vol. 34, Springer.
NAGATA, *Lectures on the 14th Problem of HILBERT*, Tata Institute, Bombay.
RIEMANN, *Gesammelte mathematische Werke*, 2te Auflage, Dover Publications, *Oeuvres mathematiques*, Librairie Blanchard, 1968.
SCHREIER-SPERNER, *Proyective Geometry*, Chelsea.
WETZENBOCK, *Invariantentheorie*, Noordhoff, Groningen, 1923.
WEYL, *Classical groups, their invariants and representations*, Princeton mathematical series, 1946.

Comentarios Bibliográficos

El libro de DIEUDONNÉ-CASSELL establece el "puente" entre ambas épocas -en particular señala las contribuciones de MUMFORD y NAGATA. El último libro de la época vieja fué WEITZENBOCK 1923 - que no usa representaciones (explícitamente.....). GUREVICH aunque posterior - usa mucho los tensores- se mantiene en la linea antigua. WEYL establece la identidad con la teoría de la representación de grupos.