

EQUIVALENCE DE DEUX FIBRATIONS POUR LES FEUILLETAGES LOGARITHMIQUES

ABDELHAK KABILA

Abstract

The object of this work is to generalize to the germs of Pfaffian logarithmic forms, the two equivalent descriptions of the J. Milnor's fibre that is wellknown for the germs of holomorphic functions.

Introduction

Soit f une fonction analytique définie au voisinage de l'origine 0 de \mathbb{C}^n . On suppose que $f(0) = 0$ et que f est à singularité isolée en 0.

ε et η étant des réels strictement positifs on note:

- εB^{2n} (respectivement D_η^2) la boule ouverte de centre 0 et de rayon ε dans \mathbb{C}^n (respectivement le disque fermé de centre 0 et de rayon η dans \mathbb{C}).
- εS^{2n-1} la sphère de centre 0 et de rayon ε dans \mathbb{C}^n .
- $\varepsilon K = \varepsilon S^{2n-1} \cap f^{-1}(0)$.

Pour ε et η assez petits J. Milnor a démontré dans [2] que chacune des deux applications suivantes, Φ' et Φ'' définies par:

$$\Phi' : z \in \varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K \rightarrow \frac{f(z)}{|f(z)|} \in S^1$$

et

$$\Phi'' : z \in f^{-1}(\partial D_\eta^2) \cap \varepsilon B^{2n} \rightarrow f(z) \in \partial D_\eta^2$$

est une fibration C^∞ localement triviale, et qu'en plus ces deux fibrations sont équivalentes ce qui donne deux descriptions équivalentes de la fibre de J. Milnor.

Le but de ce travail est de généraliser ces résultats aux germes de formes de Pfaff logarithmiques.

Généralisation aux feuilletages logarithmiques

Soient f_1, f_2, \dots, f_m , m germes de fonctions holomorphes à l'origine 0 de \mathbb{C}^n , et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, m nombres complexes non tous nuls. Nous supposons que tous les f_k sont premiers entre eux et que $f_k(0) = 0$ pour tout k compris entre 1 et m .

Désignons par:

- ω le germe en $0 \in \mathbb{C}^n$ de forme de Pfaff holomorphe défini par

$$\omega = f_1 f_2 \dots f_m \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{df_k}{f_k}.$$

- Ω la forme de Pfaff fermée suivante:

$$\Omega = \sum_{k=1}^m [\text{Im } \lambda_k d(\text{Log } |f_k|) + \text{Re } \lambda_k d(\text{Arg } f_k)]$$

où $\text{Im } *$ (respectivement $\text{Re } *$) désigne la partie imaginaire (respectivement réelle) de $*$, et $\text{Arg } f_k(z)$ désigne l'argument de $f_k(z)$ pour $z \in \mathbb{C}^n$.

- εB^{2n} (respectivement εS^{2n-1}) désigne la boule (respectivement la sphère) de centre 0 et de rayon ε dans \mathbb{C}^n .
- $\varepsilon K = \varepsilon S^{2n-1} \cap X_0$, où X_0 désigne le germe d'hypersurface d'équation réduite:

$$f_1 f_2 \dots f_m = 0.$$

- F le germe, en $0 \in \mathbb{C}^n$, de fonction multiforme:

$$f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} \dots f_m^{\lambda_m}.$$

- $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$, respectivement l'ordre en $0 \in \mathbb{C}^n$ de f_1, f_2, \dots, f_m .

Remarque 1.

L'extension aux germes de formes de Pfaff logarithmiques de certains résultats liés à la structure de la fibration de Milnor d'un germe de fonction holomorphe impose d'introduire l'hypothèse naturelle de non

résonnance $\sum_{k=1}^m \lambda_k \nu_k \neq 0$.

Remarque 2.

On peut toujours, quitte à changer les λ_k , $1 \leq k \leq m$, au départ, ce qui ne modifie pas le feuilletage, supposer que $\sum_{k=1}^m \lambda_k \nu_k$ est un réel

strictement positif. Plus précisément si $\sum_{k=1}^m \lambda_k \nu_k$ n'est pas un réel, on pose:

$$\rho = \sum_{k=1}^m \overline{\lambda_k \nu_k}$$

et on considère la forme de Pfaff holomorphe suivante:

$$f_1 \cdot f_2 \cdots f_m \sum_{k=1}^m \mu_k \frac{df_k}{f_k}$$

où

$$\mu_k = \rho \lambda_k \text{ pour tout } k \text{ compris entre } 1 \text{ et } m.$$

Il est clair que le feuilletage défini par la forme de Pfaff $f_1 \cdot f_2 \cdots f_m \sum_{k=1}^m \mu_k \frac{df_k}{f_k}$ est le même que celui défini par la forme de Pfaff $f_1 \cdot f_2 \cdots f_m \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{df_k}{f_k}$.

De plus:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \mu_k \nu_k &= \sum_{k=1}^m \rho \lambda_k \nu_k = \rho \sum_{k=1}^m \lambda_k \nu_k \\ &= \left(\sum_{k=1}^m \overline{\lambda_k \nu_k} \right) \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k \nu_k \right) = \left| \sum_{k=1}^m \lambda_k \nu_k \right|^2 \end{aligned}$$

qui est bien un réel strictement positif.

