Pub. Mat. UAB
nº 10, Desembre 1978

Anàlisi Combinatòria(x)

Carles Simó
Secció de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

Introducció.- La combinatòria apareix ja a l'antiguetat lligada a molts problemes "populars" al tractar de donar resposta a la pregunta : de quantes maneres hom pot fer una certa cosa? Estava també en relació amb problemes de Teoria elemental de Nombres (que no és pas certament senzilla!) i, molt després, amb problemes de càlcul de probabilitats.

El fet de que sigui poc corrent el tenir contacte amb l'Anàlisi Combinatòria degut als plans d'estudi actuals és una de les motivacions d'aquesta conferència.

El nom Anàlisi Combinatòria és degut a August de Morgan (Differential and Integral Calculus, Londres 1842, p.335): "Consisteix principalment en l'anàlisi de desenvolupaments complicats per mitjà de la consideració i agrupació a priori de les diferents combinacions de termes que entren en els coeficients". Veurem que en certs casos s'ha donat la volta a això : els càlculs de certes combinacions es fan mitjançant l'estudi de desenvolupaments (usant les funcions generatrius).

Més modernament (Riordan) es diu objectiu de l'A.C. el trobar el nombre de maneres que hi ha de fer alguna operació ben definida. Berge ho defineix com la recerca de configuracions (és a dir : aplicacions d'un conjunt d'objectes en un

(x) Conferència feta el 7 de desembre de 1977 a la Universitat Autònoma de Barcelona.

conjunt abstracte finit), la seva enumeració i recompte.

Hom pot distingir vàries qüestions : Estudi d'una configuració coneguda, recerca d'una configuració desconeguda, recompte exacte del nombre de configuracions, recompte aproximat, enumeració de configuracions i classificació. Per aquestes últimes tasques és gairebé imprescindible l'ús de calculadors automàtics. El mateix succeeix per les aplicacions a problemes d'optimització, de les que el problema del viatjant de comerç n'és un exemple : Coneixent el cost per anar d'una ciutat A_i a una A_j , quina és la manera més econòmica de fer un recorregut sortint de la ciutat origen A_0 i tornant a ella després d'haver passat per totes les altres?

Apareixen problemes combinatoris en càlcul de probabilitats, estadística, teoria de nombres, topologia, estructura química, recerca d'operacions, teoria de la informació, etc. Sovint és important "reduir" un problema a combinatòria, però pot ésser encara molt difícil. Per exemple, hom ha d'omplir un tauler de n files i n columnes posant a cada quadre una lletra i un número de manera que cada lletra i cada número han de aparèixer exactament un cop a cada fila i a cada columna, però no es pot repetir cap de les parelles (lletra,número). Una tal configuració s'anomena un biquadrat llatí ortogonal. Es coneixien antigament exemples fins a $n = 5$. Euler digué que per a $n > 5$ no hi havia solució. La resposta exacta no ha estat donada sinó al 1960 en què hom provà que hi ha solució per a tot n diferent de 6 .

Fem un parèntesi per a destacar que en el treball amb calculador automàtic és habitual, per la enumeració de configuracions, el generar-les "ordenadament" (per exemple, les permutacions o els subconjunts d'un conjunt donat). Si les configuracions que cerquem estan sotmeses a lligams es verifica si els compleixen. Es bàsic per l'estalvi de temps el tractar de decidir lo més aviat possible (àdhuc a mig generar) si la configuració que es genera satisfarà les condicions establertes. Si no és així hom passa a la següent. La tècnica anomenada backtracking està basada en aquesta observació. Per exemple, podem preguntar-nos quin és el nombre màxim de salts del cavall en un tauler d'escacs de manera que les línies que uneixen els centres dels quadres successivament ocupats pels cavalls no es tallin. Els temps de càlcul són molt grans. No és sinó recentment que hom ha trovat la solució usant backtracking : 36 . Es ja problema difícil la estimació acurada del nombre de passos a fer.

En problemes d'optimització discreta és molt corrent usar la mateixa tècnica si bé hom la coneix sota el nom de mètode de branch and bound. Si el nombre de passos a fer per aconsseguir l'òptim és inabastable hom pot generar configuracions aleatòriament. Així potser no hom arriba al òptim però sí a solucions quasi-òptimes.

Parlarem a continuació d'uns pocs temes dintre de l'A.C.

