Publ. Mat. **47** (2003), 441–450

VOLUMES TRANSVERSES AUX FEUILLETAGES DÉFINISSABLES DANS DES STRUCTURES O-MINIMALES

F. Chazal and J.-M. Lion

Abstract

Let $\mathcal{F}_\lambda$ be a family of codimension p foliations defined on a family M_λ of manifolds and let X_λ be a family of compact subsets of M_λ. Suppose that $\mathcal{F}_\lambda$, M_λ and X_λ are definable in an o-minimal structure and that all leaves of $\mathcal{F}_\lambda$ are closed. Given a definable family Ω_λ of differential p-forms satisfaying $i_Z\Omega_\lambda = 0$ for any vector field Z tangent to $\mathcal{F}_\lambda$, we prove that there exists a constant $A > 0$ such that the integral of $|\Omega_\lambda|$ on any transversal of $\mathcal{F}_\lambda$ intersecting each leaf in at most one point is bounded by A. We apply this result to prove that p-volumes of transverse sections of $\mathcal{F}_\lambda$ are uniformly bounded.

1. Introduction

L'objet de ce travail est d'étudier le volume des sections transverses aux feuilletages définissables dans une structure o-minimale et dont toutes les feuilles sont fermées. Nous généralisons des résultats de D'Acunto et Kurdyka relatifs aux fonctions [**DK**] et de Kurdyka relatifs aux applications [**K1**], [**K2**]. L'exemple suivant illustre le type de résultats que nous obtenons. Considérons une 1-forme ω de $\mathbf{R}^n$ à coefficients semi-algébriques et continuement dérivables. Supposons que ω est intégrable ($\omega \wedge d\omega = 0$). Soit X un ouvert semi-algébrique borné de $\mathbf{R}^n$ sur lequel ω est non singulière. L'équation de Pfaff $\omega = 0$ définit un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension un sur X. Supposons que les feuilles de $\mathcal{F}$ sont fermées. Nous montrons l'existence d'une courbe semi-algébrique γ contenue dans $\overline{X}$ telle que si C est une courbe de X vérifiant

$$\int_C |\omega| > \int_\gamma |\omega|$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 53C12, 49Q15, 03C64, 32B20.

Mots-clés. Feuilletages réels, structures o-minimales, intégration de formes différentielles.

Partiellement financé par RAAG HPRN-CT-00271.

alors C rencontre une feuille de $\mathcal{F}$ en au moins deux points. En particulier, la longueur de toute courbe orthogonale (pour la métrique euclidienne) à $\mathcal{F}$ coupant au plus une fois chaque feuille est majorée par la longueur de γ. Nous montrons que ce résultat reste vrai pour un feuilletage de codimension quelconque définissable dans une structure o-minimale. Il reste également vrai si dans l'inégalité précédente ω est remplacée par une forme Ω annulée par tout champ de vecteurs tangent à $\mathcal{F}$.

Définition. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension p d'une sous-variété M de classe C^2 de $\mathbf{R}^n$. On dit qu'une p-forme Ω sur M est annulée par tout champ tangent à $\mathcal{F}$ si $i_Z\Omega = 0$ pour tout champ de vecteurs Z tangent à $\mathcal{F}$.

Avant d'énoncer notre théorème, donnons brièvement la définition et les propriétés essentielles des structures o-minimales. Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à [**DrM**] ou [**Dr2**] par exemple. Une *structure o-minimale* $\mathcal{A}$ est une famille de sous-algèbres de Boole $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ qui contient les sous-ensembles semi-algébriques, qui est stable par produit et projection canonique et dont les éléments ont un nombre fini de composantes connexes. D'après un théorème de Tarski [**Ta**] la famille des semi-algébriques des espaces $\mathbf{R}^n$ est une structure o-minimale. Gabrièlov [**Ga**] montre que les sous-analytiques globaux des espaces $\mathbf{R}^n$ constituent une seconde structure o-minimale. Un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$ est dit $\mathcal{A}$-*définissable* (ou *définissable dans* $\mathcal{A}$) si c'est un élément de $\mathcal{A}_n$. Une fonction de graphe $\mathcal{A}$-définissable est dite $\mathcal{A}$-*définissable* (ou *définissable dans* $\mathcal{A}$). On définit de la même façon les applications et les formes $\mathcal{A}$-*définissables*: chaque fonction coordonnée de l'application ou chaque coefficient de la forme sont des fonctions $\mathcal{A}$-définissables.