Sachant que les feuilles du feuilletage défini par le germe de forme de Pfaff ω (respectivement Ω) coïncident avec les composantes connexes des "hypersurfaces de niveaux" du germe de fonction multiforme F (respectivement $\text{Arg } F$), rappelons que nous avons démontré dans [1] que pour ε réel strictement positif assez petit, il existe sur $\varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K$ un flot qui permute les feuilles du feuilletage défini par la forme Ω , ce qui est une généralisation aux germes de formes de Pfaff logarithmiques du théorème de fibration de J. Milnor bien connu pour les germes de fonctions.

Nous nous proposons ici de démontrer le résultat suivant:

Théorème.

Il existe ε_0 et η_0 réels strictement positifs tel que pour tout ε et pour tout η , vérifiant $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $0 < \eta \leq \eta_0$, il existe un C^∞ difféomorphisme du "tube" $[|F| = \eta] \cap \varepsilon B^{2n}$ sur $\varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K$ qui transforme le feuilletage défini par ω sur $[|F| = \eta] \cap \varepsilon B^{2n}$ en le feuilletage défini par Ω sur $\varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K$.

Démonstration:

On utilise les mêmes techniques que dans [2]. Rappelons d'abord quelques notations.

Dans tout ce qui suit l'espace vectoriel \mathbb{C}^n est supposé muni du produit hermitien:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C} \\ ((a_k)_{1 \leq k \leq n}, (b_k)_{1 \leq k \leq n}) &\longmapsto \langle (a_k)_{1 \leq k \leq n}, (b_k)_{1 \leq k \leq n} \rangle = \sum_{k=1}^n a_k \overline{b_k} \end{aligned}$$

et de la norme induite:

$$\begin{aligned} \| \cdot \| : \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (a_k)_{1 \leq k \leq n} &\longmapsto \| (a_k)_{1 \leq k \leq n} \| = \sqrt{\langle (a_k)_{1 \leq k \leq n}, (a_k)_{1 \leq k \leq n} \rangle}. \blacksquare \end{aligned}$$

Définition.

Soit $\Psi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ un germe d'application holomorphe à l'origine 0 de \mathbb{C}^n . On appelle gradient de Ψ et on note $\text{grad } \Psi$ l'expression suivante:

$$\text{grad}(\Psi) = \left(\frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial z_1}, \frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial z_n} \right)$$

où (z_1, z_2, \dots, z_n) désignent les coordonnées de \mathbb{C}^n .

Remarque 3.

Si $P : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ est un germe, en $0 \in \mathbb{C}^n$, de chemin analytique alors on a:

$$\frac{d(\Psi(P(t)))}{dt} = \left\langle \frac{dP(t)}{dt}, \text{grad}(\Psi(P(t))) \right\rangle.$$

Remarque 4.

Soit $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe à l'origine 0 de \mathbb{C}^n alors on a :

$$\text{grad}(\varphi(z)) = \overline{\varphi'(z)} \text{grad}(\text{Log}(\varphi(z)))$$

où $\text{Log}(\varphi(z))$ désigne le logarithme de $\varphi(z)$ pour $z \in \mathbb{C}^n$.

La démonstration du théorème se fait en plusieurs étapes. Nous allons commencer par démontrer un certain nombre de propositions :

Proposition 1.

Quelque soit $z \in \mathbb{C}^n \setminus X_0$, suffisamment proche de $0 \in \mathbb{C}^n$, les vecteurs z et $i \sum_{k=1}^m \overline{\lambda_k} \text{grad} \text{Log} f_k(z)$ sont linéairement indépendants sur \mathbb{R} .

Démonstration de la Proposition 1 :

Elle découle sans peine du résultat suivant :

Proposition 2.

Il existe ε_0 réel strictement positif tel que pour tout $z \in \varepsilon B^{2n} \setminus X_0$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ les vecteurs z et $\sum_{k=1}^m \overline{\lambda_k} \text{grad} \text{Log} f_k(z)$ sont ou bien linéairement indépendants sur \mathbb{C} , ou bien on a $\sum_{k=1}^m \overline{\lambda_k} \text{grad} \text{Log} f_k(z) = \alpha z$ avec $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $|\text{Arg} \alpha| < \frac{\pi}{4}$.

Démonstration de la Proposition 2 :

Nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 1.

Supposons que $\sum_{k=1}^p \lambda_k \nu_k > 0$ et soit $P : [0, r) \rightarrow \mathbb{C}^n$ un chemin analytique réel tel que :

- (1) $P(0) = 0$ et pour tout t strictement positif $P(t) \notin X_0$.
- (2) $\sum_{k=1}^m \overline{\lambda_k} \text{grad} \text{Log} f_k(P(t)) = \alpha(t)P(t)$ avec $\alpha(t) \in \mathbb{C}$.

Alors il existe $r' \leq r$ tel que pour tout t , vérifiant $0 < t < r'$ on a:

$$\alpha(t) \neq 0.$$

Démonstration du Lemme 1:

Soit t strictement positif. Pour tout k compris entre 1 et m on a: $f_k(P(t)) \neq 0$ car $P(t) \notin X_0$.

