Publicacions Matemàtiques, Vol 37 (1993), 83–89.

PROPRIETES DE MOYENNE POUR LES SOLUTIONS DE SYSTEMES ELLIPTIQUES

JACQUELINE DÉTRAZ

Abstract

In this article, we consider the set $\mathcal{F}$ of the functions annihilated by a uniformly elliptic system $\mathcal{S}$ in an open set Ω of R^n.

We show that, as in the case of the harmonic functions, $\mathcal{F}$ satisfies a submean-property, first for $p = 2$ by elliptic estimates, then for all $p > 0$:

$$|\nabla^k u(x)|^p \leq \frac{C}{r^{n+kp}} \int_{B(x,r)} |u(y)|^p \, dy$$

for each u in $\mathcal{F}$, each $k > 0$ and every ball $B(x,r)$ included in Ω.

As a consequence, we can compare $\|u\|_{L^p(\Omega)}$ and $\|\nabla^k u\|_{L^p(\Omega,\delta^{kp})}$ where δ is the distance to the boundary of Ω, under the hypothesis that $\mathcal{S}$ has constant coefficients or satisfies $\mathcal{S}(1) = 0$.

We conclude that, with the metric $\|u\|_{L^p(\Omega)}) + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ we have a compacity property of the ball of $\mathcal{F}$ for all $p > 0$.

Dans cet article, nous montrons que les fonctions annulant un système elliptique vérifient des propriétés de moyenne analogues à celles des fonctions harmoniques. Nous en déduisons des comparaisons entre les "normes" L^p de ces fonctions et de leurs dérivées pour tout $p > 0$.

On considère dans un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ un système differentiel $\mathcal{S}$ donné par:

$$\mathcal{S} : A_i(x, D)(u) = \sum_{|\alpha| \leq m_i} a_{\alpha,i}(x) \frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha} \qquad i \leq N.$$

On suppose que $\mathcal{S}$ vérifie les condition suivantes:

(H) - Les coefficients $a_{\alpha,i}(x)$ sont dans $C^\infty(\Omega)$ et leurs dérivées de tout ordre sont bornées dans Ω.

- $\mathcal{S}$ est un système uniformément elliptique dans Ω:

$$\inf_{x\in\Omega, y\in R^n\setminus(0)} \sum_{i=1}^{N} \left| \sum_{|\alpha|=m_i} a_{\alpha,i}(x)\zeta^\alpha |\zeta|^{-|\alpha|} \right| = C_S > 0.$$

On désigne par $\delta(x)$ la distance d'un point x de Ω à la frontiere $\partial\Omega$ de Ω.

On peut énoncer la proposition suivante qui généralise les propriétes de moyenne pour les fonctions harmoniques [**5**] et polyanalytiques [**1**]:

Proposition 1.

Si $\mathcal{S}$ vérifie (H), alors pour tout p positif et tout k entier, il existe une constante C telle que pour toute fonction u vérifiant $\mathcal{S}(u) = 0$, on ait

$$|\nabla^k u(x)|^p \leq \frac{C}{r^{n+kp}} \int_{B(x,r)} |u(y)|^p \, dy \tag{1}$$

pour toute boule $B(x,r)$ de centre x, de rayon r, incluse dans Ω.

Démonstration:

Pour $p = 2$, la proposition est conséquence des estimations elliptiques pour un système $\mathcal{T}$ vérifiant (H) dans la boule unité de $\mathbb{R}^n$:

Si $\mathcal{T}(U) = 0$ dans $B(0,1)$ suivant par exemple les estimations pour un système élliptique donnécs dans [**4**], on a, W^s désignant les espaces de Sobolev usuels,

$$\|U\|_{W^s(B(0,\frac{1}{2}))} \leq {}_sC\|U\|_{W^0(B(0,1))}$$

et donc pour tout k, par le lemme d'inclusion de Sobolev

$$|\nabla^k U(0)| \leq C_k \|U\|_{W^0(B(0,1))}. \tag{2}$$

On peut préciser que les constantes ${}_sC$, C_k ne dépendent que de $C_\mathcal{T}$, et des normes dans $C^k(B)$ des coefficients de $\mathcal{T}$.