Dans la suite $\mathcal{A}$ désigne une structure o-minimale fixée. Tout sous-ensemble $\mathcal{A}$-définissable C est $\mathcal{A}$-stratifiable (voir [**DrM**] ou [**Dr2**]). Sa dimension est donc bien définie. Ceci implique que si Ω est une p-forme $\mathcal{A}$-définissable, si C est de dimension au plus p et si C_0 est un sous-ensemble mesurable de C alors l'intégrale $\int_{C_0} |\Omega|$ est bien définie. Si X_λ est une famille de sous-ensembles $\mathcal{A}$-définissables de $\mathbf{R}^n$ qui dépendent de façon $\mathcal{A}$-définissable du paramètre λ alors il existe un entier qui majore le nombre de composantes connexes de chaque X_λ (voir [**DrM**] ou [**Dr2**]). Si de plus les X_λ sont de dimension au plus p et sont inclus dans un même compact alors il existe une constante qui majore le volume p-dimensionnel de chacun d'eux. Ceci résulte de la propriété de finitude uniforme précédente combinée à la formule de Cauchy-Crofton (voir [**Fe**] ou [**CY**]).

Soit M une sous-variété $\mathcal{A}$-définissable de classe C^2 de $\mathbf{R}^n$.

Définition. Un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension p sur M est dit $\mathcal{A}$-*définissable* s'il existe un recouvrement fini de M par des ouverts $\mathcal{A}$-définissables tels qu'en restriction à chacun d'eux $\mathcal{F}$ soit défini par un système de Pfaff $(\omega_1, \ldots, \omega_p)$ $\mathcal{A}$-définissable de classe C^1:

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \neq 0 \quad \text{et} \quad d\omega_i \wedge \left(\bigwedge_{j \neq i} \omega_j \right) = 0.$$

Depuis [**Dr1**], [**Kh**] et [**MR**] les feuilles de certains feuilletages $\mathcal{A}$-définissables de codimension 1 et transversalement orientés (appelés *feuilletages de Rolle*) ont été largement étudiées. La structure topologique de l'espace des feuilles est un arbre fini [**Ch**]. Ces feuilles engendrent une structure o-minimale ([**Sp**], voir aussi [**Wi**], [**LR**], [**KM**]). Le résultat que nous prouvons est relatif à la structure métrique de l'espace des feuilles des feuilletages $\mathcal{A}$-définissables de codimension quelconque et dont les feuilles sont fermées.

Théorème 1. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension p sur une sous-variété M de classe C^2 de $\mathbf{R}^n$, soit X un sous-ensemble compact de M et soit Ω une p-forme définie sur M, annulée par tout champ tangent à $\mathcal{F}$. On suppose que M, X, $\mathcal{F}$ et Ω sont $\mathcal{A}$-définissables et que les feuilles de $\mathcal{F}$ sont fermées. Il existe $\Gamma \subset X$ un sous-ensemble définissable de dimension p vérifiant la propriété suivante: si C est une sous-variété de dimension p contenue dans X telle que*

$$\int_C |\Omega| > \int_\Gamma |\Omega|$$

alors C rencontre une feuille de $\mathcal{F}$ en au moins deux points.