Ecrivons:

$$\begin{aligned} P(t) &= at^l + \dots & a \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \text{ et } l = (l_1, l_2, \dots, l_n) \\ & & \text{avec } l_1, l_2, \dots, l_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ f_k(P(t)) &= b_k t^{\beta_k} + \dots & b_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Posons:

$$\Psi = \overline{f_1} \cdot \overline{f_2} \dots \overline{f_m} \sum_{k=1}^m \overline{\lambda_k} \text{grad Log } f_k.$$

Puisque P est analytique on a:

$$\begin{aligned} \Psi(P(t)) &= ct^\gamma + \dots & c \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \text{ et } \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \\ & & \text{avec } \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a:

$$\begin{aligned} \Psi(P(t)) &= \overline{f_1}(P(t)) \overline{f_2}(P(t)) \dots \overline{f_m}(P(t)) \alpha(t) P(t) \\ &= \alpha(t) (\overline{a} \overline{b_1} \overline{b_2} \dots \overline{b_m} t^{l+\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_m} + \dots) \end{aligned}$$

en identifiant β_k avec $(\beta_k, \beta_k, \dots, \beta_k) \in \mathbb{N}^n$ pour tout k compris entre 1 et m .

Ce qui implique que:

$$ct^\gamma + \dots = \alpha(t) \overline{a} \overline{b_1} \overline{b_2} \dots \overline{b_m} t^{l+\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_m} + \dots$$

Ecrivons:

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

on a $c \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, donc il existe s compris entre 1 et n tel que $c_s \neq 0$. Ce qui entraîne nécessairement d'après l'égalité ci-dessus que d'une part $a_s \neq 0$ et que d'autre part $\alpha(t) \neq 0$.

Ainsi:

$$\alpha(t) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

De plus:

$$\alpha(t) = \alpha_0 t^{\gamma_s - l_s - \beta_1 - \beta_2 \dots - \beta_m} (1 + \dots)$$

avec:

$$\alpha_0 = \frac{c_s}{a_s \overline{b_1 b_2 \dots b_m}}.$$

On cherche à montrer que α_0 est un nombre réel.

D'après la Remarque 3, on a pour tout k compris entre 1 et m :

$$\frac{df_k(P(t))}{dt} = \left\langle \frac{dP(t)}{dt}, \text{grad } f_k(P(t)) \right\rangle$$

donc:

$$\begin{aligned} & f_1(P(t)) f_2(P(t)) \dots f_m(P(t)) \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_k}{f_k(P(t))} \frac{df_k(P(t))}{dt} \\ &= \left\langle \frac{dP(t)}{dt}, f_1(P(t)) f_2(P(t)) \dots f_m(P(t)) \sum_{k=1}^m \frac{\overline{\lambda_k}}{f_k(P(t))} \text{grad } f_k(P(t)) \right\rangle. \end{aligned}$$

D'après la Remarque 4, on a pour tout k compris entre 1 et m :

$$\text{grad } f_k(P(t)) = \overline{f_k(P(t))} \text{grad } \text{Log } f_k(P(t)).$$

Donc:

$$\begin{aligned} & f_1(P(t)) f_2(P(t)) \dots f_m(P(t)) \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_k}{f_k(P(t))} \frac{df_k(P(t))}{dt} \\ &= \left\langle \frac{dP(t)}{dt}, \Psi(P(t)) \right\rangle. \end{aligned}$$

Ainsi:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m \lambda_k b_1 b_2 \dots b_m \beta_k t^{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m - 1} + \dots \\ &= \langle At^L + \dots, \alpha_0 \overline{a b_1 b_2 \dots b_m} t^\gamma + \dots \rangle. \end{aligned}$$

Avec:

$$A = (l_1 a_1, l_2 a_2, \dots, l_m a_m) \text{ et } L = (l_1 - 1, l_2 - 1, \dots, l_m - 1).$$

Donc:

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \beta_k = \overline{\alpha_0} \langle A, a \rangle$$

or:

$$\langle A, a \rangle = \sum_{k=1}^m l_k |a_k|^2 \in \mathbb{R}.$$

Donc:

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \beta_k = \overline{\alpha_0} \sum_{k=1}^m l_k |a_k|^2.$$

D'autre part si on désigne par $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$ respectivement les ordres en $o \in \mathbb{C}^n$ de f_1, f_2, \dots, f_m , on peut d'après le théorème de préparation de Weierstrass (cf [4]) écrire f_1, f_2, \dots, f_m sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} f_1(z_1, z_2, \dots, z_n) &= U_1(z_1, z_2, \dots, z_n) (z_s^{\nu_1} + \dots) \\ f_2(z_1, z_2, \dots, z_n) &= U_2(z_1, z_2, \dots, z_n) (z_s^{\nu_2} + \dots) \\ &\vdots \\ f_m(z_1, z_2, \dots, z_n) &= U_m(z_1, z_2, \dots, z_n) (z_s^{\nu_m} + \dots) \end{aligned}$$

où U_1, U_2, \dots, U_m sont des unités de l'anneau $\Theta_{\mathbb{C}^n, 0}$ des germes de fonctions holomorphes à l'origine 0 de \mathbb{C}^n i.e. $U_k(0) \neq 0$ pour tout k compris entre 1 et m .

Ainsi:

$$\beta_k = l_s \nu_k \text{ pour tout } k \text{ compris entre 1 et } m.$$

Donc l'égalité:

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \beta_k = \overline{\alpha_0} \sum_{k=1}^m l_k |a_k|^2$$

devient:

$$l_s \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k \nu_k \right) = \overline{\alpha_0} \left(\sum_{k=1}^m l_k |a_k|^2 \right).$$

Or:

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \nu_k \in]0, +\infty[$$

ce qui entraîne que $\overline{\alpha_0} \in]0, +\infty[$ et par conséquent α_0 aussi.

Visiblement:

$$\frac{\alpha(t)}{|\alpha(t)|} = \frac{\alpha_0 t^{\gamma_s - l_s - \beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta_m} (1 + t[\dots])}{|\alpha_0 t^{\gamma_s - l_s - \beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta_m} (1 + t[\dots])|}$$

tend vers 1 quand t tend vers zéro.

