

COHOMOLOGIAS ELIPTICAS (Un ensayo introductorio)

GUILLERMO MORENO

A la memoria de un amigo: Pere Menal

Abstract

Let α and β be any angles then the known formula $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$ becomes under the substitution $x = \operatorname{sen} \alpha$, $y = \operatorname{sen} \beta$, $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} =: F(x, y)$. This addition formula is an example of a "Formal group Law" which show up in many contexts in Modern Mathematics.

In Algebraic Topology suitable Cohomology theories induce a Formal Group Laws, the Elliptic Cohomologies are the ones who realize the Euler addition formula (1778): $F(x, y) = (x\sqrt{R(y)} + y\sqrt{R(x)}/1 - \varepsilon x^2 y^2)$. For $R(z) = 1 - 2\delta z^2 + \varepsilon z^4$ the above case corresponds to $\varepsilon = 0$, $\delta = \frac{1}{2}$.

In this survey paper we define this Cohomology theories and establish its relationship with Global analysis (Atiyah-Singer Theorem) and Modular Forms following ideas of Landweber, Hirzebruch et al.

"Entre las disciplinas intelectuales, la Matemática ocupa una posición única. Desde muchos puntos de vista es un arte, pero también es el lenguaje de las ciencias. A pesar de que gran parte de la Matemática proviene de fuentes externas, mucha de su creatividad está motivada internamente." I. M. SINGER

"Por la gloria del espíritu humano". G. T. JACOBI

Una de las características fundamentales de la investigación en Matemática (básica) hoy día, es la interrelación y traslapamiento de sus diferentes ramas; éstas se entrelazan a veces de la manera más inesperada

y poco evidente para dar lugar a nuevas teorías, desde las cuales los problemas de investigación viejos toman un nuevo enfoque y dan lugar a nuevos problemas con nuevas soluciones.

Este es el caso del tema que nos ocupa, "Cohomologías Elípticas", que se podría describir como la intersección de varias importantes ramas, cada una con su problemática específica, a saber: Topología Algebraica, Teoría de los Números (La Teoría de las curvas elípticas), Análisis Global (El índice de Atiyah-Singer) y Física Teórica (El modelo sigma no lineal).

En este artículo introductorio trataremos de establecer los diferentes ingredientes necesarios para la definición de dichas teorías procurando obtener los antecedentes necesarios para poder comprender las interrelaciones de las que hablábamos; la idea fundamental de la exposición es hacer resaltar una constante en la investigación matemática que consiste en notar que en muchas ocasiones dos problemas (o más) nos llevan a la necesidad de resolver un mismo problema numérico, es decir, se reducen a estudiar un mismo formalismo. Eso no quiere decir en primera instancia que los problemas sean el mismo o de la misma naturaleza, empero en ocasiones nos hace adivinar causas o contextos estructurales de los dos problemas para que el modo en que se presentan y la naturaleza de las soluciones de uno tengan que ver con la del otro.

En nuestro caso dichos problemas son el estudio de la Cohomologías generalizadas complejo-orientables en Topología Algebraica, el estudio de las curvas elípticas llamadas Cuárticas de Jacobi y el estudio de ciertos invariantes bajo cobordismo de variedades llamados géneros (donde la signatura es el principal ejemplo). Estos tres temas nos llevan a un mismo formalismo, a saber, el estudio de ciertos "Logaritmos de Leyes formales de Grupo", que son los que se pueden escribir como integrales elípticas correspondientes a las funciones seno generalizado de Jacobi.

En la Sección 1 daremos un repaso de dicho lenguaje formal; en la Sección 2 estudiaremos ciertas curvas elípticas, las cuárticas de Jacobi, desde un punto de vista formal; en la Sección 3 estudiaremos el formalismo ligado a una teoría de cohomología (Complejo orientable); en la Sección 4 definimos las cohomologías elípticas recogiendo los datos de las Secciones 2 y 3.

En la Sección 5 revisaremos la noción de logaritmo formal, en la Sección 6 veremos lo que se entiende por género elíptico que es, por decirlo de alguna manera, la otra cara de la moneda respecto a Cohomologías Elípticas.

En la Sección 7 discutiremos la relación entre cierto género elíptico y el índice de Atiyah-Singer del operador de Dirac. En la Sección 8 trataremos de motivar el estudio de la relación de los temas expuestos

con la problemática de la teoría de super cuerdas, refiriendo al lector a otras fuentes más completas, dado nuestro carácter de turistas en el tema.

Este artículo surgió de pláticas y conferencias impartidas en la sección de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Barcelona en Bellaterra, en los departamentos de Matemáticas del CINVESTAV y UAM-Iztapalapa, en el Instituto de Matemáticas de la U.N.A.M. y en el CIMAT en Guanajuato. A todos los colegas de estas instituciones que participaron agradecemos sus comentarios, muy en especial a L. Astey y a X. Gómez-Mont.