Théorème 2 (version à paramètres)**.** *Dans l'énoncé précédent si $M = M_\lambda$, $X = X_\lambda$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\lambda$ et $\Omega = \Omega_\lambda$ dépendent de façon $\mathcal{A}$-définissable d'un paramètre $\lambda \in \mathbf{R}^d$ alors $\Gamma = \Gamma_\lambda$ dépend de façon définissable de λ.*

Le Théorème 1 est un corollaire immédiat du Théorème 2. Nous ne prouverons donc que ce dernier. Notre preuve consiste à remarquer que Ω définit une p-forme sur le fibré normal $TX/T\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}$ et à établir une relation entre l'application d'holonomie de $\mathcal{F}$ au voisinage d'une feuille sans holonomie et l'intégrale de Ω sur une section transverse (formule (2) ci-dessous). Cette approche est différente de celle adoptée dans [**DK**], [**K1**], [**K2**] et nous permet d'obtenir un résultat ne faisant intervenir aucune hypothèse de nature métrique sur la variété M.

Ce travail doit beaucoup à des conversations avec D. D'Acunto, K. Kurdyka et R. Moussu que nous remercions.

2. Application aux volumes de sections transverses et théorème de D'Acunto-Kurdyka

Dans cette section nous montrons comment notre Théorème 2 permet de retrouver les résultats de [**DK**], [**K1**], [**K2**] qui généralisent un célèbre théorème de Łojasiewicz sur les longueurs des trajectoires de gradients analytiques [**Ło**] et plus généralement comment il permet de majorer les volumes des sections transverses à des familles $\mathcal{A}$-définissables de feuilletages $\mathcal{A}$-définissables.

Théorème ([**DK**], [**K1**], [**K2**]). *Soit $d \in \mathbf{N}$ et soit $K \in]0,1]$. Il existe une constante $A > 0$ vérifiant la propriété suivante. Soit $P\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ une application polynomiale de degré d et soit C une sous-variété de dimension p contenue dans la boule unité B de $\mathbf{R}^n$. Les niveaux de P définissent un feuilletage singulier $\mathcal{F}$ sur B. Supposons que C est transverse à $\mathcal{F}$ et que pour tout $x \in C$ la restriction à T_xC de la projection orthogonale de $\mathbf{R}^n$ (muni de la structure euclidienne usuelle) sur l'espace orthogonal à $T_x\mathcal{F}$ est de déterminant supérieur à K. Alors ou bien le volume p-dimensionnel de C est inférieur ou égal à A, ou bien C coupe deux fois une feuille de $\mathcal{F}$.*

Preuve: En appliquant le Théorème 2 à la famille à paramètre $(P,\varepsilon) = (P_1,\dots,P_p,\varepsilon) \in \mathbf{R}[X_1,\dots,X_n]^p \times \mathbf{R}^+$:

$$M_P = \mathbf{R}^n \setminus \{dP = 0\},$$

$$\Omega_P = \frac{dP_1 \wedge \cdots \wedge dP_p}{||dP_1 \wedge \cdots \wedge dP_p||}$$

et

$$X_{P,\varepsilon} = \{x \in B \mid d(x, \{dP = 0\}) \geq \varepsilon\},$$

nous obtenons une famille semi-algébrique de sous-ensembles semi-algébriques $\Gamma_{P,\varepsilon}$ de dimension au plus p contenus dans B. Soit C comme dans l'énoncé ci-dessus. Supposons que C coupe au plus une fois chaque niveau de f. D'après le Théorème 2 on a

$$\int_{\Gamma_{P,\varepsilon}} |\Omega_P| \geq \int_C |\Omega_P|.$$

Or il existe une constante A_0 qui majore uniformément les volumes p-dimensionnels de ces sous-ensembles et par construction de Ω_P, le volume p-dimensionnel de $\Gamma_{P,\varepsilon}$ majore l'intégrale $\int_{\Gamma_{P,\varepsilon}} |\Omega_P|$. De plus, puisque pour tout $x \in C$ la restriction à T_xC de la projection orthogonale de $\mathbf{R}^n$ sur l'espace orthogonal à $T_x\mathcal{F}$ est de déterminant supérieur à K, l'intégrale $\int_C |\Omega_P|$ est minorée par K fois le volume p-dimensionnel de C. Par conséquent le volume p-dimensionnel de C est majoré par $A = A_0/K$. □

Remarquons que le résultat précédent reste valable pour une famille $\mathcal{A}$-définissable d'applications $\mathcal{A}$-définissables.