Et le Lemme 1 est démontré. ■

Rappelons aussi le lemme suivant bien connu sous le nom de "lemme des petits chemins" ou encore de "lemme de sélection des courbes".

Lemme 2 (cf. [2]).

Soit $A \subset \mathbb{R}^P$ un ensemble semi-analytique, et soit a un point adhérent à A . Alors il existe un chemin analytique réel $P : [0, r) \rightarrow \mathbb{R}^P$ tel que:

- (1) $P(0) = a$
- (2) $P(t) \in A$ pour tout t strictement positif.

Déduisons maintenant la Proposition 2 à partir des lemmes précédents. Considérons l'ensemble A suivant:

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \setminus X_0 \text{ tel que: } \begin{array}{l} \exists \alpha \in \mathbb{C} : \sum_{k=1}^m \overline{\lambda}_k \text{grad Log } f_k(z) = \alpha z \\ \text{et } |\text{Arg } \alpha| \geq \frac{\pi}{4}. \end{array} \right\}.$$

On vérifie sans peine que A est un ensemble semi-analytique. Supposons que la Proposition 2 ne soit pas vérifiée c'est-à-dire que 0 soit adhérent à A . D'après le Lemme 2, il existe un chemin analytique réel $P : [0, r) \rightarrow \mathbb{C}^n$ tel que:

- (1) $P(0) = 0$
- (2) $P(t) \in A$ pour tout t strictement positif, i.e.

$$\left\{ \begin{array}{l} P(t) \notin X_0 \\ \sum_{k=1}^m \overline{\lambda}_k \text{grad Log } f_k(P(t)) = \alpha(t)P(t) \\ |\text{Arg } \alpha(t)| \geq \frac{\pi}{4}. \end{array} \right.$$

ce qui entraîne d'après le Lemme 1 que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \text{Arg } \alpha(t) = 0$$

ce qui est contradictoire avec $|\text{Arg } \alpha(t)| \geq \frac{\pi}{4}$. Et la Proposition 2 est démontrée.

Proposition 3.

Pour ε réel strictement positif assez petit, il existe sur $\varepsilon B^{2n} \setminus X_0$ un champ de vecteurs χ , C^∞ , tel que pour tout $z \in \varepsilon B^{2n} \setminus X_0$ on ait:

- (1) la partie réelle de $\langle \chi(z), z \rangle$ est un réel strictement positif.
- (2) $\langle \chi(z), \sum_{k=1}^m \overline{\lambda}_k \text{grad Log } f_k(z) \rangle$ est un réel strictement positif.

Démonstration de la Proposition 3:

L'idée est la suivante:

On construit le champ de vecteurs, χ , localement puis on recolle avec un partition de l'unité.

D'après la Proposition 2, il existe ε_0 , réel strictement positif tel que pour tout $z \in \varepsilon B^{2n} \setminus X_0$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, les vecteurs z et $\sum_{k=1}^m \bar{\lambda}_k \text{grad Log } f_k(z)$ sont ou bien linéairement indépendants sur \mathbb{C} ou bien on a

$$\sum_{k=1}^m \bar{\lambda}_k \text{grad Log } f_k(z) = \alpha z$$

avec $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $|\text{Arg } \alpha| < \frac{\pi}{4}$.

Nous distinguons les deux cas suivants:

1er Cas: si $\sum_{k=1}^m \bar{\lambda}_k \text{grad Log } f_k(z) = \alpha z$ avec $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $|\text{Arg } \alpha| < \frac{\pi}{4}$, on prend $\chi(z) = \sum_{k=1}^m \bar{\lambda}_k \text{grad Log } f_k(z)$.

On a:

$\text{Re}\langle \chi(z), z \rangle = \text{Re}\langle \alpha z, z \rangle = \text{Re } \alpha \|z\|^2$ est strictement positif. De plus:

$\left\langle \chi(z), \sum_{k=1}^m \bar{\lambda}_k \text{grad Log } f_k(z) \right\rangle = \langle \alpha z, \alpha z \rangle = |\alpha|^2 \|z\|^2$ est un réel strictement positif.

2ème Cas: si z et $\sum_{k=1}^m \bar{\lambda}_k \text{grad Log } f_k(z)$ sont linéairement indépendants sur \mathbb{C} alors $z, iz, \sum_{k=1}^m \bar{\lambda}_k \text{grad Log } f_k(z)$ et $i \sum_{k=1}^m \bar{\lambda}_k \text{grad Log } f_k(z)$ sont linéairement indépendants sur \mathbb{R} . D'autre part nous avons l'équivalence:

$$\left\langle \chi(z), \sum_{k=1}^m \bar{\lambda}_k \text{grad Log } f_k(z) \right\rangle$$

est un réel strictement positif si et seulement si:

$$\begin{cases} \text{Re} \left\langle \chi(z), \sum_{k=1}^m \bar{\lambda}_k \text{grad Log } f_k(z) \right\rangle > 0 \\ \text{Im} \left\langle \chi(z), \sum_{k=1}^m \bar{\lambda}_k \text{grad Log } f_k(z) \right\rangle = 0 \end{cases}$$

or

$$\operatorname{Im} \left\langle \chi(z), \sum_{k=1}^m \overline{\lambda_k} \operatorname{grad} \operatorname{Log} f_k(z) \right\rangle = \operatorname{Re} \left\langle \chi(z), i \sum_{k=1}^m \overline{\lambda_k} \operatorname{grad} \operatorname{Log} f_k(z) \right\rangle.$$