“Pero nos preguntamos: ¿El crecimiento del conocimiento matemático hará eventualmente imposible para un solo investigador entender todas las partes de dicho conocimiento? En respuesta permítaseme señalar cómo internamente, por la misma naturaleza de las ciencias matemáticas, cualquier progreso real lleva dentro de sí el descubrimiento de herramientas más incisivas y métodos simples los cuales al mismo tiempo facilitan la comprensión de las teorías previas y eliminan los anteriores desarrollos más escabrosos. Por la adquisición de estas herramientas más precisas y métodos simples, el investigador por sí mismo obtiene éxito orientándose en las diferentes ramas de las matemáticas. En ninguna otra ciencia es posible hacer esto en el mismo grado”. DAVID HILBERT (1900)

1. Repaso sobre Ley de Grupo Formal

Definamos a M como un anillo (graduado) con 1 y a x una indeterminada (de grado -2) $M[[x]]$ denota el anillo de series formales en x con coeficientes en M ; un elemento típico es de la forma

$$f(x) = \sum_{i \geq 0} a_i x^i \quad a_i \in M_{-2i}.$$

$M[[x, y]]$ denota el anillo de series formales en dos variables x e y (de grado -2 ambas) con coeficientes en M . Un elemento típico es de la forma

$$F(x, y) = \sum_{i, j \geq 0} a_{ij} x^i y^j \quad \text{con } a_{ij} \in M_{-2(i+j)}.$$

Definición. Una ley de grupo formal sobre M es un elemento $F(x, y) \in M[[x, y]]$, esto es, una serie formal que cumple las siguientes propiedades:

- 1) $F(x, 0) = x$, $F(0, y) = y$ (Identidad)
- 2) $F(x, y) = F(y, x)$ (Conmutatividad)
- 3) $F(F(x, y), z) = F(x, F(y, z))$ (Asociatividad)
- 4) Existe $i(x) \in M[[x]]$ tal que $F(x, i(x)) = 0$ (La existencia de un inverso).

Se puede verificar fácilmente que las propiedades definitorias son las tres primeras; ya que 4) se puede derivar de ellas. Observamos también que 2) nos dice que

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{para toda } i, j \geq 0.$$

Ejemplos. (a) $F(x, y) = x + y$ "La ley aditiva" es decir que $a_{01} = a_{10} = 1$ y $a_{ij} = 0$ en todos los otros casos. Se puede decir inmediatamente que $i(x) = -x$.

(b) $F(x, y) = x + y + xy = (1+x)(1+y) - 1$ es decir

$a_{01} = a_{10} = 1$ y $a_{11} = 1$ $a_{ij} = 0$ en todos los otros casos, esta ley de grupo formal es conocida como "multiplicativa" es fácil deducir también que

$$i(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \sum_{n>1} (-1)^n x^n.$$

El teorema principal de la teoría de grupos formales al menos en lo que a nuestra discusión concierne es:

Teorema de Lazard. *Existe un anillo L graduado conmutativo y con 1 y una ley de grupo formal $F_u(x, y)$ sobre L tal que para todo otro anillo M y serie formal $F(x, y)$ sobre él, existe $\Theta : L \rightarrow M$ homomorfismo de anillos graduados con la propiedad de que si*

$$F_u(x, y) = \sum_{i, j > 0} C_{ij} x^i y^j, \quad C_{ij} \in L, \quad \text{entonces}$$

$$F(x, y) = \sum_{i, j > 0} \Theta(C_{ij}) x^i y^j.$$

Este teorema se puede resumir diciendo: dada una ley de grupo formal sobre M a ésta le corresponde (un único) homomorfismo de anillos de L a M . Tal anillo universal se puede construir: $L = \mathbb{Z}[t_1, t_2, \dots]$ donde el grado de t_i es $+2(i+j) + 2$.

Para una completa versión de esta sección recomendamos el libro de M. Hazewinkel, vea [H] en la bibliografía.

2. Grupos formales y funciones elípticas

Tomemos ε y δ como parámetros y definamos $R(x) = 1 - 2\delta x^2 + \varepsilon x^4$ un polinomio de cuarto grado, y con él definamos

$$g(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$$

Esta $g(x)$ es conocida como una integral elíptica de Jacobi (vea [Ha] en la bibliografía).

Para ciertas sustituciones de los parámetros δ y ε esta $g(x)$ nos es conocida:

$$\text{Si } \varepsilon = 0 \text{ y } \delta = \frac{1}{2} \quad g(x) = \int_0^x \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = \arcsen x.$$

$$\text{Si } \varepsilon = 0 \text{ y } \delta = -\frac{1}{2} \quad g(x) = \int_0^x \frac{d\tau}{\sqrt{1+\tau^2}} = \text{arcsenh } x.$$

Si $\varepsilon = -1$ y $\delta = 0$ $g(x) = \int_0^x \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^4}} = \text{arcsenl } x$ la función inversa del seno lemniscático.

Si $0 < k < 1$ y $\varepsilon = k^2$ y $\delta = \frac{k^2+1}{2}$, $g(x) = \int_0^x \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1+k^2\tau^2)}} = \arcsen Jx$; esta es la función inversa de lo que se conoce como el seno de Jacobi que interviene centralmente en el problema del péndulo matemático.

El nombre de elíptico, como es bien sabido, proviene de que el intentar calcular la longitud de un segmento de elipse nos conduce irremediablemente al cálculo de integrales de este tipo, que no se pueden evaluar con funciones elementales. Nuestros tres primeros ejemplos provienen del caso circular, hiperbólico y lemniscático (vea [Ma] en la bibliografía, páginas 96 en adelante).

De la trigonometría elemental sabemos que para ángulos dados α y β la ley de aditividad del seno es

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{sen } \beta.$$

Si hacemos la sustitución $x = \text{sen } \alpha$ $y = \text{sen } \beta$ y recordamos que $\cos^2 \beta = 1 - \text{sen}^2 \beta$ y similarmente para α , podemos ver que

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = x\sqrt{R(y)} + y\sqrt{R(x)}$$

para $\varepsilon = 0$ y $\delta = \frac{1}{2}$ en la fórmula de arriba.