Si dans l'énoncé du Théorème 2, on suppose de plus que la famille M_λ est munie d'une famille $\mathcal{A}$-définissable de métriques riemmaniennes $\mathcal{A}$-définissables, nous obtenons le corollaire suivant qui généralise aux feuilletages le résultat de [**DK**], [**K1**], [**K2**] énoncé précédemment.

Corollaire. *Soit $K \in]0;1[$, soit $\mathcal{F}_\lambda$ une famille de feuilletages de codimension p définie sur une famille M_λ de sous-variétés de classe C^2 de $\mathbf{R}^n$ munies d'une métrique riemmanienne g_λ et soit X_λ une famille de sous-ensembles compacts de M_λ. On suppose que M_λ, X_λ, $\mathcal{F}_\lambda$ et g_λ sont $\mathcal{A}$-définissables et dépendent de manière $\mathcal{A}$-définissable du paramètre λ et que les feuilles de $\mathcal{F}_\lambda$ sont fermées. Il existe une constante $A > 0$ vérifiant la propriété suivante. Soit C_λ une sous-variété de X_λ de dimension p transverse à $\mathcal{F}$ telle que pour tout $x \in C_\lambda$ la restriction à T_xC_λ de la projection orthogonale de T_xM_λ sur l'espace orthogonal à $T_x\mathcal{F}_\lambda$ est de déterminant supérieur à K. Alors, ou bien le volume p-dimensionnel de C_λ est inférieur ou égal à A, ou bien C_λ coupe deux fois une feuille de $\mathcal{F}_\lambda$.*

Preuve: C'est une adaptation immédiate de la preuve précédente en prenant pour $\Omega = \Omega_\lambda$ la p-forme volume induite par la métrique de M_λ sur le fibré orthogonal à $T\mathcal{F}_\lambda$. □

Remarquons enfin que dans le cas de feuilletages algébriques la constante A du corollaire ne dépend que du degré des polynômes définissant $\mathcal{F}_\lambda$: *si $\mathcal{F}_\lambda$ est une famille de feuilletages de codimension p de $\mathbf{R}^n$ définie par un système de Pfaff dont les coefficients sont des polynômes de degré au plus $d \in \mathbf{N}$ et si les sous-ensembles M_λ sont contenus dans une boule de rayon $r > 0$ fixé, alors la constante A peut être choisie de la forme $A = rA(n,d)$ où $A(n,d)$ est une constante ne dépendant que de n et de d.* En effet, dans ce cas les sous-ensembles Γ_λ sont semi-algébriques (voir la définition de Γ_λ dans la section suivante) et leur degré ne dépend que du degré du système de Pfaff définissant $\mathcal{F}_\lambda$.

3. Démonstration du Théorème 2

D'après les résultats sur les stratifications adaptées à un système de Pfaff [**MR**] (voir aussi [**LR**], [**Sp**] et [**LS**]) il existe une famille finie X^i_λ, $i \in \{1, \ldots, r\}$, de sous-variétés de classe C^2 $\mathcal{A}$-définissables, un entier $s \leq r$ et une famille finie de feuilletages $\mathcal{A}$-définissables $\mathcal{F}^i_\lambda$ tels que pour tout λ:

1. $X^1_\lambda \cup \cdots \cup X^r_\lambda$ est une partition finie de X_λ.
2. $\mathcal{F}^i_\lambda$ est un feuilletage sur X^i_λ de codimension au plus p et il est de codimension p si et seulement si $i \leq s$.
3. si V est une feuille de $\mathcal{F}_\lambda$ alors $V \cap X^i_\lambda$ est une union de feuilles de $\mathcal{F}^i_\lambda$.