Donc on doit chercher un vecteur $\chi(z)$ tel que:

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \langle \chi(z), z \rangle > 0 \\ \operatorname{Re} \left\langle \chi(z), \sum_{k=1}^m \overline{\lambda_k} \operatorname{grad} \operatorname{Log} f_k(z) \right\rangle > 0 \\ \operatorname{Re} \left\langle \chi(z), i \sum_{k=1}^m \overline{\lambda_k} \operatorname{grad} \operatorname{Log} f_k(z) \right\rangle = 0. \end{cases}$$

Etant donné l'indépendance linéaire réelle des quatres vecteurs z , iz , $\sum_{k=1}^m \overline{\lambda_k} \operatorname{grad} \operatorname{Log} f_k(z)$ et $i \sum_{k=1}^m \overline{\lambda_k} \operatorname{grad} \operatorname{Log} f_k(z)$, il est toujours possible de trouver un tel vecteur $\chi(z)$. ■

Proposition 4.

Les trajectoires du champ de vecteurs, χ , précédent vérifient les propriétés suivantes:

si $t \rightarrow \varphi(t)$ est une trajectoire de χ alors:

- (1) la fonction: $t \rightarrow \|\varphi(t)\|$ est strictement croissante .
- (2) la fonction: $t \rightarrow \sum_{k=1}^m [(\operatorname{Im} \lambda_k) \operatorname{Log} |f_k(\varphi(t))| + \operatorname{Re} \lambda_k \operatorname{Arg}(f_k(\varphi(t)))]$ est constante i.e. que le champ de vecteurs χ est tangent aux feuilles du feuilletage défini par la forme de Pfaff Ω .
- (3) la fonction $t \rightarrow |F(\varphi(t))|$ est strictement croissante.

Démonstration de la Proposition 4:

Soit $t \rightarrow \varphi(t)$ une trajectoire de χ , on a:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \chi(\varphi(t)).$$

D'après la Remarque 1et la Remarque 2, on a pour tout k compris entre 1 et m :

$$\frac{d}{dt} (f_k(\varphi(t))) = \left\langle \frac{d(\varphi(t))}{dt}, \overline{f_k(\varphi(t))} \operatorname{grad} \operatorname{Log} f_k(\varphi(t)) \right\rangle.$$

Soit:

$$\frac{1}{f_k(\varphi(t))} \frac{d}{dt} (f_k(\varphi(t))) = \left\langle \frac{d\varphi(t)}{dt}, \text{grad Log } f_k(\varphi(t)) \right\rangle$$

et par conséquent:

$$(*) \quad \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k \text{Log } f_k(\varphi(t)) \right) = \left\langle \frac{d\varphi(t)}{dt}, \sum_{k=1}^m \bar{\lambda}_k \text{grad Log } f_k(\varphi(t)) \right\rangle$$

or:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \lambda_k \text{Log } f_k(\varphi(t)) &= \text{Log} \left(\left| f_1^{\lambda_1}(\varphi(t)) \cdot f_2^{\lambda_2}(\varphi(t)) \dots f_m^{\lambda_m}(\varphi(t)) \right| \right) \\ &\quad + i \text{Arg} \left(f_1^{\lambda_1}(\varphi(t)) \cdot f_2^{\lambda_2}(\varphi(t)) \dots f_m^{\lambda_m}(\varphi(t)) \right). \end{aligned}$$

En remplaçant dans (*) on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Log} \left(\left| f_1^{\lambda_1}(\varphi(t)) \cdot f_2^{\lambda_2}(\varphi(t)) \dots f_m^{\lambda_m}(\varphi(t)) \right| \right) \\ + i \frac{d}{dt} \text{Arg} \left(f_1^{\lambda_1}(\varphi(t)) \cdot f_2^{\lambda_2}(\varphi(t)) \dots f_m^{\lambda_m}(\varphi(t)) \right) \\ = \left\langle \chi(\varphi(t)), \sum_{k=1}^m \bar{\lambda}_k \text{grad Log}(f_k(\varphi(t))) \right\rangle. \end{aligned}$$

D'après la Proposition 3, $\left\langle \chi(\varphi(t)), \sum_{k=1}^m \bar{\lambda}_k \text{grad Log}(f_k(\varphi(t))) \right\rangle$ est un réel strictement positif donc:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \text{Log} \left(\left| f_1^{\lambda_1}(\varphi(t)) \cdot f_2^{\lambda_2}(\varphi(t)) \dots f_m^{\lambda_m}(\varphi(t)) \right| \right) > 0 \\ \frac{d}{dt} \text{Arg} \left(f_1^{\lambda_1}(\varphi(t)) \cdot f_2^{\lambda_2}(\varphi(t)) \dots f_m^{\lambda_m}(\varphi(t)) \right) = 0. \end{cases}$$

Ce qui implique, d'une part que la fonction:

$$t \rightarrow |f_1^{\lambda_1}(\varphi(t)) \cdot f_2^{\lambda_2}(\varphi(t)) \dots f_m^{\lambda_m}(\varphi(t))|$$

est strictement croissante et d'autre part que la fonction:

$$t \rightarrow \sum_{k=1}^m [(\text{Im } \lambda_k) \text{Log } |f_k(\varphi(t))| + (\text{Re } \lambda_k) \text{Arg } f_k(\varphi(t))]$$

est constante.