Claramente $F(x, y) = x\sqrt{R(y)} + y\sqrt{R(x)}$ es una ley de grupo formal, verifique que cumple las tres propiedades mencionadas.

La ley de aditividad para $g^{-1}(x)$, es el caso general de la anterior, y es la ley de grupo formal

$$F_{E11}(x, y) = \frac{x\sqrt{R(y)} + y\sqrt{R(x)}}{1 - \varepsilon x^2 y^2}$$

que es conocida como la ley de aditividad de Euler y data de 1768. (Vea [Ma] para una demostración, especialmente el Capítulo IV).

Dado un polinomio $P(x)$ de grado 3 ó 4, a la curva que define la ecuación $y^2 = P(x)$ es conocida como una curva elíptica, o técnicamente una curva algebraica de género 1; a la integral $g(x) = \int_0^x \frac{d\tau}{\sqrt{P(\tau)}}$ se le conoce como integral elíptica asociada a la curva $y^2 = P(x)$ y a la función $g^{-1}(x)$ como la función elíptica asociada a la curva.

Existe una teoría general para asociación de una ley de grupo formal a una curva elíptica dada; lo que nosotros hicimos arriba fue entender el caso particular $y^2 = 1 - 2\delta x^2 + \varepsilon x^4 = R(x)$ conocida como la cuártica de Jacobi. (Vea el libro de Silverman [Si] en la bibliografía, especialmente el Capítulo IV).

Aclaremos que en toda la discusión de esta sección hemos considerado funciones a valores reales definidas sobre \mathbb{R} , pero para evitar posibles problemas técnicos podemos pensarlas definidas y con valores en \mathbb{C} , los números complejos.

3. Ley de grupo formal y topología algebraica.

Sea $E^*()$ una teoría de cohomología multiplicativa con anillo espectro E y coeficientes $\pi_*(E)$ y $CP^\infty = \lim_n CP^n$ el espacio proyectivo complejo infinito.

Definición. La teoría de cohomología $E^*()$ es complejo orientable si $E^*(CP^\infty) = \pi_*(E)[[x]]$ un anillo de series formales sobre el anillo graduado $\pi_*(E)$ con x una indeterminada de dimensión -2 .

Ejemplos.

- (1) Si $E^*() = H^*(; \mathbb{Z})$, entonces tenemos la cohomología ordinaria $H^*(CP^\infty; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x] \subset \mathbb{Z}[[x]]$.
- (2) Si $E^*() = K^*()$ la K -teoría compleja, entonces $K^*(CP^\infty) = \mathbb{Z}[[x]]$ donde $x = \xi - 1$ y ξ es el haz de Hopf canónico sobre CP^∞ .
- (3) Si $E^*() = MU^*()$ es el cobordismo complejo, entonces tendremos $E^*(CP^\infty) = \pi_*(MU)[[x]]$.
- (4) $E^*() = KO^*()$ la K -teoría real no es complejo orientable. (Ver [Sw, Capítulos 17 y 18] en la bibliografía).

Como $H^*(CP^\infty; \mathbb{Z})$ es libre de torsión entonces

$$E^*(CP^\infty \times CP^\infty) = E^*(CP^\infty) \bigotimes_{\pi_*(E)} E^*(CP^\infty) = \pi_*(E)[[x_1, x_2]].$$

Si $\xi \otimes \eta$ denota el producto tensorial de haces lineales sobre $CP^\infty \times CP^\infty$, entonces existe $\mu : CP^\infty \times CP^\infty \rightarrow CP^\infty$, el mapeo clasificante, el cual induce una multiplicación salvo homotopía en CP^∞ . Alternativamente, μ puede ser definida como la multiplicación de lazos en

$$CP^\infty = K(\mathbb{Z}, 2) = \Omega K(\mathbb{Z}; 3)$$

Suponiendo que $E^*()$ es complejo-orientable, tendremos que

$$\mu^* : E^*(CP^\infty) \rightarrow E^*(CP^\infty \times CP^\infty)$$

define un homorfismo de anillos de series formales

$$\mu^* : \pi_*(E)[[x]] \rightarrow \pi_*(E)[[x_1, x_2]].$$

Luego $\mu^*(x) = F_E(x_1, x_2)$ es la ley de grupo formal asociada a $E^*()$.

Ejemplos.

- (a) Si $E^*() = H^*(; \mathbb{Z})$, entonces no es difícil ver que $F_{H\mathbb{Z}}(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ vea ejemplo (a) de la Sección 1.
- (b) Si $E^*() = K^*()$ entonces $K^*(CP^\infty \times CP^\infty) = \mathbb{Z}[[x_1, x_2]]$, donde $x_1 = \xi - 1$ y $x_2 = \eta - 1$, denotando ξ y η dos copias del haz canónico de líneas de Hopf, entonces

$$F_K(x_1, x_2) = (x_1 + 1)(x_2 + 1) - 1 = x_1 + x_2 + x_1x_2$$

Vea ejemplo (b) de la Sección 1.

El teorema fundamental sobre la relación entre teorías de cohomologías complejo orientables y leyes de grupo formal es:

Teorema de Quillen. *El anillo de Lazard L es isomorfo al anillo de cobordismo complejo $\pi_*(MU)$ y la ley universal de grupo formal sobre L es $F_u(x_1, x_2) = F_{MU}(x_1, x_2)$, la ley de grupo formal asociada a $MU^*()$.*

Para una demostración de este resultado, vea el libro de J. F. Adams [Ad] en la bibliografía. En nuestra interpretación del teorema de Lazard en la Sección 1 habíamos señalado que L y $F_u(x, y)$ como objetos universales en cierto contexto i.e., estos “dominaban” a toda pareja $M, F(x, y)$.