Soit maintenant u tel que $\mathcal{S}(u) = 0$ dans Ω.

Ω étant borné, pour tout x de Ω, et r tel que $\Omega \supset B(x,r)$, r est majoré par le diamètre R de Ω.

On pose $U(X) = u(x + rX)$.

U est définie dans la boule unité et vérifie $\mathcal{T}(U) = 0$ où $\mathcal{T} = (B_i)_{i\leq N}$ avec

$$B_i(X,D)(U) = \sum_{|\alpha|=m_i} b_{\alpha,i}(X)\frac{\partial^\alpha U}{\partial X^\alpha}(X) + \sum_{|\alpha|<m_i} r^{m_i-|\alpha|} b_{\alpha,i}(X)\frac{\partial^\alpha U(X)}{\partial X^\alpha}$$

et $b_{\alpha,i}(X) = a_{\alpha,i}(x + rX)$.

$\mathcal{T}$ est uniformément elliptique de même constante $C_{\mathcal{S}}$ que $\mathcal{S}$ et les normes dans $C^k(B)$ des coefficients $b_{\alpha,i}$ sont indépendantes de x et de $r < R$. Il existe donc une constante indépendante de x, r et u tel que U vérifie (2) et donc u vérifie (1) pour $p = 2$.

Le cas $p > 2$ découle du cas $p = 2$ par l'inégalité de Hölder.

Pour le cas $0 < p < 2$, on peut utiliser la méthode de Ahern et Bruna [1], en reprenant la demonstration initiale de Hardy-Littlewood pour les fonctions harmoniques, pour prouver que si on a la propriété de moyenne (1) pour un certain p, on l'a aussi pour tout p' tel que $0 < p - p' < 1$. En appliquant 2 fois ce fait, on déduit le cas $0 < p < 2$ du cas $p = 2$. ■

Proposition 2.

Soit $k > 0$, $q > -1$ et $p > 0$ avec $kp + q > 0$. Soit u une fonction de classe C^k; on suppose que $\nabla^k u$ vérifie une proprieté de moyenne

$$|\nabla^k u(x)|^p \le \frac{C}{r^n} \int_{B(x,r)} |\nabla^k u(y)|^p \, dy$$

alors il existe un compact K de Ω et une constante C' ne dependant que de C tels que

$$(3) \qquad \int_\Omega \delta^q(x)|u(x)|^p \, dx \le C' \left(\int_\Omega \delta^{q+pk}(x)|\nabla^k u(x)|^p \, dx + \sum_{s \le k} \sup_{x \in K} |\nabla^s u(x)|^p \right),$$

Démonstration:

Remarquons que pour $p \ge 1$, (3) est simplement l'inégalité de Hardy et est donc vérifiee pour toute fonction, sans hypothèse de moyenne.

Dans le cas $p < 1$, $\partial\Omega$ étant lipschitzienne, on considère un nombre fini de cylindres L_i et H_i tels que $L_i \supset\supset H_i$, UH_i est un voisinage de $\partial\Omega$ et tels que pour chaque i, modulo une transformation linéaire, on a

$$(4) \qquad \Omega \cap L_i = \{x = (x', x_n);\ |x'| \le \beta;\ 0 \le x_n \le \alpha(x')\}$$

où α est lipschitzienne et

$$(5) \qquad \delta(x) \cong \alpha(x') - x_n \text{ si } x \in \Omega \cap L_i.$$

Sur chaque $\Omega \cap L_i$ défini par (4), on pose

$$|\nabla^k u(x', x_n)|^* = \sup_{0 \le y \le x_n} |\nabla^k u(x', y)|$$

$\nabla^k u$ satisfaisant une propriété de moyenne, en utilisant comme dans [7], un recouvrement de Whitney, on obtient par intégration et par le théorème de Fubini, compte tenu de (5),

$$\int_{\Omega\cap H_i} \delta^{q+kp}(x)(|\nabla^k u(x)|^*)^p\,dx \le C\int_{\Omega\cap L_i} \delta^{q+kp}(x)|\nabla^k u(x)|^p\,dx.$$