Il reste à prouver que la fonction:

$$t \rightarrow \|\varphi(t)\|$$

est strictement croissante.

On a:

$$\frac{d}{dt} \|\varphi(t)\|^2 = \frac{d}{dt} \langle \varphi(t), \varphi(t) \rangle = \operatorname{Re} \left\langle \frac{d\varphi(t)}{dt}, \varphi(t) \right\rangle = \operatorname{Re} \langle \chi(\varphi(t)), \varphi(t) \rangle.$$

D'après la Proposition 3, $\operatorname{Re} \langle \chi(\varphi(t)), \varphi(t) \rangle$ est strictement positif donc la fonction: $t \rightarrow \|\varphi(t)\|$ est strictement croissante. Ce qui achève la démonstration. ■

Remarque 4.

Les intégrales de la forme de Pfaff ω (respectivement Ω) sont les “hypersurfaces de niveau” de la fonction multiforme F (respectivement $\operatorname{Arg} F$).

Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, désignons par H_α (respectivement G_α) “l’hypersurface de niveau α ” de la fonction multiforme F (respectivement de la fonction multiforme $\operatorname{Arg} F$).

Nous avons la:

Proposition 5.

Il existe η_0 réel strictement positif tel que pour tout η , $0 < \eta \leq \eta_0$, il existe un C^∞ difféomorphisme Ψ de $(\varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K) \cap [|F| > \eta]$ sur $\varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K$ tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, on ait:

$$\Psi (G_\alpha \cap (\varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K) \cap [|F| > \eta]) = G_\alpha \cap (\varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K).$$

Démonstration de la Proposition 5:

Désignons par g la fonction de $\varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K$ à valeurs réelles définies par:

$$g(z) = -\operatorname{Log}(|F(z)|)$$

et par g_α la restriction de g à G_α pour $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. ■

Nous avons le résultat suivant:

Lemme 3.

Il existe δ_α réel strictement positif tel que tous les points critiques de g_α sont contenus dans le compact C_α suivant:

$$C_\alpha = \{z \in G_\alpha : |F(z)| \geq \delta_\alpha\}.$$

De même il existe δ réel strictement positif tel que tous les points critiques de g sont contenus dans le compact C suivant:

$$C = \{z \in \varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K : |F(z)| \geq \delta\}.$$

Démonstration du Lemme 3:

Nous allons démontrer d'abord deux propositions à partir desquelles nous déduirons le Lemme 3.

Pour ε assez petit et $z \in \varepsilon S^{2n-1} \setminus X_0$ désignons par $T_z G_\alpha$ l'espace tangent à G_α en z . $T_z G_\alpha$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension $2n - 2$. Notons $N_z G_\alpha$ l'espace normal à G_α en z .

$$N_z G_\alpha = \{v \in \mathbb{C}^n \text{ tel que } \operatorname{Re} \langle u, v \rangle = 0 \text{ quelque soit } u \in T_z G_\alpha\}.$$

$N_z G_\alpha$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension 2. ■

Lemme 4.

Pour ε suffisamment petit et $z \in \varepsilon S^{2n-1} \setminus X_0$, $N_z G_\alpha$ est le sous-espace vectoriel engendré par z et $i \sum_{k=1}^m \overline{\lambda_k} \operatorname{grad} \operatorname{Log} f_k(z)$.

Démonstration du Lemme 4:

Vérifions d'abord que: $\sum_{k=1}^m \overline{\lambda_k} \operatorname{grad} \operatorname{Log} f_k(z) \in N_z G_\alpha$ et que $z \in N_z G_\alpha$.

Soit $t \rightarrow P(t)$ un chemin analytique dans G_α tel que $P(0) = z$ et $P'(0) \in T_z G_\alpha$.

*On a d'une part:

$$\operatorname{Arg} F(P(t)) = \alpha$$

donc:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\langle P'(0), i \sum_{k=1}^m \overline{\lambda_k} \operatorname{grad} \operatorname{Log} f_k(P(t)) \right\rangle &= \operatorname{Re} \left(-i \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k \operatorname{Log} f_k(P(t)) \right) \right) \\ &= \frac{d}{dt} (\operatorname{Arg}(F(P(t)))) = \frac{d}{dt} \alpha = 0 \end{aligned}$$

c'est à dire $\sum_{k=1}^m \overline{\lambda_k} \text{grad Log } f_k(z) \in N_z G_\alpha$.

*On a d'autre part:

$$\text{Re} \left\langle \frac{dP(t)}{dt}, P(t) \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|P(t)\|^2$$

ce qui entraîne $\text{Re} \langle P'(0), z \rangle = 0$ (car $P(0) = z$ et $\|z^2\| = \varepsilon^2$ puisque $z \in \varepsilon S^{2n-1} \setminus X_0$) c'est à dire $z \in N_z G_\alpha$.

Or on sait d'après la Proposition 1 que z et $i \sum_{k=1}^m \overline{\lambda_k} \text{grad Log } f_k(z)$ sont linéairement indépendants sur \mathbb{R} donc ils forment une base de $N_z G_\alpha$. D'où le résultat. ■

Lemme 5.