De aquí que el teorema de Quillen nos dice que todas las teorías de cohomología complejo orientables están dominados por $MU^*(\)$ y consecuentemente por "encima" de $MU^*(\)$ no hay teorías complejo orientables; tratando de ser más precisos, consideremos el diagrama

$$\pi^*(\) \rightarrow \dots \rightarrow MU^*(\) \rightarrow \dots K^*(\) \rightarrow H^*(\ ; \mathbb{Z}),$$

donde $\pi^*(\)$ denota la cohomotopía estable y las flechas la factorización del mapeo ("edge") arista en la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch, entonces las teorías de cohomología a la derecha de $MU^*(\)$ son complejo orientables y a la izquierda de $MU^*(\)$ no admiten el formalismo de las leyes de grupo formal.

Esto quizá señale al lector lo inaccesible que es el calcular la cohomotopía de cualquier espacio o en otras palabras cuanto más a la izquierda estemos en el diagrama más difícil es el calcular pero más información se obtiene y cuanto más a la derecha es menos difícil calcular pero menor es la información que se obtiene. (Para esta sección recomendamos la lectura de [Ad, Sección 2]).

4. Cohomologías elípticas

De acuerdo con la Sección 3 toda teoría de cohomología complejo orientable tiene una ley de grupo formal asociada, bien nos pudieramos preguntar: ¿Dada una ley de grupo formal sobre ciertos coeficientes apropiados existe una teoría de cohomología complejo orientable con esos coeficientes y con dicha ley de grupo formal asociada?

No se conoce una respuesta completa a esta pregunta, pero para casos particulares se puede obtener una respuesta afirmativa; notablemente se tiene.

Teorema (Landweber-Stong, 1985). Para $F_{E11}(x, y) = \frac{x\sqrt{R(y)+y}\sqrt{R(x)}}{1-xx^2y^2}$, la ley de grupo formal asociada a la cuártica de Jacobi $y^2 = R(x)$ en la Sección 2, existe una teoría de cohomología complejo orientable que denotamos por $E11^*(\)$, llamada la cohomología elíptica. (Vea los artículos de Landweber en [La].

5. El logaritmo de una ley de grupo formal

Poco dijimos acerca de cohomologías elípticas en la Sección 4 más allá de su definición. Para eso necesitamos más herramientas teóricas.

Definición. Sea $F(x, y)$ una ley de grupo formal sobre M un anillo (como arriba) la diferencial formal asociada a $F(x, y)$ es

$$W(T) = \left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}(0, T) \right)^{-1} dt \in M[[T]]dt.$$

Ejemplos.

- (a) $F(x, y) = x + y$ entonces $\frac{\partial F}{\partial x} = 1$, así $W(T) = dt$.
- (b) Si $F(x, y) = x + y + xy$ entonces $\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + y$ $W(T) = \frac{dt}{1+T}$.
- (c) $F(x, y) = F_{E11}(x, y) = \frac{xR(y)+yR(x)}{1-\varepsilon x^2 y^2}$ entonces $\frac{\partial F}{\partial x} = \sqrt{R(y)} + G(x, y)$ donde $G(x, y)$ es cierta función que depende de xy (verifíquelo!). así es que $W_{E11}(T) = R(T)^{-\frac{1}{2}} dT$.

La forma diferencial $W(T)$ es de particular importancia, dado que deja invariante a $F(x, y)$ esto es, $W(F(T, S)) = W(T)$, y cumple también que $W(0) = dT$. Además, $W(T)$ es la única con las dos propiedades descritas. (Vea [Si, Capítulo IV, Sección 4, páginas 119 y 120]).

Definición. El logaritmo formal de $F(x, y)$ es:

$$\log_F(T) = \int W(T)dt \in M \otimes \mathbb{Q}[[T]].$$

La exponencial formal de $F(x, y)$ es la serie de potencias inversa a $\log_F(T)$ y se denota $\exp_F(T)$, es decir,

$$\log_F(\exp_F(T)) = \exp_F(\log_F(T)) = T.$$

Ejemplos.

- (a) Si $F(x, y) = x + y$, entonces $\log_F(T) = T = \exp(T)$.
- (b) Si $F(x, y) = x + y + xy$, $\log_F(T) = \int (1 + T)^{-1} dT = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} T^n}{n}$, y luego $\exp(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^n}{n!}$. En términos de la notación del cálculo, $\log_F(T) = \log(1 + T)$ y $\exp_F(T) = e^T - 1$.
- (c) Para $F_{E11}(x, y)$, tenemos

$$\log_{E11}(T) = \int W_{E11}(T) = \int R(T)^{-\frac{1}{2}} dT = \int \frac{dT}{\sqrt{R(T)}} = g(t).$$