Soit $i \in \{1, \ldots, r\}$ et $\lambda \in \mathbf{R}^d$. Si $i > s$ on pose $Y^i_\lambda = \emptyset$. Si $i \leq s$ on note Y^i_λ le sous-ensemble de X^i_λ suivant: un point y de X^i_λ est dans Y^i_λ si et seulement si pour tout champ de vecteurs Z sur X^i_λ tangent à $\mathcal{F}^i_\lambda$ la dérivée de Lie $L_Z(\Omega^i_\lambda)$ de la p-forme Ω^i_λ induite par Ω_λ sur X^i_λ est nulle en y. Montrons que Y^i_λ est un ensemble $\mathcal{A}$-définissable. Puisque Ω_λ est annulée par tout champ tangent à $\mathcal{F}_\lambda$, la forme Ω^i_λ est annulée par tout champ tangent à $\mathcal{F}^i_\lambda$ et $L_Z(\Omega^i_\lambda)(y)$ ne dépend que de la valeur de Z en y. En effet, si Z_1 et Z_2 sont deux champs de vecteurs tangents à $\mathcal{F}^i_\lambda$ et si g est une fonction C^1 alors

$$L_{gZ_1+Z_2}(\Omega^i_\lambda) = gL_{Z_1}(\Omega^i_\lambda) + L_{Z_2}(\Omega^i_\lambda).$$

Or, d'après [**LS**], l'application Π^i_λ qui à $x \in X^i_\lambda$ associe la projection orthogonale sur le plan tangent $T_x(\mathcal{F}^i_\lambda)$ au point x de la feuille de $\mathcal{F}^i_\lambda$ passant par x est de classe C^2 et $\mathcal{A}$-définissable. Ainsi les champs de vecteurs $Z^i_{\lambda,k} = \Pi^i_\lambda(\dfrac{\partial}{\partial x_k})$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ sont de classe C^2, $\mathcal{A}$-définissables et engendrent en tout point $x \in X^i_\lambda$ le plan tangent $T_x(\mathcal{F}^i_\lambda)$. Par conséquent, $Y^i_\lambda = X^i_\lambda \cap (\cap_{k=1}^n \{L_{Z^i_{\lambda,k}}(\Omega^i_\lambda) = 0\})$. Il est $\mathcal{A}$-définissable.

D'après le lemme de section de Gabrièlov [**Ga**] adapté aux feuilletages analytiques par [**MR**] (voir aussi [**LR**]) et aux feuilletages $\mathcal{A}$-définissables par [**Sp**] (voir aussi [**LS**]), il existe une famille $\mathcal{A}$-définissable $\tilde{X}^i_\lambda \subset X^i_\lambda$, $i \in \{s+1, \ldots, t\}$, de sous-ensembles $\mathcal{A}$-définissables, tels que $\dim \tilde{X}^i_\lambda < p$ et tels que si V est une feuille de $\mathcal{F}^i_\lambda$ alors $V \cap \tilde{X}^i_\lambda$ est discret et rencontre toutes les composantes connexes de $V \cap X^i_\lambda$. Il existe aussi une famille $\mathcal{A}$-définissable $\Gamma^i_\lambda \subset Y^i_\lambda$, $i \in \{1, \ldots, s\}$, de sous-ensembles $\mathcal{A}$-définissables de dimension p, tels que si V est une feuille de $\mathcal{F}^i_\lambda$ alors $V \cap \Gamma^i_\lambda$ est discret et rencontre toutes les composantes connexes de $V \cap Y^i_\lambda$.

En utilisant encore les résultats de stratification adaptée à un feuilletage, on décompose les Γ^i_λ, $i \in \{1, \ldots, s\}$, de la façon suivante:

1. $\Gamma_\lambda^i = \Gamma_\lambda^{'i} \cup \Gamma_\lambda^{''i}$ avec $\Gamma_\lambda^{'i}$ sous-variété $\mathcal{A}$-définissable, de classe C^2, de dimension p, transverse à $\mathcal{F}_\lambda$ et $\Gamma_\lambda^{''i}$ sous-ensemble $\mathcal{A}$-définissable, de dimension strictement inférieure à p.
2. $\Gamma_\lambda = \Gamma_\lambda^{'1} \cup \cdots \cup \Gamma_\lambda^{'s}$ est une sous-variété de dimension p.