Désignant par Σ_α (respectivement Σ) l'ensemble des points critiques de g_α (respectivement de g) on a:

$$\Sigma_\alpha = \left\{ z \in G_\alpha \text{ tel que: } \sum_{k=1}^m \overline{\lambda_k} \text{grad Log } f_k(z) = \theta z, \theta \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\left(\text{resp. } \Sigma = \left\{ z \in \varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K : \sum_{k=1}^m \overline{\lambda_k} \text{grad Log } f_k(z) = \theta z, \theta \in \mathbb{C} \right\} \right).$$

Démonstration du Lemme 5:

Soit $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ (ε_0 étant celui de la Proposition 1) et soit $z \in \varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K$. On a les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned} & z \text{ est un point critique pour } g_\alpha \\ \iff & \left[\begin{array}{l} \text{Pour tout } P : t \rightarrow P(t) \text{ un chemin analytique contenu} \\ \text{dans } G_\alpha \text{ tel que } P(0) = z \text{ on a:} \\ \frac{d}{dt} (g_\alpha(P(t)))|_{t=0} = 0 \end{array} \right] \\ \iff & \text{Re} \left\langle P'(0), \sum_{k=1}^m \overline{\lambda_k} \text{grad Log } f_k(P(t)) \right\rangle = 0 \\ \iff & \sum_{k=1}^m \overline{\lambda_k} \text{grad Log } f_k(P(t)) \in N_z G_\alpha \end{aligned}$$

\Leftrightarrow Il existe $r, s \in \mathbb{R}$ tel que:

$$\sum_{k=1}^m \overline{\lambda_k} \operatorname{grad} \operatorname{Log} f_k(z) = rz + si \sum_{k=1}^m \overline{\lambda_k} \operatorname{grad} \operatorname{Log} f_k(z)$$

\Leftrightarrow Il existe $r, s \in \mathbb{R}$ tel que: $\sum_{k=1}^m \overline{\lambda_k} \operatorname{grad} \operatorname{Log} f_k(z) = \frac{r}{1-is} \cdot z$

\Leftrightarrow Il existe $\theta \in \mathbb{C}$ tel que: $\sum_{k=1}^m \overline{\lambda_k} \operatorname{grad} \operatorname{Log} f_k(z) = \theta z$.

Un raisonnement analogue permet de démontrer la deuxième partie de la Proposition 7.

Déduisons maintenant le Lemme 3 à partir des Lemmes 4 et 5. Raisonnons par l'absurde. Supposons donc qu'il existe une suite

$$(Z_n)_{n \geq 1}, Z_n \in \Sigma_\alpha \text{ tel que } |F(Z_n)| < \frac{1}{n}.$$

La suite $(Z_n)_{n \geq 1}$ tend vers une limite a dans le compact εS^{2n-1} donc le point a est adhérent à Σ_α et par conséquent d'après le Lemme 2, il existe un chemin analytique $P : [0, r] \rightarrow \Sigma_\alpha$ tel que:

- (1) $P(0) = a$
- (2) $P(t) \in \Sigma_\alpha$ pour tout t strictement positif.

Soit $t \in]0, r[$, on a:

$$\frac{d}{dt} g_\alpha(P(t)) = \langle P'(0), \operatorname{grad} g_\alpha(P(t)) \rangle = 0$$

donc pour tout $t \in]0, r[$, $P(t)$ est un point critique pour la fonction $z \rightarrow |F(z)|$ ce qui entraîne que:

$$|F(P(t))| = \text{cste pour tout } t \in]0, r[.$$

Par continuité en faisant tendre t vers zéro on obtient:

$$|F(P(t))| = 0 \text{ pour tout } t \in]0, r[$$

ce qui entraîne que pour tout t strictement positif $P(t) \in X_0$, or:

$$P(t) \in \Sigma_\alpha \subset G_\alpha \subset \varepsilon S^{2n-1} \setminus X_0.$$

D'où la contradiction. ■

Un raisonnement analogue permet de prouver la deuxième partie du Lemme 3.

Lemme 6 (cf. [3]).

Soit $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ d'une variété lisse M à valeurs réelles. Pour $r \in \mathbb{R}$ notons M^r l'ensemble suivant:

$$M^r = h^{-1}(-\infty, r] = \{P \in M \text{ tel que: } h(P) \leq r\}.$$

Soient r_1, r_2 deux nombres réels avec $r_1 < r_2$ tels que:

$$h^{-1}[r_1, r_2] = \{P \in M \text{ tel que: } r_1 \leq h(P) \leq r_2\}$$

est un compact et ne contient aucun point critique de h , alors: il existe un C^∞ difféomorphisme $\Phi : M \rightarrow M$ tel que

$$\Phi(M^{r_1}) = M^{r_2}.$$

Démonstration du Lemme 6:

Nous ne donnons ici qu'une esquisse de démonstration car nous aurons besoin dans la suite de savoir comment est construit le difféomorphisme Φ . Quand aux détails de la démonstration, ils se trouvent dans [3].

L'idée de la démonstration est de pousser M^{r_1} sur M^{r_2} avec un champ de vecteurs transverse aux hypersurfaces $h = cste$.

Choisissons une métrique Riemannienne sur M et notons \langle, \rangle le produit hermitien déterminé par cette métrique.

Soit $v : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ qui est égale à $\frac{1}{\langle \text{grad } h, \text{grad } h \rangle}$ sur le compact $h^{-1}[r_1, r_2]$ et qui s'annule en dehors d'un voisinage compact de $h^{-1}[r_1, r_2]$.

Considérons le champ de vecteurs Δ défini par:

$$\Delta p = v(p)(\text{grad } h)_p, \text{ pour } p \in M.$$

Δ engendre un groupe un paramètre de difféomorphismes

$$\varphi_t : M \rightarrow M.$$

Pour $p \in M$ si $\varphi_t(p) \in h^{-1}[r_1, r_2]$ alors $\frac{dh}{dt}(\varphi_t(p)) = 1$.