Comme dans [7], en appliquant l'inégalité de Hardy pour les fonctions décroissantes dans le cas $p < 1$ à la fonction $|\nabla^k u(x', e^{-t})|^*$ et à ses intégrales successives $\int_{t=S_i}^{\infty}\cdots\int_{S_1}^{\infty}|\nabla^k u(x', e^{-y})|^{*_p}\,dy$ pour $1 < i \le k$ on obtient

$$\int_{-\log\alpha(x')}^{\infty}(\alpha(x') - e^{-t})^q|u(x', e^{-t})|^p\,dt \le$$

$$C\left(\int_{-\log a(x')}^{\infty}(a(x') - e^{-t})^{q+kp}|\nabla^k u(x', e^{-t}|^p\,dt + \sum_{0\le s\le k}|\nabla^s u(x', 0)|^p\right).$$

En intégrant sur chaque cylindre L_i et en utilisant (5), on obtient la proposition avec un compact contenant le complémentaire de UL_i dans Ω. ■

Proposition 3.

Soit S un système vérifiant (H) dans un domaine Ω borné; soit $p > 0$.

(i) *Pour tout $q \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, il existe une constante C telle que*

$$\int_\Omega \delta^{q+kp}(x)|\nabla^k u(x)|^p\,dx \le C\int_\Omega \delta^q(x)|u(x)|^p\,dx \tag{6}$$

pour toute fonction u telle que $S(u) = 0$ dans Ω.

(ii) *Si Ω est connexe, à frontière lipschitzienne et si x_0 est un point de Ω, on a*

$$\int_\Omega \delta^q(x)|u(x)^p\,dx \le C\int_\Omega \delta^{q+p}(x)|\nabla u(x)|^p\,dx + |u(x_0)|^p \tag{7}$$

sous l'une des conditions suivantes:

a) S est à coefficients constants, $q > -1$.

b) $S(1) \equiv 0$, $q \ge \max(-p, -1)$.

Démonstration:

Pour obtenir (i), on intégre dans Ω, en utilisant le théorème de Fubini, l'inégalité (1) où on choisit $r(x) = \frac{\delta(x)}{4}$.

Pour obtenir (ii), on reprend les méthodes de Straube [**7**] (cf. aussi [**2**], [**3**] et [**6**]) en utilisant la proposition précédente:

Dans le cas a), si $\mathcal{S}(u) = 0$, on a aussi $\mathcal{S}(\nabla^s u) = 0$ pour tout s et donc par la proposition 1, $\nabla^s u$ vérifie une propriété de moyenne. Soit k tel que $kp + q > 0$, on peut appliquer la proposition 2 et on a donc l'inégalité (3).

Or si $x_0 \in K$, il existe un compact K' avec $\Omega \supset\supset K' \supset\supset K$, tel que, par intégration sur un chemin entre x_0 et x, on ait

$$\sup_{x\in K} |u(x)|^p \leq |u(x_0)|^p + \sup_{x\in K'} |\nabla u(x)|^p$$

et si $0 < s \leq k$, par la proposition 1 appliquée à ∇u, il existe $K'' \supset\supset K' \supset\supset K$ tel que
(8)

$$\sup_{x\in K'} |\nabla^s u(x)|^p \leq C \left(\int_{K''} |\nabla u(x)|^p \, dx \right) \leq C' \int_\Omega \delta^{q+p}(x) |\nabla u(x)|^p \, dx.$$

D'aprés la partie i) de la proposition 3, déja démontrée, appliquée à ∇u, on a

$$\int_\Omega \delta^{q+kp}(x) |\nabla^k u(x)|^p \, dx \leq C \int_\Omega \delta^{q+p}(x) |\nabla u(x)|^p \, dx \tag{9}$$

et donc (3) entraîne (7).

Dans le cas b), avec les notations de la proposition 1 si $\mathcal{T}(U) = 0$ on a $\mathcal{T}(U - \int U) = 0$ et donc encore

$$|\nabla U(0)| \leq C \left(\int_{B(0,1)} \left| U(y) - \int_{B(0,1)} U \right| dy \right).$$

Or par l'inégalité de Poincaré, il existe une constante C indépendante de U telle que

$$\int_{B(0,1)} \left| U(y) - \int_{B(0,1)} U \right| dy \leq C \int_{B(0,1)} |\nabla U|(y) \, dy$$

et donc $|\nabla u(x)| \leq \frac{C}{r^n} \int_{B(x,r)} |\nabla u(y)| \, dy$.