On pose $\tilde{X}_\lambda = (\cup_{i \leq s} \Gamma_\lambda^{''i}) \cup (\cup_{i>s} \tilde{X}_\lambda^i)$. C'est un sous-ensemble $\mathcal{A}$-définissable de dimension strictement inférieure à p. Nous allons montrer que l'ensemble Γ_λ décrit ci-dessus satisfait à la conclusion du Théorème 2.

Soit C une sous-variété de dimension p contenue dans X_λ qui coupe chaque feuille de $\mathcal{F}_\lambda$ en au plus un point. Nous allons montrer que $\int_C |\Omega_\lambda| \leq \int_{\Gamma_\lambda} |\Omega_\lambda|$.

La forme Ω_λ étant annulée par tout champ tangent à $\mathcal{F}_\lambda$, on a

$$\int_C |\Omega_\lambda| = \int_{C'} |\Omega_\lambda|$$

où C' est l'ensemble (ouvert dans C) des points où C est transverse à $\mathcal{F}_\lambda$. Nous pouvons donc supposer que C est transverse à $\mathcal{F}_\lambda$. Soit $C^{''}$ l'ensemble des points de C où Ω_λ est nulle. C'est un fermé de C et $\int_{C''} |\Omega_\lambda| = 0$. Nous pouvons donc supposer que Ω_λ ne s'annule en aucun point de C. Soit $C^{'''}$ l'ensemble mesurable des points de $c \in C$ tels que V, la feuille de $\mathcal{F}_\lambda$ passant par c, rencontre $\tilde{X}_\lambda$. Puisque $\dim \tilde{X}_\lambda < p$ et que C est de dimension p et transverse à $\mathcal{F}_\lambda$, l'ensemble $C^{'''}$ est de mesure p-dimensionnelle nulle et $\int_{C'''} |\Omega_\lambda| = 0$. Par construction des $\tilde{X}_\lambda^i$, un point c est dans $C^{'''}$ dès que la feuille V qui passe par ce point rencontre l'un des X_λ^i (et donc l'un des $\tilde{X}_\lambda^i$) si $i > s$. On pose $C_0 = C \setminus C^{'''}$. C'est un sous-ensemble mesurable de C et $\int_C |\Omega_\lambda| = \int_{C_0} |\Omega_\lambda|$. Il suffit donc de montrer $\int_{C_0} |\Omega_\lambda| \leq \int_{\Gamma_\lambda} |\Omega_\lambda|$.

Soit c un point de M, S_c une section transverse à $\mathcal{F}_\lambda$ en c coupant au plus une fois chaque feuille et soit x un point appartenant à la feuille V passant par c. On suppose $\Omega_\lambda(c) \neq 0$. La restriction de $\mathcal{F}_\lambda$ au saturé de S_c par $\mathcal{F}_\lambda$ est un feuilletage sans holonomie (voir [**CL**] par exemple). Si S est une section du feuilletage en x, la différentielle de l'application d'holonomie entre S_c et S induit un isomorphisme linéaire entre les fibres $(TX_\lambda/T\mathcal{F}_\lambda)_c$ et $(TX_\lambda/T\mathcal{F}_\lambda)_x$ du fibré normal à $\mathcal{F}_\lambda$. Cette application est indépendante du choix des sections S_c et S. D'autre part, Ω_λ qui est annulée par tout champ de vecteurs tangent à $\mathcal{F}_\lambda$ définit une p-forme linéaire sur le fibré normal $TX_\lambda/T\mathcal{F}_\lambda$. Soit $v = (v_1, \ldots, v_p)$ un p-uplet de vecteurs formant une base de $(TX_\lambda/T\mathcal{F}_\lambda)_c$ et soit w l'image de v par la différentielle de l'application d'holonomie entre S_c et S. Puisque $\Omega_\lambda(c) \neq 0$, on a $\Omega_\lambda(c) \cdot (v) \neq 0$. Nous définissons une application Θ_c

sur V par

$$\Theta_c(x) = \frac{\Omega_\lambda(x)\cdot(w)}{\Omega_\lambda(c)\cdot(v)}.$$

C'est une application indépendante du choix de v. De plus Θ_c est différentiable et si Z est un champ de vecteurs tangent à V, on a

$$Z(\Theta_c)(x) = \frac{L_Z\Omega_\lambda(x)\cdot(w)}{\Omega_\lambda(c)\cdot(v)}. \tag{1}$$