Esta última es la integral elíptica estudiada en la Sección 2 y $\exp(T) = g^{-1}(T)$ la función seno generalizada. Ahora bien, notemos que $(1 - 2zT + T^2)^{-1} = \sum_{n \geq 0} P_n(z)T^n$ es la función generadora de los "polinomios de Legendre" $P_n(z)$, los cuales están dados por la fórmula

$$P_0(z) = 1, \quad P_n(z) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{(2n - 2r)!}{2^{n-r} r! (n - r)! (n - 2r)!} z^{n-2r}$$

donde $m = \frac{n}{2}$ or $m = \frac{n-1}{2}$ dependiendo de que m sea un número entero. Haciendo una sustitución adecuada, podemos ver que

$$R(T)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n>0} P_n(\delta, \varepsilon) T^{2n} \quad \text{con } P_n(\delta, \varepsilon) = P_n(\delta/\varepsilon) \varepsilon^{n/2}$$

y $P_n(z, 0) = P_n(z)$, luego entonces

$$\log_{E11}(T) = \sum_{n>0} \frac{P_n(\delta, \varepsilon)}{2n+1} T^{2n+1}.$$

Una propiedad importante de las series formales $\log(T)$ y $\exp(T)$ en $M \otimes \mathbb{Q}[[T]]$ es que podemos recuperar $F(x, y)$ racionalizando los coeficientes. Simplemente observamos que gracias a la propiedad de invariancia, $W(F(T, S)) = W(T)$, así es que integrando ambos lados con respecto a T tenemos que

$$\log_F F(T, S) = \log(T) + f(S)$$

donde $f(S)$ es una constante de integración $f(S) \in M \otimes \mathbb{Q}[[S]]$. Haciendo $T = 0$ y recordando que $w(0) = dT$ vemos que,

$$f(S) = \log_F(S).$$

De esta manera obtenemos la importante fórmula

$$F(T, S) = \exp_F(\log(T) + \log(S)) \quad \text{en } M \otimes \mathbb{Q}[[T, S]].$$

Así en nuestro ejemplo $F_{E11}(x, y) = g^{-1}(g(x) + g(y))$, que es la fórmula de Euler (Sección 2).

A manera de conclusión podemos resumir lo anterior en la frase siguiente:

Racionalmente el logaritmo define a la ley de grupo formal.

Volviendo a la expresión de $\log_{E11}(T)$ en términos de los polinomios de Legendre podemos ver que los coeficientes de $F_{E11}(x, y)$ y consecuentemente los de la cohomología elíptica son los de $P_n(\delta/\varepsilon) \varepsilon^{n/2}$, así obtenemos:

Teorema (Landweber). *Los coeficientes de $E11^*()$ son los de $P_n(\delta/\varepsilon) \varepsilon^{n/2}$, es decir, $E11^*(pt) = \mathbb{Z}[1/2, \varepsilon, \delta]$. (Vea [La]).*

.Una cuestión importante que deseamos resaltar es que $\mathbb{Z}[1/2, \varepsilon, \delta]$ es un anillo de "formas modulares" y es exactamente el generado por los

mapeos $\tau \rightarrow \tau + 2$ y $\tau \rightarrow -\tau^{-1}$, donde $\tau \in H$ (=el semiplano superior de \mathbb{C}); el grupo generado por estos mapeos es subgrupo del que es generado por $\tau \rightarrow \tau + 1$ y $\tau \rightarrow \tau^{-1}$, que se conoce como el grupo modular $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm I\}$. (Vea el libro de J. P. Serre [Ser] parte segunda).

Esto nos hace ver que la teoría de formas modulares y cohomologías elípticas están estrechamente unidas, y podríamos decir que esta relación entre ellas nos permite "vaciar" una parte de la teoría de los números (las curvas elípticas y las formas modulares) en la topología algebraica.

6. Géneros elípticos

Definimos Ω_*^u como el anillo de clases de cobordismo de variedades complejas (casi estables). Por un teorema de Milnor y Thom (vea [St, página 41]), $\Omega_*^u = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n, \dots]$ es un álgebra de polinomios en las x_i 's, donde $\deg x_i = -2i$ y x_i puede ser representada por una variedad proyectiva compleja algebraica. En general no es posible hacer una selección canónica de las x_i 's, pero racionalmente tenemos que

$$\Omega_*^u \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[[\mathbb{C}P^1], [\mathbb{C}P^2], \dots, [\mathbb{C}P^n], \dots]$$

donde $[\mathbb{C}P^n]$ es la clase de cobordismo del n -ésimo espacio proyectivo complejo en \mathbb{C}^{n+1} . Aunque individualmente cada $[\mathbb{C}P^n] \in \Omega_*^u$, éstos no generan a Ω_*^u porque por ejemplo el generador de $\Omega_{-4}^u \otimes \mathbb{Q}$ es $(\frac{3}{2}([\mathbb{C}P^2]) + [\mathbb{C}P^1]^2)$.

Definición. Un género es un homomorfismo de anillos

$$\varphi: \Omega_*^u \rightarrow \mathbb{Q} \quad \text{con } \varphi(1) = 1 \quad 1 = [\mathbb{C}P^0] \in \Omega_*^u.$$

Por lo dicho anteriormente φ se puede determinar racionalmente por su acción sobre las $[\mathbb{C}P^n]$'s.

Definición. El logaritmo del género φ es una serie de potencias

$$\log_{\varphi}(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varphi([\mathbb{C}P^n])}{n+1} t^{n+1} = \int \sum_{n \geq 0} \varphi([\mathbb{C}P^n]) t^n dT \quad \text{en } \mathbb{Q}[[t]].$$

Ejemplos.

(a) El género de Todd, que se define como

$$\varphi = Td: \Omega_*^u \rightarrow \mathbb{Z}, \quad Td([\mathbb{C}P^n]) = 1 \quad \text{para toda } n > 0$$

es claramente un género, y $\log_{Td}(\tau) = \sum_{n > 0} \frac{\tau^{n+1}}{n+1} = -\log(1 - \tau)$, donde el último "log" denota el logaritmo habitual.

(b) *La signatura.* Sea M una variedad compleja con $[M] \in \Omega_*^u$.