<u>Elements</u>.- Sabem que si $\mathrm{Card}(A) = m$ i $\mathrm{Card}(X) = n$ llavors $\mathrm{Card}\{f \mid f: X \longrightarrow A\} = m^n$ i s'obtenen les variacions amb repetició.

$\mathrm{Card}\{f \mid f: X \longrightarrow A,\ f \text{ injectiva}\} = m(m-1)\ldots(m-n+1) = (m)_n$ o variacions. Si $m = n$ tenim el nombre de permutacions. Dàltra banda $\mathrm{Card}\{B \in \mathcal{P}(A) \mid \mathrm{Card}(B) = n\} = \binom{m}{n}$ (combinacions, donades pels coeficients binomials). Diguem que el polinomi factorial $(x)_n$ es pot escriure com

$$(x)_n = s_n^0 + s_n^1 x + \ldots + s_n^n x^n \quad ,$$

a on s_n^j s'anomenen nombres de Stirling de primera espècie i satisfan les relacions : $s_n^o = o$, $s_n^n = 1$, $s_{n+1}^k = s_n^{k-1} - n\, s_n^k$.

Un altre nombre de tipus factorial és $(m)^n = m(m+1)\dots(m+n-1)$ que ens diu de quantes maneres hom pot col·locar n objectes ordenats en m capses.

Si A és un conjunt ordenat llavors $\mathrm{Card}\{f \mid f: X \longrightarrow A, f \text{ creixent}\} = (m)^n/n!$ i tenim les combinacions amb repetició.

Hom generalitza fàcilment els nombres binomials als multinomials :

$$\mathrm{Card}\left\{f \mid f: X \longrightarrow X_1\times\dots\times X_p \mid \mathrm{Card}(f^{-1}(X_i))=n_i,\ \sum_{i=1}^{p} n_i = n\right\} =$$

$$= \binom{n}{n_1,\dots,n_p} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{p} n_i!} .$$

Es clar que el nom bé de que $(\sum_{i=1}^{p} a_i)^n = \sum_{\substack{n_i \geq o \\ i=1\div p,\ \sum_{i=1}^{p} n_i = n}} \binom{n}{n_1,\dots,n_p} \prod_{i=1}^{p} a_i^{n_i}$

Un exemple de aplicació és el càlcul del nombre de camins de coordenades creixents a $\mathbb{Z}^n$ entre $a = (a_1,\dots a_n)^T$ i $b = (b_1,\dots,b_n)^T$ que val

$$\binom{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)}{b_1 - a_1,\dots,b_n - a_n} .$$

Si $\mathrm{Card}(X) = n$ per una partició de X del tipus $1^{a_1} 2^{a_2}\dots k^{a_k}$ entendrem una partició en a_1 parts de 1 element cada una, a_2

de 2 elements, etc. El nombre de tals particions val òbviament

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} a_i!\,(i!)^{a_i}} .$$

El nombre de particions de X en m classes (no buides), $m \leq n$ es diu nombre de Stirling de segona espècie S_n^m i és lo mateix que

$$\frac{1}{m!}\,\mathrm{Card}\left\{f \mid f : X \longrightarrow A,\ \text{exhaustiva}\right\} .$$

Hom veu fàcilment que $x^n = \sum_{k=1}^{n} S_n^k\,(x)_k$ i que $S_n^1 = S_n^n = 1$, $S_{m+1}^k = S_n^{k-1} + kS_n^k$, $1 < k < n$.

El total de maneres de partir X en classes és $S_n^1 + \dots + S_n^n = B_n$ (nombre de Bell). Hom demostra que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n = e^{(e^t - 1)}$, primer exemple que donem de funció generatriu.

Aplicacions de X en A d'imatge màxima

	m=1	2	3	4	5	6	
n=1	1	2	3	4	5	6	
2	1	2	6	12	20	30	$n \leq m$
3	1	6	6	24	60	120	
4	1	14	36	24	120	360	$n!\binom{m}{n}$
5	1	30	150	240	120	720	
6	1	62	540	1560	1800	720	

$n \geq m$ $\quad m!\,S_n^m$

<u>Funcions generatrius</u>.- Sigui $S = \{a, b, \dots\}$ un conjunt desordenat. La funció generatriu de subconjunts (formal) és

$(1+a)(1+b)(1+c)\dots = 1 + a + b + c + \dots + ab + ac + \dots \quad (1 \equiv \emptyset)$.