∇u verifiant une própriété de moyenne pour $p = 1$, on en déduit comme dans la proposition 1 et comme dans [**1**] que ∇u vérifie une inégalité de moyenne pour tout $p > 0$. On peut donc appliquer la proposition 2 et comme dans le cas a), remplacer $\sup_{x\in K} |u(x)|^p$ par $|u(x_0)|^p + \int \delta^{k+p}(x) |\nabla u(x)|^p \, dx$. ■

Par récurrence, on obtient:

Corollaire. *$\mathcal{S}$ un systeme vérifiant (H), à coefficients constants; soit $q > -1$, k un entier et x_0 un point de Ω.*

Il existe des constantes C et C' telles que pour toute solution u de $\mathcal{S}(u) = 0$, on a

$$C \int_\Omega \delta^{q+kp}(x) |\nabla^k u(x)|^p \, dx \le \int_\Omega \delta^q(x) |u(x)|^p \, dx$$
$$\le C' \left(\int_\Omega \delta^{q+kp}(x) |\nabla^k u(x)|^p \, dx + \sum_{0 \le s < k} |\nabla^s u(x_0)|^p \right).$$

On a aussi la propriété de compacité suivante

Proposition 4.

Soit $\mathcal{S}$ verifiant (H) dans Ω connexe, borné, à frontiere lipschitzienne; on suppose que $\mathcal{S}$ est à coefficients constants ou vérifie $\mathcal{S}(1) = 0$. Soit $0 < p < 1$.

De toute suite u_n vérifiant $\mathcal{S}(u_n) = 0$ et $\sup_n(\|u_n\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}) < \infty$ on peut extraire une sous suite convergente dans $L^p(\Omega)$.

Démonstration:

Si $\Omega \supset\supset K$, on a, par la proposition 3

$$\int_{\Omega \setminus K} |u_n(x)|^p \, dx \le (\mathrm{dist}(K, \partial\Omega)^p \int_{\Omega \setminus K} \delta^{-p}(x) |u_n(x)|^p \, dx$$
$$\le C(\mathrm{dist}(K, \partial\Omega)^p \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^p(x) \, dx + |u_n(x_0)|^p \right)$$

donc pour tout N, il existe un compact K_N tel que $\int_{\Omega \setminus K_N} |u_n(x)|^p \, dx \le \frac{1}{N}$ pour tout n. Sur K_N, les fonctions dérivables u_n sont, d'aprés (1), uniformément bornées ainsi que leurs dérivées. Par le théorème d'Ascoli, il existe une sous suite convergente uniformément sur K_N et par diagonalisation quand $N \to \infty$, on peut extraire une sous suite convergente dans $L^p(\Omega)$. ■

Références

1. P. AHERN ET J. BRUNA, Maximal and area integral characterisations of Hardy-Sobolev spaces in the unit ball of C^n, *Revista Matemática Iberoamericana* 4 (1988), 123–153.

2. H. BOAS ET E. STRAUBE, Sobolev norms of harmonic and analytic functions, Preprint.
3. J. DÉTRAZ, Classes de Bergman de fonctions harmoniques, *Bull. Soc. Math. France* **109** (1981), 259–268.
4. A. FRIEDMAN, "*Partial differential equations*," Holt, Rinehart, Wintson, 1969.
5. G. HARDY ET J. LITTLEWOOD, Some properties of conjugate functions, *Jour. Reine Angew. Math.* **167** (1932), 405–423.
6. S. GRELLIER, Comportement des fonctions holomorphes dans des directions complexes tangentes, *C.R.A.S.* **312** (1991), 77–78.
7. E. STRAUBE, Interpolation between Sobolev and between Lipschitz spaces of analytic functions on starshaped domains, *Trans. A.M.S.* **316** (1989), 653–671.

U.F.R. MIM et CNRS-URA-225
Universite de Provence
3, Place Victor Hugo
13331 Marseille Cedex
FRANCE

Rebut el 13 de Febrer de 1992