Le difféomorphisme $\varphi_{r_2-r_1} : M \rightarrow M$ envoie difféomorphiquement M^{r_1} sur M^{r_2} .

Déduisons maintenant la démonstration de la Proposition 5 à partir des résultats précédents.

D'après le Lemme 3, il existe δ (respectivement δ_α) strictement positif tel que tous les points critiques de la fonction g (respectivement g_α) sont contenus dans le compact C (respectivement C_α).

Considérons la variété M suivante:

$$M = \{z \in \varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K \text{ tel que: } |F(z)| < \delta\}$$

M ne contient aucun point critique de la fonction $g : z \rightarrow -\text{Log } |F(z)|$, et par conséquent M ne contient aucun point critique de la fonction $z \rightarrow \frac{1}{|F(z)|}$.

Posons $\eta_0 = \delta$ et soient ρ et η deux nombres réels strictement positifs tel que: $0 < \rho < \eta \leq \eta_0$. L'ensemble

$$\left\{ z \in \varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K \text{ tel que } \frac{1}{\eta} \leq \frac{1}{|F(z)|} \leq \frac{1}{\rho} \right\}$$

est un compact de M et ne contient aucun point critique de la fonction $\frac{1}{|F|} : M \rightarrow \mathbb{R}$. Donc d'après le Lemme 6, il existe un C^∞ difféomorphisme Ψ de

$$\left\{ z \in \varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K \text{ tel que: } \frac{1}{|F(z)|} < \frac{1}{\eta} \right\}$$

sur

$$\left\{ z \in \varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K \text{ tel que: } \frac{1}{|F(z)|} < \frac{1}{\rho} \right\}$$

c'est-à-dire un C^∞ difféomorphisme de

$$\{z \in \varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K \text{ tel que: } |F(z)| > \eta\}$$

sur

$$\{z \in \varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K \text{ tel que } |F(z)| > \rho\}.$$

Comme ρ est arbitraire, nous en déduisons qu'il existe un C^∞ difféomorphisme, que nous noterons encore ψ , de

$$\{z \in \varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K \text{ tel que: } |F(z)| > \eta\} \text{ sur } \varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K.$$

En considérant la variété M_α suivante:

$$M_\alpha = \{z \in G_\alpha \cap (\varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K) \text{ tel que: } |F(z)| < \delta_\alpha\}$$

et la fonction g_α , on démontre de façon tout à fait analogue qu'il existe un C^∞ difféomorphisme Ψ_α de

$$\{z \in G_\alpha \cap (\varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K) \text{ tel que: } |F(z)| > \eta_\alpha\}$$

sur

$$G_\alpha \cap (\varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K).$$

De plus par construction de Ψ , en fonction de g , ainsi que de Ψ_α en fonction de g_α , il est clair que Ψ_α est la restriction de Ψ à M_α .

En résumé, il existe un C^∞ difféomorphisme Ψ de

$$\{z \in (\varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K) \text{ tel que: } |F(z)| > \eta_\alpha\}$$

sur

$$\varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K$$

tel que:

$$\begin{aligned} \Psi(G_\alpha \cap (\varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K) \cap [|F| > \eta]) &= \Psi_\alpha(G_\alpha \cap (\varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K) \cap [|F| > \eta_\alpha]) \\ &= G_\alpha \cap (\varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K). \end{aligned}$$

Et la Proposition 5 est démontrée.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème à partir des résultats précédents.

Soient ε et η deux nombres réels strictement positifs tels que: $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ et $0 < \eta \leq \eta_0$ avec ε_0 et η_0 suffisamment petits.

Soit $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et H_β "l'hypersurface de niveau β " de la fonction multiforme F . Il existe sur $\varepsilon B^{2n} \setminus X_0$ un champ de vecteurs χ , C^∞ , tangent aux feuilles du feuilletage défini par la forme de pfaff Ω et dont le flot Φ en voie de façon C^∞ difféomorphe:

$$H_\beta \cap [|F| = \eta] \cap \varepsilon B^{2n}$$

sur

$$G_\alpha \cap (\varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K) \cap [|F| > \eta]$$

où α est tel que:

$$\beta = \eta e^{i\alpha}.$$

D'autre part, il existe un C^∞ difféomorphisme Ψ de $(\varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K) \cap [|F| > \eta]$ sur $\varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K$ qui envoie

$$G_\alpha \cap (\varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K) \cap [|F| > \eta]$$

sur

$$G_\alpha \cap (\varepsilon S^{2n-1} \setminus \varepsilon K)$$

de façon C^∞ difféomorphe, d'où le résultat. ■

References

1. A. KABILA, Un théorème de fibration à la Milnor pour les germes de formes de Pfaff logarithmiques, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I.* **302** (1986), 511–514.
2. J. MILNOR, “*Singular points of complex hypersurfaces*,” Ann. Math. Studies **61**, Princeton University Press, 1968.
3. J. MILNOR, “*Morse theory*,” Ann. Math. Studies **51**, Princeton University Press, 1963.
4. R. NARASIMHAN, “*Introduction to the theory of analytic spaces*,” Lectures Notes in Math. **25**, Springer-Verlag, 1966.

I.S.T.V.-Département de Mathématiques
URA au CNRS D-751
Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis
59304 Valenciennes cedex
FRANCE

Primera versió rebuda el 25 d'Abril de 1995,
darrera versió rebuda el 6 de Novembre de 1995