Si $\dim M = 4k$, entonces $H_{4k}(M; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ está generado por μ_{4k} , la clase fundamental de M . Como $H^{2k}(M; \mathbb{Q})$ es un grupo libre con un número finito de generadores, digamos a_1, \dots, a_s , entonces el producto "cup" de a_i y a_j , $a_i \cup a_j \in H^{4k}(M; \mathbb{Q})$; así tenemos $\alpha_{ij} = \langle a_i \cup a_j, \mu_{4k} \rangle \in \mathbb{Q}$ y la matriz (α_{ij}) resulta ser simétrica de orden $s \times s$ con coeficientes en \mathbb{Q} .

Definición. La signatura de M "en" Ω_*^u esta dada por

$$\sigma(M) = \begin{cases} 0 & \text{si } \dim M \equiv 2 \pmod{4} \\ \text{la signatura de } (\alpha_{ij}) & \text{si } \dim M \equiv 0 \pmod{4}. \end{cases}$$

Recordamos que si $[M] \in \Omega_*^u$ entonces la dimensión M es par y que la signatura de una matriz (x_{ij}) cuadrada es la diferencia entre el número de eigen-valores positivos y el de eigen-valores negativos.

Para una demostración de que $\sigma : \Omega_*^u \rightarrow \mathbb{Q}$ es un género, vea [Mi-St, Capítulo 17]. Para el estudio de variedades orientables de $\dim \equiv 0 \pmod{4}$ es un invariante fundamental para la clasificación de variedades de dimensión 4 vea por ejemplo el libro de P. S. Freed and K. K. Uhlenbeck [F-U].

Como $H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Q}) = \frac{\mathbb{Q}[x]}{x^{n+1}}$ con $\dim x = 2$, obtenemos que $H(\mathbb{C}P^{2k}, \mathbb{Q})$ tiene un solo generador $a_k = x^k$ en dimensión $2k$, así $\alpha_{k,k} = \langle x^{2k}, \mu_{2k} \rangle = 1$, de donde $\sigma(\mathbb{C}P^{2k}) = 1$ para $k = 0, 1, 2, \dots$ (Vea [St, páginas 219-220]). Por lo tanto,

$$\log_\sigma(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} = \int \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} d\tau = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2}.$$

Definición. Un género $\varphi : \Omega_*^u \rightarrow \mathbb{Q}$ es *elíptico* si

$$\log_\varphi(x) \equiv \int_0^x (1 - 2\delta\tau^2 + \varepsilon\tau^4)^{-1/2} d\tau$$

esto es si el logaritmo de φ es el logaritmo de alguna cohomología elíptica. En nuestros ejemplos Todd no es elíptico y la signatura es un género elíptico (hagamos la sustitución $\varepsilon = 0$ y $\delta = 1/2$ entonces $(1 - 2\delta\tau^2 + \varepsilon\tau^4)^{-1/2} = \frac{1}{1-\tau^2}$).

Una de las propiedades importantes de la signatura es que es fuertemente multiplicativa, es decir, que si $F \rightarrow E \rightarrow B$ es un fibrado de variedades en Ω_*^u entonces $\sigma(E) = \sigma(F)\sigma(B)$, (vea [C.H.S.]).

Notablemente Ochanine y Taubes (vea [Och] y [Tau]) demostraron que esta propiedad caracteriza a los géneros elípticos.

Teorema. $\varphi : \Omega_*^n \rightarrow \mathbb{Q}$ es un género elíptico si y sólo si es fuertemente multiplicativo.

Ahora bien, dado que $\log_{E11}(T)$ y \log_φ se pueden calcular vía polinomios de Legendre, podemos derivar la fórmula

$$\varphi(CP^{2n}) = P_n(\delta, \varepsilon) = P_n(\delta/\varepsilon)\varepsilon^{n/2}$$

y (con un poco de suerte) calcular el género elíptico de cualquier variedad. Por otro lado, podemos ver que, a pesar de su importancia, la signatura es un caso “muy particular” de género elíptico. Por particular queremos decir que $\log_\sigma(x) = \int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \tanh^{-1}(x)$ y que $\tanh(x)$ es monoperiódica como función elíptica (recordemos que una función elíptica es mono ó doble periódica si $\Delta = \varepsilon(\delta^2 - \varepsilon)^2$, el discriminante, es igual o distinto de cero respectivamente), puesto que en este caso $\varepsilon = 0$, es decir $\Delta = 0$. Así es que todos los géneros con período doble están por descubrirse y usarse.

Ahora ya nos podemos preguntar sobre el lugar que ocupan las teorías de cohomologías elípticas en el diagrama de teorías de cohomologías en la Sección 3: por el teorema de Lazard-Quillen, $E11^*()$ se encuentra a la derecha de $MU^*()$; por otro lado obviamente $MU^*()$ no es elíptica y como el logaritmo de la K -teoría es $\log(1 + T)$, que no es una función elíptica, concluimos que

$$\pi_*^*() \rightarrow \dots \rightarrow MU^*() \rightarrow \dots \rightarrow E11^*() \rightarrow K^*() \rightarrow H^*(; \mathbb{Z}),$$

es decir, las teorías de cohomologías elípticas son “menos” que el cobordismo y “más” que la K -teoría.