Per generar amb repetició ens cal la funció generatriu

$$(1+a+aa+aaa+\dots)(1+b+bb+bbb\dots)\dots\dots =$$

$$= \frac{1}{1-a}\,\frac{1}{1-b}\cdots \quad .$$

Sigui $S = \{a,b,c,\dots\}$ un conjunt ordenat. Si volem escriure'l de totes les maneres possibles segons l'ordre (permutacions), la f.g. és

$$\mathrm{Per}\begin{pmatrix} a & a & \cdot & \cdot \\ b & b & \vdots & \vdots \\ c & c & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad .$$

Per serveix per a designar el permanent, definit així :

$$\mathrm{Per}(a_{ij}) = \sum_{\sigma\in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \quad , \; i,j = 1\div n$$ a on S_n vol dir el grup simètric.

Destaquem que $P(AB) \neq P(A)\cdot P(B)$. El càlcul de Det(A) requereix $O(n^3/3)$ operacions (usant la triangulació de Gauss; a partir de la definició és $O((n-1)n!)$). Per contra, lo millor que hom ha obtingut quant al càlcul de P(A) és fer-ho en $O(n\,2^{n-1})$ operacions, i és problema obert el millorar-ho.

Si $\sum_i a_{ij} = 1$ i $\sum_j a_{ij} = 1$ la matriu A es diu doblement estocàstica. Llavors van der Waerden va conjecturar que Per(A) $n!/n^n$, i que el mínim s'obté si $a_{ij} = 1/n$. Se sap que és certa en dimensió baixa, que el punt donat és mínim local, però no hom té encara una demostració de la conjectura.

La f.g. de subconjunts ordenats s'obté fàcilment com

$$\mathrm{Per}\left[I + \begin{pmatrix} a & a & \vdots \\ b & b & \vdots \\ \cdot & \cdot & \vdots \end{pmatrix} \right] \quad .$$

El generador de subconjunts de m elements ordenats és $(a+b+\dots)(a+b+\dots)\dots = (a+b+c+\dots)^m$, i si volem tots els subconjunts ordenats ens cal usar $\frac{1}{1-(a+b+\dots)}$.

Es possible construir f.g. numèriques : Si donem a certes variables valor 1 i a d'altres el zero quedaran els termes que porten totes les variables amb 1, i els podem comptar. Exemple : quants subconjunts de k elements hi ha en un conjunt de n elements? Donem a tots els elements el valor x . La f.g. val ara $(1+x)^n$. Llavors només cal veure el coeficient de x^k : $\binom{n}{k}$. Quants subconjunts ordenats amb repetició hi ha de k elements? Cal calcular simplement el coeficient de x^k a $\frac{1}{1-nx}$, és a dir n^k.

En general, donada una successió (a_n) hom defineixen funcions generatrius $\phi(t)=\sum a_n t^n$ i $\psi(t)=\sum a_n t^n/n!$, i en vàries variables $\phi(t,u)=\sum a_{n,k} t^n u^k$. Vegem uns quants exemples de l'ús de les f.g. per a obtenir informació sobre successions donades per recurrències :

Considerem la successió de Fibonacci : $F_0=F_1=1$, i $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$. Llavors hom té $\phi=1+t+\sum_{n\geq 2} F_n t^n =$

$$1+t+\sum_{n\geq 2}(F_{n-1}+F_{n-2})t^n = 1+t\phi+t^2\phi \quad \text{que implica } \phi=\frac{1}{1-t-t^2} .$$

Si r_1 i r_2 són les arrels del denominador és immediat que $F_n=(r_1^{n+1}-r_2^{n+1})/(r_1-r_2)$.

Aquest tipus de raonament és aplicable a molts polinomis ortogonals, funcions especials, nombres de Bernoulli i d'Euler, etc. El mètode usat pel nombres de Fibonacci pot usar-se per tota equació en diferències finites de coeficients constants. Pels nombres de Stirling tenim les següents f.g. :

$$1+\sum s_n^k \frac{t^n}{n!} u^k = (1+t)^u \quad , \quad 1+\sum S_n^k \frac{t^n}{n!} u^k = \exp(u(e^t-1)) .$$