Si c' est un autre point de V tel que $\Omega_\lambda(c') \neq 0$, on a le cocycle multiplicatif $\Theta_{c'}(x) = \Theta_{c'}(c)\Theta_c(x)$. Soit $S_{c'}$ une section transverse de $\mathcal{F}_\lambda$ passant par c'. En restreignant éventuellement S_c et $S_{c'}$, il existe un difféomorphisme d'holonomie h entre S_c et $S_{c'}$. On a donc la formule *de changement de variable*

$$\int_{S_{c'}} |\Omega_\lambda| = \int_{S_c} |\Omega_\lambda(x)||\Theta_x(h(x))|. \tag{2}$$

On en déduit le lemme suivant qui est dans l'esprit de [**Go**, Théorème 1.5 et Proposition 1.6, p. 140].

Lemme. *Soit C_1 une sous-variété de dimension p contenue dans X_λ, transverse à $\mathcal{F}_\lambda$. Supposons que pour tout $x \in C_0$, il existe un point $x' \in C_1$ appartenant à la même feuille que x et telle que $|\Theta_x(x')| \geq 1$. Alors*

$$\int_{C_0} |\Omega_\lambda| \leq \int_{C_1} |\Omega_\lambda|.$$

De plus, si c est un point d'une strate X^i_λ de X_λ sur laquelle $\mathcal{F}^i_\lambda$ est de codimension p on définit de même une application Θ^i_c sur la feuille V^i de $\mathcal{F}^i_\lambda$ qui passe par c. Le fibré normal à $\mathcal{F}^i_\lambda$ coïncide avec la restriction à X^i_λ du fibré normal à $\mathcal{F}_\lambda$. L'application Θ^i_c est donc la restriction de Θ_c à V^i.

Nous pouvons enfin montrer que $\int_{C_0} |\Omega_\lambda| \leq \int_{\Gamma_\lambda} |\Omega_\lambda|$ et ainsi terminer la preuve du Théorème 2. Soit $c \in C_0$. La restriction de $|\Theta_c|$ au compact $V \cap X_\lambda$ atteint son maximum en un point m. Soit X^i_λ la strate de X_λ qui contient m. Puisque $c \in C_0$, alors $i \leq s$, $|\Omega_\lambda|$ est non nul en c et en m et $\mathcal{F}^i_\lambda$ est de codimension p. Le point m est aussi un maximum de $|\Theta^i_m|$. Il est donc contenu dans Y^i_λ. Soit W la composante connexe de $V \cap Y^i_\lambda$ qui contient m. D'après les résultats de stratification adaptée à un feuilletage [**MR**], [**Sp**], [**LR**], [**LS**], W se décompose en une union dénombrable de sous-variétés sur lesquelles $|\Theta^i_m|$ et $|\Theta_c|$ sont constantes. Ceci implique que $|\Theta^i_m|$ et $|\Theta_c|$ restreintes à W sont constantes. Par conséquent, $|\Theta_c|$ atteint son maximum en un point $m' \in V \cap \Gamma^i_\lambda$. Puisque $c \in C_0$, c'est un point de Γ'^i_λ et donc de Γ_λ. Puisque $\Theta_c(c) = 1$, on a $|\Theta_c(m')| \geq 1$. Le lemme appliqué à $C_1 = \Gamma_\lambda$ achève la preuve du Théorème 2. $\square$

Bibliographie

[CL] C. CAMACHO ET A. LINS NETO, *"Geometric theory of foliations"*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985.