7. Géneros elípticos y la teoría del Índice de Atiyah-Singer

Hirzebruch (en [Hi]) proporciona un método para construir géneros, a saber: Tomemos $f(x) = \sum_{i=0}^\infty a_i x^i$ una serie formal sobre \mathbb{Q} con $a_0 = 1$. Si x_1, x_2, \dots, x_n denotan n -indeterminadas, entonces el producto $f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \dots \cdot f(x_n)$ es una serie de potencias formal, la cual es simétrica en las variables x_1, \dots, x_n por lo tanto $f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \dots \cdot f(x_n) = \sum_{k=0}^\infty P_f^k(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ donde $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ son los polinomios simétricos elementales en x_1, \dots, x_n y P_f^k es un polinomio (que depende de $f(x)$) homogéneo de peso k .

Si ξ es un haz vectorial de rango n sobre una variedad M , entonces $P_f^k(c_1(M), \dots, c_n(M))$ es una clase característica definida en $H^{2k}(M; \mathbb{Q})$, donde $c_i(M)$ es la i -ésima clase característica de Chern.

Si $\mu_M \in H_{2n}(M; \mathbb{Q})$ denota la clase fundamental de M entonces la evaluación $\langle \mathbb{Q}_f^k(C_1(H), \dots, C_n(M)), \mu_M \rangle \in \mathbb{Q}$ determina un homomorfismo de anillos de Ω_*^z en \mathbb{Q} , el cual es invariante bajo cobordismo (recordemos que los números característicos detectan clases de cobordismo), y dicho homomorfismo es el género asociado a $f(x) = 1 + \sum_{i=1}^n a_i x^i$.

A manera de ejemplo: el género de Todd corresponde a $f(x) = \frac{x}{1-e^{-x}}$ (para una aplicación de este tipo de construcciones en topología algebraica vea [Mo]); la signatura corresponde $\frac{x}{\tanh x}$ etc.

Hacemos especial mención del género que corresponde a la serie

$$\frac{x/2}{\operatorname{sen} hx/2} = f(x)$$

este se le conoce como el \hat{A} -género y es de particular importancia para la teoría del Índice del operador de Dirac. No es difícil ver que el \hat{A} -género es elíptico, y su logaritmo corresponde a la sustitución $\varepsilon = 0$ $\delta = -\frac{1}{8}$; esto es, $\log_{\hat{A}}(x) = \int_0^x (1 + \frac{1}{4}t^2)^{-1} dt$.

Si el lector se preocupa por este cálculo, le recomendamos el siguiente ejercicio: Dé condiciones necesarias y suficientes sobre $f(x)$ de tal modo que el género definido sobre $f(x)$ sea elíptico.

Disgresión sobre el operador de Dirac.

Si M es una variedad Riemanniana de dimensión n orientable tal que las funciones de transición del haz tangente toman valores en el grupo $Spin(n)$, la doble cubierta de $SO(n)$, el grupo de rotaciones en \mathbb{R}^n , entonces decimos que M es una variedad $Spin(n)$, o equivalentemente que la segunda clase característica de Stiefel-Whitney de M se anula.

Como $Spin(n)$ tiene una representación fiel de dimensión 2ℓ si $n = 2^\ell$ entonces existe un haz vectorial v (cuya fibra es V) asociado del haz tangente. Llamamos a v el haz de Espinores de M . Puesto que v tiene una conexión Riemanniana conocida (digamos ∇), y siendo ∇_0 la conexión en M dada por la métrica Riemanniana, se puede definir el Hessiano de dos campos vectoriales X e Y sobre M como

$$h(X, Y)f = \{\nabla_X \nabla_Y - \nabla_{\nabla_0 X} Y\}f,$$

para f una sección del haz de Espinores.

El Laplaciano es el operador diferencial elíptico* dado por la traza del Hessiano

$$Lf = \sum_{i=1}^n h(e_i, e_i) f$$

cuando $\{e_1, \dots, e_n\}$ es un marco ortonormal.

Si $\Gamma(\xi)$ denota las secciones del haz vectorial ξ sobre M . Entonces el operador de Dirac es:

$$D : \Gamma(v) \rightarrow \Gamma(v)$$

definido como $\nabla \circ m$ cuando $\nabla : \Gamma(\) \rightarrow (T^* \otimes v)$ es la conexión Riemanniana habitual, T^* el dual del haz tangente y $m : \Gamma(T^* \otimes v) \rightarrow \Gamma(v)$ es la multiplicación de Clifford heredada de V . Fácilmente se puede ver que $D^2 = -L$, luego D es elíptico*.

Como las álgebras de Clifford C_n son $\mathbb{Z}/2$ graduadas, $C_n = C_n^+ \oplus C_n^-$ estas inducen una escisión en $V = V^+ \oplus V^-$ luego en $v = v^+ \oplus v^-$ y por definición

$$D : \Gamma(v^+) \rightarrow \Gamma(v^-).$$

Fin de la digresión (vea [Ku]).

Por definición el índice de un operador en derivadas parciales D elíptico* es:

$$\text{Indice}(D) = \dim_{\mathbb{C}}(\text{Núcleo de } D) - \dim_{\mathbb{C}}(\text{conúcleo de } D).$$

Estos números son finitos por ser D elíptico.

El teorema de Atiyah-Singer es reconocer el lado derecho de la siguiente igualdad en términos de K -teoría (en términos del carácter de Chern).

$$\text{Indice}(D) = \hat{A}(M),$$

donde D es el operador de Dirac.

8. Cohomologías Elípticas y la Teoría Cuántica de Campos

El índice del operador de Dirac se reduce al cálculo de cierto género elíptico el \hat{A} -género de la variedad y dicho operador está intimamente ligado a la K -teoría. Así surge la siguiente pregunta (E. Witten) ([W, página 526]). ¿Existe un operador análogo al de Dirac cuyo índice esté dado por géneros elípticos?