Vegem algunes aplicacions no tan elementals de les f.g. El problema de Catalan consisteix en calcular de quantes maneres hom pot posar parèntesi en la expressió del producte $P = X_1 X_2 \cdots X_n$. Per exemple, si $n=4$ podem escriure $P = X^2 \cdot X^2 = (X^2 \cdot X)X = (X \cdot X^2)X = X(X^2 \cdot X) = X(X \cdot X^2)$ i $a_4 = 5$. La recurrència és $a_n = \sum_1^{n-1} a_k a_{n-k}$, amb $a_o = o$, $a_1 = 1$. Construim la funció generetriu : $\phi(t) = t + \sum_{n\geq 2} a_n t^n = t + \sum_{n\geq 2} t^n (\sum_1^{n-1} a_k a_{n-k}) =$

$t + \sum_{h,k\geq o} a_h a_k t^{k+h} = t + (\sum a_h t^h)(\sum a_k t^k) = t + \phi^2(t)$ i per tant

$\phi(t) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4t}) = \frac{1}{2}\left[1 - \sum \binom{1/2}{n}(-4t)^n\right]$ de on $a_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$, que són els anomenats nombres de Catalan.

Si hom considera els parèntesi commutatius (Wedderburn) per $n=4$ tindriem $(X^2 \cdot X)X = (X \cdot X^2)X = X(X^2 \cdot X) = X(X \cdot X^2)$ i només ens resta $b_4 = 2$. La recurrència és més complicada :

$$\left.\begin{aligned} b_{2p-1} &= b_1 b_{2p-2} + \dots + b_{p-2} b_p \ , \quad \text{si} \quad p\geq 2 \\ b_{2p} &= b_1 b_{2p-1} + \dots + b_{p-1} b_{p+1} + \binom{b_p+1}{2}, \quad p\geq 1 \end{aligned}\right\} \text{i d'això surt}$$

$\phi(t) = t + \frac{1}{2}\phi^2(t) + \frac{1}{2}\phi(t^2)$. Si fem $\bar{\phi} = \phi - 1$ tenim finalment l'equació funcional $\bar{\phi}^2(t) + \bar{\phi}(t^2) + 2t = o$. La seva solució és encara problema obert, i àdhuc la estimació asimptòtica dels coeficients romàn desconeguda.

<u>Principi d'inclusió-exclusió</u>.- La base n'és lo que en probabilitats hom coneix com a fòrmula d'Euler-Poincaré :

$$\operatorname{Card}(\bigcup_1^n A_i) = \sum_{1\leq i\leq n} \operatorname{Card}(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} \operatorname{Card}(A_i \cap A_j) + \dots$$

$$+ (-1)^{n-1} \operatorname{Card}(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n) \ .$$

Sigui X un conjunt de n objectes. Hom diu que una permutació σ de X és un desarranjament si no té cap punt fix. Comptem els desarranjaments usant la fòrmula d'Euler-Poincaré :

$$d(n) = n! - (n\cdot(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \dots) = n!\ (1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \dots + \frac{(-1)^n}{n!})$$

$$\simeq n!/e \qquad (\text{si } n \text{ és gran}) .$$

La f.g. dels desarranjaments és $e^{-t}(1-t)^{-1}$.

Vegem generalitzacions del desarranjaments : Un $k\times n$ rectangle llatí és una matriu d'aquestes dimensions, formada amb elements de X tal que a cap fila ni columna hi ha elements repetits. Si $k=2$ tenim els desarranjaments. Si $k=3$ hi ha recurrències i estimació asimptòtica del nombre de rectangles llatins, però si $k>3$ no tenim ni l'una cosa ni l'altra. Si $k=n$ hom parla de quadrats llatins. Actualment es coneix la següent taula :

n	2	3	4	5	6	7	8
nombre de quadrats llatins	1	1	4	56	9408	16942080	535281401856

L'estudi per $n\geq 9$ és problema obert i difícil.

Dintre aquesta família hi ha el ben conegut problème des ménages : En una taula rodona hi ha n parelles alternades (home-dona). Quantes maneres hi ha d'asseure's sense que ningú tingui al costat la seva pròpia parella? Hom fa el càlcul per reducció. Primer hom suposa totes les dones assegudes ($n!\cdot 2$ possibilitats). Sigui $\mu(n)$ el valor reduït. Definim una permutació σ tal que $\sigma(i) \neq i\ ,\ i+1$ si $i = 1 \div n-1$; $\sigma(n) \neq 1\ ,\ n$.