[Ch] F. CHAZAL, Sur les feuilletages algébriques de Rolle, *Comment. Math. Helv.* **72(3)** (1997), 411–425.

[CY] G. COMTE ET Y. YOMDIN, Tame geometry with application in smooth analysis, Preprint, Université de Nice (2002).

[DK] D. D'ACUNTO ET K. KURDYKA, Gradient of a definable family of functions: uniform bound on the length of the trajectories, Preprint 08/2002, `http://www.uni-regensburg.de/Fakultaeten/nat_Fak_I/RAAG`.

[Dr1] L. VAN DEN DRIES, Tarski's problem and Pfaffian functions, in: *"Logic colloquium '84"* (Manchester, 1984), Stud. Logic Found. Math. **120**, North-Holland, Amsterdam, 1986, pp. 59–90.

[Dr2] L. VAN DEN DRIES, *"Tame topology and o-minimal structures"*, London Mathematical Society Lecture Note Series **248**, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[DrM] L. VAN DEN DRIES ET C. MILLER, Geometric categories and o-minimal structures, *Duke Math. J.* **84(2)** (1996), 497–540.

[Fe] H. FEDERER, *"Geometric measure theory"*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **153**, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.

[Ga] A. M. GABRIÈLOV, Projections of semianalytic sets, (Russian), *Funkcional. Anal. i Priložen* **2(4)** (1968), 18–30.

[Go] C. GODBILLON, *"Géométrie différentielle et mécanique analytique"*, Hermann, Paris, 1969.

[KM] M. KARPINSKI ET A. MACINTYRE, A generalization of Wilkie's theorem of the complement, and an application to Pfaffian closure, *Selecta Math. (N.S.)* **5(4)** (1999), 507–516.

[Kh] A. G. KHOVANSKIĬ, Real analytic manifolds with the property of finiteness, and complex abelian integrals, (Russian), *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **18(2)** (1984), 40–50.

[K1] K. KURDYKA, Une généralisation de l'inégalite de gradient pour les applications analytiques, conférence donnée au Séminaire de Géométrie Algébrique Réelle de Rennes le 6 décembre 2001.

[K2] K. KURDYKA, Travail en cours de rédaction.

[LR] J.-M. LION ET J.-P. ROLIN, Volumes, feuilles de Rolle de feuilletages analytiques et théorème de Wilkie, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* **7(1)** (1998), 93–112.

[LS] J.-M. LION ET P. SPEISSEGGER, Analytic stratification in the Pfaffian closure of an o-minimal structure, *Duke Math. J.* **103(2)** (2000), 215–231.

[Ło] S. ŁOJASIEWICZ, Une propriété topologique des sous-ensembles analytiques réels, in: *"Les équations aux dérivées partielles"* (Paris, 1962), Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1963, pp. 87–89.

[MR] R. MOUSSU ET C. A. ROCHE, Théorèmes de finitude pour les variétés pfaffiennes, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **42(1–2)** (1992), 393–420.

[Sp] P. SPEISSEGGER, The Pfaffian closure of an o-minimal structure, *J. Reine Angew. Math.* **508** (1999), 189–211.

[Ta] A. TARSKI, *"A decision method for elementary algebra and geometry"*, 2nd ed., University of California Press, Berkeley and Los Angeles, Calif., 1951.

[Wi] A. J. WILKIE, A theorem of the complement and some new o-minimal structures, *Selecta Math. (N.S.)* **5(4)** (1999), 397–421.

F. Chazal:
Université de Bourgogne
Institut de Mathématiques de Bourgogne
UMR 5584 du C.N.R.S.
UFR des Sciences et Techniques
9 avenue Alain Savary, B.P. 47870
21078 Dijon Cedex
France
E-mail address: `fchazal@u-bourgogne.fr`

J.-M. Lion:
IRMAR
Université de Rennes 1-CNRS
Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex
France
E-mail address: `jean-marie.lion@univ-rennes1.fr`

Primera versió rebuda el 25 de setembre de 2002,
darrera versió rebuda el 10 de març de 2003.