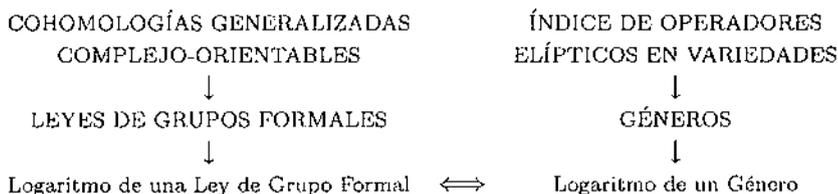
*Aquí la palabra elíptico es en el sentido de las ecuaciones en derivadas parciales, no confundir con el usado en las secciones anteriores (vea el libro de Treves [Tr]).

A lo que el mismo Witten responde: El operador en cuestión es el que corresponde a "la supercarga del modelo sigma no lineal supersimétrico" en la Mecánica Cuántica (vea [G.S.W., Vol. 1, páginas 160-161]). Witten concluye en el artículo citado: "Las Cohomologías Elípticas están destinadas a iluminar la misteriosa generalización de la geometría (Riemanniana) ordinaria y la topología que representa la teoría de Cuerdas. Unas Teorías de Cohomología Elíptica propiamente desarrolladas servirán para a vertir alguna luz sobre lo que la teoría de cuerdas realmente significa".

Uno de los problemas centrales para dicha generalización es que el Análisis Matemático que hay detrás del lado izquierdo en la igualdad tipo Atiyah Singer no es un análisis matemático sobre una variedad M de dimensión finita (Análisis global "Clásico") sino que se tendría que hacer sobre "el grupo de lazos de una variedad", lo que resulta ser una variedad de dimensión infinita (vea [P-S]). Este análisis no está del todo desarrollado. (Vea el artículo de Segal [Se] en las referencias sobre este punto).

Conclusión.

Podemos resumir nuestra discusión en el siguiente diagrama:



Si nos restringimos al caso elíptico podemos cerrar el diagrama en su parte inferior (en doble flecha) y transitar de una columna a la otra.

Bibliografía

- [Ad] J. F. ADAMS, "Stable homotopy and generalized homology," University of Chicago Press, 1974.
- [A-S] M. ATIYAH AND I. M. SINGER, The index of elliptic operators III, *Annals of Math.* **87** (1968), 546-604.
- [C-H-S] S. CHERN, F. HIRZEBRUCH AND J. P. SERRE, On the index of a fibered manifold, *Proc. Amer. Math. Soc.* **8** (1957).
- [F-U] D. S. FREED AND K. K. UHLENBECK, "Instantons and four-manifolds," M.S.R.I. Publications **1**, Springer Verlag, 1984.

- [G-S-W] M. B. GREEN, J. H. SCHWARZ AND E. WITTEN, "*Superstring Theory*," Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 1987.
- [H] M. HAZEWINKEL, "*Formal groups and applications*," Academic Press, 1978.
- [Ha] H. HANCOCK, "*Elliptic integrals*," Dover Publications, 1958.
- [Hi] F. HIRZEBRUCH, "*Topological methods in Algebraic Geometry*," Springer-Verlag, 1966.
- [Ku] R. S. KULKARNI, "*Index Theorems of Atiyah-Bott-Pattodi and curvature invariants*," Seminare de Mathématiques Superieures, Les presses de L'Université de Montreal, 1975.
- [La] P. S. LANDWEBER, "*Elliptic curves and modular forms in Algebraic Topology*," Proceedings, Princeton, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag **1326**, 1986.
- [Mi-St] J. MILNOR AND J. STASHEF, "*Characteristic classes*," Annals of Math. Studies Number **76**, Princeton University Press, 1974.
- [Ma] A. I. MARKUSEVICH, "*Curvas y funciones maravillosas*," Colección de Matemáticas Populares, Ed. MIR.
- [Mo] G. MORENO, The Hurewicz homomorphism and the Riemann-Roch-Hirzebruch theorem, Preprint CINVESTAV **53** (1989).
- [Och] S. OCHANINE, Sur les genres multiplicatifs définis par des integrales elliptiques, *Topology* **26** (1987), 143-151.
- [P-S] A. PRESSLEY, G. SEGAL, "*Loop groups*," Oxford University Press, 1988.
- [Sc] G. SEGAL, "*Elliptic cohomology*," Séminaire Bourbaki 1987-1988 **695**, Février, 1988.
- [Ser] J. P. SERRE, "*Cours d'arithmétique*," Presses Universitaires de France, Paris, 1970.
- [Si] I. M. SINGER, Differential geometry, fiber bundles and physical theories, *Physics Today March* (1982), 41-42.
- [Sil] J. H. SILVERMAN, "*The arithmetic of elliptic curves*," Graduate Texts in Math. **106**, Springer-Verlag, 1986.
- [St] R. STONG, "*Notes on cobordism theory*," Princeton University Press, 1968.
- [Sw] R. M. SWITZER, "*Algebraic Topology: Homotopy and Homology*," Springer-Verlag, 1975.
- [Tau] C. H. TAUBES, S^1 actions and elliptic genera, *Comm. in Math. Physics* (1988).

- [Tr] F. TREVES, "*Basic linear partial differential equations*," Academic Press, 1975.
- [Wi] E. WITTEN, Elliptic genera and quantum field theory, *Comm. in Math. Physics* **109** (1981), 525-536.

Departamento de Matemáticas
CINVESTAV, Apdo. Postal 14-740
07000 MÉXICO D.F.

Rebut el 17 de Juny de 1991