$$\text{Si} \quad \left.\begin{aligned} A_{2i-1} &= \{\sigma \mid \sigma(i) = i\}\ ,\ i = 1-n \\ A_{2i} &= \{\sigma \mid \sigma(i) = i+1\}\ ,\ i = 1\div n-1 \\ A_{2n} &= \{\sigma \mid \sigma(n) = 1\} \end{aligned}\right\} \text{ hom té } \mu(n) = \mathrm{Card}(\cap \overline{A_i}) .$$

Llavors s'arriba a $\mu(n) = \sum_k (-1)^k (n-k)!\ V_k(n)$, on $V_k(n)$ és el nombre de maneres d'escollir k elements de un total de n en una taula rodona sense agafar-ne dos de consecutius. Si diem $u_k(n)$ el nombre de maneres d'escollir k elements d'una línia de n sense agafar-ne dos de consecutius, tenim $v_k(n) = u_k(n-1) + u_k(n-3)$. D'altra banda és clar que $u_k(n) = u_{k-1}(n-2) + u_k(n-1)$. Juntament amb els valors $u_o(n) = 1$, $u_1(n) = n$, s'obté per inducció que $u_k(n) = \binom{n-k+1}{k}$ i per tant $v_k(n) = \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}$. Finalment queda $\mu(n) = \sum (-1)^k (n-k)!\, \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$.

Fem el lligam amb permanents. Comptar el nombre de permutacions en que i no té permès anar a parar a un lloc j és fàcil: $\mathrm{Per}(a_{ij})$, amb $a_{ij} = 1$ si $i \longrightarrow j$ està permès ; $a_{ij} = o$ si no ho està. Per exemple, $d(n)$ i $\mu(n)$ venen expressats com

$$d(n) = \mathrm{Per}\begin{pmatrix} o & 1 & 1 \ldots 1 \\ 1 & o & 1 \ldots 1 \\ 1 & 1 & o \ldots 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 \ldots o \end{pmatrix}, \quad \mu(n) = \mathrm{Per}\begin{pmatrix} o & o & 1 \ldots 1 \\ 1 & o & o \ldots 1 \\ 1 & 1 & o \ldots 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ o & 1 & 1 \ldots o \end{pmatrix}.$$

Desenvolupant $d(n)$ per l'última fila i després lo que queda per la primera tenim la recurrència $d(n+1) = n(d(n) + d(n-1))$.

Donat un $k \times n$ rectangle llatí el nombre d'extensions a $(k+1) \times n$ rectangles s'obté per la recepta de posar zeros o uns en una matriu i calcular el permanent. Per exemple, si el rectangle és $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ el nombre d'extensions és $\mathrm{Per}\begin{pmatrix} o & o & o & 1 & 1 \\ 1 & o & 1 & o & o \\ o & o & o & 1 & 1 \\ 1 & 1 & o & o & o \\ o & 1 & 1 & o & o \end{pmatrix}$, és a dir, 4 .

Hom demostra que si A és una matriu que té la suma de cada fila i de cada columne constant llavors $P(A) \neq o$. Per tant l'extensió fins al quadrat és sempre possible.

Veiem que té interès el valor de Per(A) si té zeros o uns en a_{ij} i r_j és el **nombre** de uns en la fila j . Hom ha demostrat que en aquest cas $\mathrm{Per}(A) \leq \prod_j \left\{ r_j!^{1/r_j} + \tau \right\}$, $\tau = .14 \ldots$. Hom conjectura que es pot treure la τ . Si això és cert el nombre de quadrats llatins satisfarà $L_n \leq \left(\prod_{k=1\div n-1} k!^{1/k} \right)^n$. Si és certa la conjectura de van der Waerden esmentada abans : $L_n \geq n!^{2n-1}/n^{n^2}$.

Una altra manera d'introduir el permanent d'una matriu és així : $\mathrm{Per}(a_{ij})$ = coeficient de $x_1 x_2 \ldots x_n$ en el desenvolupament de $(\sum a_{1j}x_j)(\sum a_{2j}x_j)\ldots(\sum a_{nj}x_j)$. En general definim $\mathrm{Per}^{(n_1,\ldots,n_s)}(a_{ij})$ com el coeficient de $x_1^{n_1}\, x_2^{n_2} \ldots x_s^{n_s}$ a $(\sum a_{1j}x_j)^{n_1} \ldots (\sum a_{sj}x_j)^{n_s}$. S'obté que

$$\mathrm{Per}^{(n_1,\ldots,n_s)} = \text{coef. de } x_1^{n_1} \ldots x_s^{n_s} \text{ a } \frac{1}{\det(I - XA)} \text{, on}$$

$X = (x_i \delta_{ij})$. Aouest resultat és el que hom coneix com a teorema mestre de MacMahon.

Es pot aplicar el dit teorema a la fòrmula d'inversió de **Lagrange per funcions de vàries variables** . Si $y = x + f(y)$, $y \in R^n$, $f(o) = o$, $\det(I - Df) \neq o$ i vull expressar $G(y)$ en funció de x :

$$G(y) = \overline{G}(x) = \sum \frac{1}{n_1! \ldots n_s!} D_1^{n_1} \ldots D_s^{n_s} f_1(x)^{n_1} \ldots f_s(x)^{n_s} G(x) \times$$

$$\times \det(I - Df) \ .$$

<u>Particions</u>.- Sigui $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_p$, $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_p > o$, i Π_p^n el nombre de particions com la anterior de n en p trossos. Si penso que tenim p caixes i posem un element a cada una i la resta del elements en o,1,...,p caixes, obtenim la recurrència

$$\Pi_p^n = \Pi_o^{n-p} + \Pi_1^{n-p} + \dots + \Pi_p^{n-p} \ .$$

D'aquesta relació junt amb la corresponent a Π_{p-1}^{n-1} surt que $\Pi_p^n = \Pi_{p-1}^{n-1} + \Pi_p^{n-p}$. Si hi afegim $\Pi_o^q = \delta_{qo}$ i $\Pi_p^q = o$ si $q<p$, tenim determinats tots els valors del nombre de particions. La f.g. val $f(x,y) = \sum_{n\geq o} \sum_{p\geq o} \Pi_p^{n+p} x^n y^p = \prod_{s\geq o} \frac{1}{1-x^s y}$. Es obvi que $\Pi^n = \sum_{p=o}^{n} \Pi_p^n$ té per f.g. $\prod_{s\geq o} \frac{1}{1-x^s}$.

De manera anàloga hom construeix les f.g. de les particions en parts senars : $f_s(x) = \prod_{s\geq 1} (1-x^{2s-1})^{-1}$, en parts parelles $f_p(x) = \prod_{s\geq 1} (1-x^{2s})^{-1}$, en parts diferents $f_d(x) = \prod_{s\geq 1} (1+x^s)$, en quadrats $f_q(x) = \prod_{s\geq 1} (1-x^{s^2})^{-1}$, en primers $\prod_{p\in\mathcal{P}} (1-x^p)^{-1}$, en primers diferents $\prod_{p\in\mathcal{P}} (1+x^p)$, on $\mathcal{P}$ és el conjunt de nombres primers, etc.

Es difícil treballar amb aquestes f.g. Hom té alguns resultats asimptòtics, per exemple $\Pi^n \sim \exp(\pi\sqrt{2n/3})/(4n\sqrt{3})$.

Entre les particions hi ha algunes identitats. Per exemple, com que $f_s(x) = \prod_{s\geq 1} (1-x^{2s})/(1-x^s) = \prod_{s\geq 1} (1+x^s)$, tenim com a conseqüència que el nombre de particions en parts senars és igual al nombre de particions en parts diferents.

El nombre de particions en parts de tamany $5s\pm 1$ és el que té per f.g. $(1-x)^{-1} \prod_{s\geq 1} (1-x^{5s-1})^{-1} (1-x^{5s+1})^{-1}$. D'altra banda la f.g. de les particions en parts de tamanys no consecutius és $\sum_{m\geq o} x^{m^2} \prod_{j=1}^{m} (1-x^j)^{-1}$. Ramanujan va provar que les dues f.g.

coincideixen, i per tant els dos tipus de particions tenen, per a cada n,el mateix cardinal, lo qual no és pas evident!

En una primera xerrada sobre A.C. no volem introduir més conceptes, lo qual ens obliga a no dir rés de permutacions, accions de grups, grafs i molts d'altres camps. Segueixen unes referències bàsiques per qui hi estigui interessat :

Berge,C.: Principes de Combinatoire, Dunod, 1968.

Comtet,L.: Analyse combinatoire,I i II, Presses Univ. de France, 197o.

Percus,J.K.: Combinatorial Methods, Springer, 1971.

Riordan,J.: An Introduction to Combinatorial Analysis, Wiley, 1958.